

高斯原理两种形式的等价性讨论^{*}

姚文莉[†] 高俊平

(青岛理工大学 理学院, 青岛 266525)

摘要 高斯最小约束原理是经典的微分变分原理,因其普遍性被视为最适合动力学的基本原理,同时其极小值形式的表达在现代计算技术飞速发展的今天重新引起了学者们对这个古老的原理的重视.分析力学教材中高斯原理一般以高斯约束取极小值及高斯意义上的变分形式两种形式引入,两种形式的等价性问题是研究高斯原理理论拓展的最基础的问题.笔者讨论了两种形式的高斯原理的等价性的适用条件,明确指出:当约束条件完全可以被约束方程所表达时,两种形式互为充分必要条件;同时,将非理想约束按约束力的表达方式进行分类,分别讨论不同的约束力模型下拓展的高斯原理两种形式的等价性及适用条件,结果表明:仅当非理想约束力独立于理想约束力时,两种形式才会等价;相比于最小值形式的高斯原理,变分形式的高斯原理更具一般性,其理论逻辑底层为 Newton 第二定律及承认理想约束的假设.以简单刚杆的滑动为例,展示了高斯原理的极小值表达方式的存在条件.文章的讨论为高斯原理在不同约束系统中的推广提供了基本分析基础.

关键词 高斯最小约束原理, 高斯变分, 摩擦, 约束函数, 非理想约束

中图分类号: O313.4

文献标志码: A

A Discussion on the Equivalence of Two Forms of Gauss' Principle^{*}

Yao Wenli[†] Gao Junping

(School of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao 266525, China)

Abstract Gauss' principle of least constraint is a classical differential variational principle. Due to its generality, it is regarded as the most suitable fundamental principle for dynamics. Meanwhile, its formulation as a minimization problem has, with the rapid advancement of modern computational technology, renewed scholars' interest in this long-established principle. In textbooks on analytical mechanics, Gauss' principle is usually introduced in two forms: the minimization of the Gauss constraint and the variational form in the sense of Gauss. The equivalence between these two forms constitutes the most fundamental issue in the theoretical extension of Gauss' principle. This paper discusses the applicable conditions for the equivalence of the two forms of Gauss' principle, and clearly states that when the constraints can be fully described by constraint equations, the two forms are both necessary and sufficient for each other. Furthermore, non-ideal constraints are classified according to the representation of constraint forces, and the equivalence as well as the applicable conditions of the extended Gauss' principle under different constraint force models are examined separately. The results show that the two forms are equivalent only when the non-ideal constraint forces are independent of the ideal constraint forces.

2025-12-20 收到第 1 稿, 2026-01-15 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12272197, 12202224)和山东省自然科学基金项目(ZR2022MA066); National Natural Science Foundation of China(12272197, 12202224) and the Shandong Province nature Fund project(ZR2022MA066).

[†] 通信作者 E-mail: wenli.yao@qut.edu.cn

Compared with the minimization form, the variational form of Gauss's principle is more general, with its theoretical foundation resting on Newton's second law and the assumption of ideal constraints. Using the sliding motion of a simple rigid rod as an example, the existence conditions for the minimization form of Gauss's principle are demonstrated. The discussion in this paper provides a fundamental analytical basis for extending Gauss's principle to different constrained systems.

Key words Gauss's principle of least constraint, variational formulation, friction, constraint function, non-ideal constrain

引言

高斯原理是经典的力学变分原理,陈滨先生^[1]、梅凤翔先生^[2]等均提出过高斯原理可以作为分析力学基本原理的看法,刘延柱先生认为:“从方法论的观点思考,对于复杂系统的动力学建模问题,除推导微分方程求解的传统方法以外,以高斯原理为代表的优化方法是否也应给予更多的关注?”^[3].

由于高斯原理表达形式的简洁及极值特性,其在机器人、杆网系统等复杂系统的动力学建模方面发挥了重要的作用^[4,5],Udwad^[6]将高斯最小拘束原理推广至约束可能不一致的情形,从理论层面揭示了高斯原理在处理大规模约束与计算不确定性问题中的潜在优势,同时为了扩大高斯原理作为动力学建模原理的应用范围,学者们一直尝试在基本理论上突破上述约束特性的限制,并取得进展^[7-11],其中笔者^[7-9]将高斯原理的最值形式拓展到非理想系统,并在含单边理想约束的多体系统动力学方面研究了其应用特点;张毅等^[10,11]将高斯最小拘束原理拓展到任意阶导数空间、变质量和的理想双面约束系统,并进一步推广至变加速相对运动情形,通过引入相对急动度空间概念,构建了相应形式的广义高斯原理.这些理论上的拓展都要回答共同的问题:高斯原理拓展的理论分析起点是什么?

梅凤翔先生^[12]在“关于高斯原理”中梳理了高斯原理的起源与发展:高斯原理在1829年由 Gauss 在《关于力学的一个新的普遍原理》中提出最小拘束思想,由 Scheffler 于1858年在《关于 Gauss 力学基本定律》中给出了以笛卡尔直角坐标形式的高斯拘束的解析表达式,并以必要性条件给出高斯原理的变分形式.目前分析力学教材中关于高斯原理的叙述,将高斯原理的成立条件限定在双

边理想的一阶线性及非线性约束系统,但《中国大百科全书·力学》条目“高斯原理”并没有强调“双边约束”的限制条件.

在分析力学教材中,高斯原理通常以两种形式出现:(1)真实运动的拘束在所有可能运动中取极小值的高斯最小拘束原理,本文称之为最值形式的高斯原理;(2)高斯意义上的虚功方程,本文称之为变分形式的高斯原理.从历史出现的顺序来看,最值形式的高斯最小拘束原理早于变分形式的高斯原理,后者在分析力学教材中常常作为高斯拘束的驻值条件,刘延柱^[13]认为二者可以看作是等价的.两种形式的等价性条件问题是研究高斯原理理论拓展的最基础的问题.

笔者重新整理考察了两种形式的高斯原理的关系,研究其等价性条件的适用范围.在此基础上,将非理想约束按约束力的表达方式进行分类,分别讨论不同的约束力模型下拓展的高斯原理两种形式的等价性及适用条件,分析其物理本质,从而确定拓展系统动力学的基本高斯原理的形式.以发生接触的简单刚杆为例,在约束表现为不同特点(如光滑约束、库伦摩擦、粘滞摩擦)时,展示变分形式高斯原理在非理想系统中的可推广性及高斯拘束极值存在的条件.

1 经典的高斯原理两种形式的等价性

1.1 原理简介

研究由 N 个质点 $P_i (i=1, 2, \dots, N)$ 组成的受约束质点系,质量 $m_i (i=1, 2, \dots, N)$, 受到主动力 $F_i (i=1, 2, \dots, N)$ 作用. 针对该系统,高斯原理给出了从满足约束的所有可能运动中挑出实际运动的准则,以两种形式呈现:

(1)最值形式的高斯原理

力学系统在等式约束组的作用下,与位置和速度相同但加速度不同的可能运动相比较,系统的真实运动的加速度使其拘束函数 Z 取极小值.

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2 \quad (1)$$

上述原理一般被称为高斯最小拘束原理,或简称高斯原理,其实质在于所含约束条件下的可能运动对自由运动的加速度偏离的加权总平方差对真实运动取极小值.

此种形式的高斯原理可用于不同形式动力学方程的推导,亦可直接利用最小值的特性将动力学问题构造为优化问题来求解.

(2) 变分形式的高斯原理

$$\sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_i) \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (2)$$

上式作为高斯意义下(瞬时 t , 冻结位置及速度, 仅对加速度取变分)的动力学普遍方程,同时也是最值形式的高斯原理的驻值条件,也被称作高斯原理.

1.2 命题等价性的限制条件分析

关于两种形式充分性及必要性的证明方法,分别可见于不同的分析力学教材^[1,2],刘延柱^[13]认为二者可以看作是等价的,并给出了证明.笔者分析了等价性证明中所包含的限定条件:在证明结论成立时并没有直接用到理想约束的限制,但两个命题均是真实运动的加速度与可能运动比较的结果,而“高斯意义上的可能运动”被定义为:在状态(位置和速度)一定的情况下,该瞬时的可能运动是指满足等式约束(双边约束)的可能加速度.

因此,具体的约束的限制条件可表示为:等式约束且约束可以被约束方程所表达.

讨论:

被约束方程所表达的约束与“理想约束”是否可以相互取代?

作为描述物体之间相互作用的基本要素之一,约束表现为多种不同的数学形式.按照经典的理想约束的定义:约束力的虚功之和为零,系统为理想约束系统.刘才山^[13]认为:一旦给定系统运动应满足的约束方程,如同主动力所做的虚功为零一样,约束力对应的虚功同样为零.主动力与约束力的区别在于,主动力具有明确的力函数关系,而约束力需要与所规定的约束运动相协调.

从这个意义上理解,可以完全被约束方程所表达的约束是理想约束.

小结:

针对理想约束系统(约束的相互作用可以被约束方程所描述),不管是双边还是单边约束,不管是完整约束,还是非完整一阶线性及非线性约束,最值形式的高斯原理及变分形式的高斯原理均是等价的.

2 扩展的高斯原理两种形式的等价性分析

当考虑到摩擦、材料黏性等非理想因素时,部分相互作用不能被所定义的约束方程涵盖,这时需要将约束之外的相互作用与特定物理规律紧密关联,如根据库仑干摩擦定律、粘性摩擦等定义的具有明确的力函数的非理想约束力 F_{Ri}^n ,在动能定理的应用中常常将其作为主动力来考虑,那么当将其作为主动力项嵌入到高斯拘束函数及变分形式的高斯原理中时,二者是否还能等价呢

2.1 扩展系统高斯原理的不同表达式的存在性与等价性

当约束特性不能完全通过位形变量或状态变量的数学方程所表达时,一般通过实验观察,可以将约束力写作明确的力函数,此情况下的约束力被称作非理想约束力.

尝试将非理想约束力项 F_{Ri}^n 作为主动力项添加到两种形式的高斯原理中,形成高斯原理拘束及变分方程的扩展形式:

最值形式的扩展高斯拘束函数:

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right)^2 \quad (3)$$

高斯原理的扩展变分形式:

$$\sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ri}^n) \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (4)$$

对式(3)求变分

$$\begin{aligned} \delta Z &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) \cdot \delta \left(\dot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\dot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) \cdot \delta \left(\dot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

将式(4)与式(5)比较,可以看出:必要性条件成立的关键取决于非理想约束力是否参与高斯高分的过程,即非理想约束力的函数形式如何表达:

(1) 如果非理想约束可以表达为系统状态变量

的函数(如粘滞摩擦的情况),即

$$\mathbf{F}_{Ri}^n = \mathbf{f}(r_i, \dot{r}_i, t) \quad (6)$$

则在取高斯意义的变分中,非理想约束力为常量,不参与变分过程,即式(5)可以写作 $\delta Z = 0$,即

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{Ri}^n) \cdot \delta \left(\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{Ri}^n) \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}}_i \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

则式(4)成立,即必要性条件得证。

下面证明充分性条件:

若 $\sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ri}^n) \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}}_i = 0$ 成立,求证真实运动使得高斯拘束函数取得极小值。

按照本讨论中的限定条件,利用高斯意义下的加速度变分过程,主动力及非理想约束力的高斯变分为零,则变分符号可放在外层,即

$$\delta \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) \cdot \left(\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) = 0 \quad (8)$$

其中变分号内部项即为(1)中的高斯拘束函数,即取扩展高斯拘束:

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right)^2 \quad (9)$$

则 $\delta Z = 0$,可知真实运动使得扩展拘束函数取驻值。下面证明真实运动对应的扩展拘束为极小值:

令 $\ddot{\mathbf{r}}_i$ 为真实运动的加速度, $\ddot{\mathbf{r}}_i + \delta \ddot{\mathbf{r}}_i$ 则为约束允许的可能加速度,计算可能运动的拘束 Z^* 之差:

$$\begin{aligned} \Delta Z &= Z^* - Z \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i + \delta \ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right)^2 - \\ & \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\delta \ddot{\mathbf{r}}_i)^2 + \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}}_i \end{aligned} \quad (10)$$

上式第二项满足变分方式(4),故第二项为零,可导出:

$$\Delta Z = Z^* - Z > 0 \quad (11)$$

从而证实真实运动所对应的扩展高斯拘束取得极小值,故充分性得证。

故如果非理想约束可以表达为系统状态变量的函数,扩展形式的高斯原理两种形式是等价的。

(2)如果非理想约束力的力函数与系统理想约

束力相关(如库伦摩擦的情况)的,即 $\mathbf{F}_{Ri}^n = \mathbf{f}(r_i, \dot{r}_i, \mathbf{F}_{Ri}, t)$,则在取高斯意义上变分过程中,非理想约束力与加速度相关,因此也会参与变分过程,即

$$\begin{aligned} \delta Z &= \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{Ri}^n) \cdot \delta \left(\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{Ri}^n) \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}}_i - \\ & \quad \sum_{i=1}^N \left(\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) \cdot \delta \mathbf{F}_{Ri}^n \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{Ri}^n) \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}}_i - \\ & \quad \sum_{i=1}^N \left(\ddot{\mathbf{r}}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_{Ri}^n}{m_i} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{F}_{Ri}} \delta \mathbf{F}_{Ri} \end{aligned} \quad (12)$$

同式(4)相比,上式中多了关于与理想约束力变分相关的项,如果理想约束力为变量,则必要条件不再成立,因此两者等价关系不再成立。

2.2 两种形式的原理的本质特性分析

由 newton 第二定律:

$$-m_i \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Ri}^n + \mathbf{F}_{Ri}^i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

其中 \mathbf{F}_{Ri}^n 及 \mathbf{F}_{Ri}^i 分别为非理想约束力及理想约束力。根据高斯意义上理想约束的概念:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{Ri}^i \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (14)$$

则下式成立:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{Ri}^n) \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad (15)$$

可见变分形式的扩展高斯原理成立的前提是: Newton 第二定律及高斯意义上的理想约束的假定。

对于真实运动使得扩展高斯拘束取极小值的情况,只有在约束完全可以被约束方程所表达的理想系统以及非约束力的力函数与理想约束力无关的非理想系统时,才会与变分形式的高斯原理等价,即与 Newton 第二定律及理想约束的假定吻合。

对于理想约束系统,高斯原理的扩展变分形式(4)可退化为经典的变分形式的高斯原理(2)。按照拉格朗日理论,系统有 n 个自由度, m 个约束为非理想约束,则引入不独立的 $n+m$ 广义坐标 $q_1 q_2, \dots, q_{n+m}$,可将(3)式和(4)式转化为下列广义坐标矢量形式:

$$\begin{aligned} Z &= (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_R^n)^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_R^n) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_r^n)^T \delta \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (17)$$

其中 $\mathbf{M}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_r^n$ 分别为系统的广义质量矩阵、广义加速度矩阵、广义力矩阵及广义非理想约束力矩阵。

关于广义坐标形式的高斯原理等价性的讨论结果与质点系统的讨论类似。

小结:

(1) 扩展的高斯原理两种形式在以下两种条件下等价:

- ① 非理想约束力的力函数与理想约束力无关;
- ② 非理想约束力的力函数与理想约束力有关但相应的理想约束力在高斯意义上保持常量。

(2) 当非理想约束力与理想约束力相关且理想约束力在高斯意义上为变量时, 扩展的高斯原理的两种形式不等价。

(3) 相比于最值形式的高斯原理, 变分形式的高斯原理更具有一般性, 其理论逻辑基础即为 Newton 第二定律及理想约束假定。

3 例证

研究图 1 所示例子: 质量为 m 、长度为 $2l$ 的刚杆沿粗糙平面滑动, 取质心坐标 (x, y) 及杆与地面的倾角为描述系统的广义坐标, 刚杆一端 A 与平面间的摩擦力的力函数可分为两种情形:

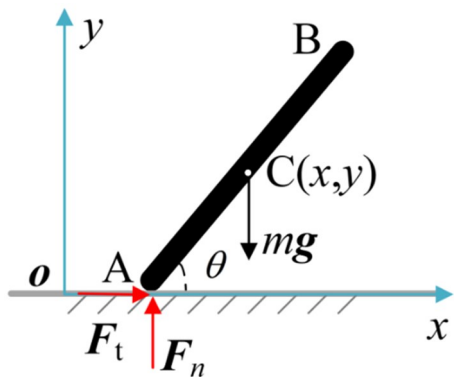


图 1 沿地面滑行的刚杆

Fig. 1 A rigid bar that slides along the ground

① 接触点快速滑动时产生的摩擦力接近与触点的滑动速度成比例^[3]: $F_t = -k\dot{x}_A = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$

② 库仑滑动摩擦定律: $F_t = uF_n$

给出关于加速度的约束方程, 为简单起见, 在此只考虑约束的双边情形:

$$\phi = \ddot{y} - l\ddot{\theta} \cos\theta + l\dot{\theta}^2 \sin\theta = 0 \quad (18)$$

(1) 首先考虑变分形式的高斯原理:

$$m\ddot{x}\delta\dot{x} + m\ddot{y}\delta\dot{y} + J_c\ddot{\theta}\delta\dot{\theta} -$$

$$F_t\delta\dot{x} + mg\delta\dot{y} - F_t l \sin\theta \delta\dot{\theta} = 0 \quad (19)$$

采用拉格朗日乘子法引入约束(18), 则

$$(m\ddot{x} - F_t)\delta\dot{x} + (m\ddot{y} + mg - \lambda)\delta\dot{y} + (J_c\ddot{\theta} - F_t l \sin\theta + l \cos\theta \lambda)\delta\dot{\theta} = 0 \quad (20)$$

因此下式成立:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_t \\ m\ddot{y} = \lambda - mg \\ J_c\ddot{\theta} = F_t l \sin\theta - l \cos\theta \lambda \end{cases} \quad (21)$$

通过矢量力学的平面运动微分方程, 可以得到下列方程组:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_t \\ m\ddot{y} = F_n - mg \\ \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} = -F_n l \cos\theta + F_t l \sin\theta \end{cases} \quad (22)$$

通过两个方程组比较可以得到: 由变分方法得到的动力学方程(此时 $\lambda = F_n$)与通过矢量力学得到的动力学方程一致, 从而证明变分形式的扩展高斯原理与 Newton 力学的理论基础是一致的。

(2) 考察最值形式的高斯原理:

构造系统的高斯拘束函数:

$$Z = \frac{1}{2}m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{1}{2}J_c\ddot{\theta}^2 - F_t\ddot{x} + mg\ddot{y} - F_t l \sin\theta \ddot{\theta} + F_n l \cos\theta \ddot{\theta} \quad (23)$$

采用拉格朗日乘子法, 构造新的拘束函数 Z^* :

$$Z^* = Z - \lambda\phi \quad (24)$$

将此有条件的极值问题变为含 4 个变量的无条件极值问题, 求高斯变分, 并代入变分方程(20), 得到:

$$\begin{aligned} \delta Z^* = & (m\ddot{x} - F_t)\delta\dot{x} + (m\ddot{y} + mg - \lambda)\delta\dot{y} + \\ & (J_c\ddot{\theta} - F_t l \sin\theta + l \cos\theta \lambda)\delta\dot{\theta} - \\ & (\ddot{x} + l \sin\theta \ddot{\theta})\delta F_t = -(\ddot{x} + l \sin\theta \ddot{\theta})\delta F_t \end{aligned} \quad (25)$$

讨论:

① 当 $F_t = -k\dot{x}_A = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ 时:

$$\delta Z^* = -(\ddot{x} + l \sin\theta \ddot{\theta})\delta F_t = 0$$

真实运动使得高斯拘束 Z 取得极小值成立, 问题可化为求极小值的条件优化问题;

② 当 $F_t = uF_n$ 时, 当 $u = 0$ (系统光滑) 或 $u \neq$

0 且 F_n 为常量时(此时杆退化为单个质点), $\delta Z^* = 0$, 真实运动使得高斯拘束取驻值; 当 $u \neq 0$ 且 F_n 为变量时, 有:

$$\delta Z^* = -(\ddot{x} + l \sin\theta \ddot{\theta}) \mu \delta F_n = 0$$

此时 $\delta F_n \neq 0, \delta Z^* = 0$ 仅在 $\ddot{x} + l \sin\theta \ddot{\theta} = 0$ 时成立, 但该条件并非由动力学或约束关系给出, 而是引入了与动力学无关的附加约束, 因而真实运动不能使此种定义的高斯拘束取驻值。

4 结论:

从经典的高斯原理两种形式的等价性问题推广到扩展形式的高斯原理的等价性问题, 得到以下结论:

(1) 针对理想约束系统(约束的相互作用可以被约束方程所描述), 不管是双边还是单边约束, 不管是完整约束, 还是非完整一阶线性及非线性约束, 最值形式的高斯原理及变分形式的高斯原理均是等价的;

(2) 当非理想约束力的函数与理想约束力无关或者虽然有关、但相应的理想约束力在高斯意义上保持常量时, 两者等价; 当非理想约束力与理想约束力相关且理想约束力在高斯意义上为变量时, 两者不等价;

变分形式的高斯原理的理论逻辑基础即为 Newton 第二定律及理想约束假定, 故不管理想系统还是非理想系统都是成立的, 可以此作为分析力学变分原理在不同约束系统动力学问题的推导起点, 如非光滑系统的动力学方程、优化模型等。

参考文献

- [1] 肖德好. 分析动力学[M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2012.
XIAO D H. Analytical dynamics [M]. 2nd ed. Beijing: Peking University Press, 2012. (in Chinese)
- [2] 梅凤翔. 分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2013.
MEI F X. Analytical mechanics (II) [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013. (in Chinese)
- [3] 刘延柱. 关于高斯原理与动力学的优化法建 [C]// 中国力学大会-2019(CCTAM 2019). 北京: 中国力学学会; 2019: 4094-4096.

- LIU Y Z. Optimization modeling of Gauss principle and dynamics [C] // Proceedings of the Chinese Congress of Theoretical and Applied Mechanics -2019 (CCTAM 2019). Beijing: Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics, 2019: 4094-4096.
- [4] 波波夫. 操作机器人动力学与算法[M]. 遇立基, 陈循介译. 北京: 机械工业出版社, 1983.
ПООПОВ ЕП. Operating robot dynamics and algorithm [M]. YU L J, CHEN X J, trans. Beijing: Mechanical Industry Press, 1983. (in Chinese)
- [5] 刘延柱. 杆网系统基于高斯原理的动力学建模[J]. 动力学与控制学报, 2018, 16(4): 289-294.
LIU Y Z. Dynamical modeling of a net system of rods based on Gauss's principle [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(4): 289-294. (in Chinese)
- [6] UDWARDIA F E. The general Gauss principle of least constraint [J]. Journal of Applied Mechanics, 2023, 90(11): 111006.
- [7] 姚文莉, 刘彦平, 杨流松. 基于高斯原理的非理想系统动力学建模[J]. 力学学报, 2020, 52(4): 945-953.
YAO W L, LIU Y P, YANG L S. Dynamic modeling of nonideal system based on Gauss's principle [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(4): 945-953. (in Chinese)
- [8] YAO W L, YANG L S, SONG K W, et al. Optimization method for dynamics of non-holonomic system based on Gauss' principle [J]. Acta Mechanica Sinica, 2020, 36(5): 1133-1141.
- [9] YAO W L, YANG L S, GUO M M. Gauss optimization method for the dynamics of unilateral contact of rigid multibody systems [J]. Acta Mechanica Sinica, 2021, 37(3): 494-506.
- [10] 张毅, 陈欣雨. 变质量力学系统的广义高斯原理及其对高阶非完整系统的推广[J]. 力学学报, 2022, 54(10): 2883-2891.
ZHANG Y, CHEN X Y. The generalized Gauss principle for mechanical system with variable mass and its generalization to higher order nonholonomic systems [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(10): 2883-2891. (in Chinese)
- [11] 张毅, 宋传静, 翟相华. 变加速动力学系统的广义高斯最小拘束原理[J]. 力学学报, 2023, 55(5): 1174-1180.
ZHANG Y, SONG C J, ZHAI X H. Generalized

- Gauss principle of least compulsion for variable — acceleration dynamical systems [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2023, 55 (5): 1174—1180. (in Chinese)
- [12] 张毅, 翟相华, 宋传静. 变加速相对运动的广义高斯原理与动力学方程[J]. 动力学与控制学报, 2025, 23(3): 18—24.
ZHANG Y, ZHAI X H, SONG C J. Generalized Gaussian principle and dynamic equations of relative motion with variable acceleration [J]. Journal of Dynamics and Control, 2025, 23(3): 18—24. (in Chinese)
- [13] 梅凤翔, 李彦敏, 吴惠彬. 关于 Gauss 原理[J]. 动力学与控制学报, 2016, 14(4): 301—306.
MEI F X, LI Y M, WU H B. On the Gauss principle [J]. Journal of Dynamics and Control, 2016, 14 (4): 301—306. (in Chinese)
- [14] 刘延柱. 高等动力学[M]. 2版. 北京:高等教育出版社, 2016.
LIU Y Z. Advanced Dynamics [M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2016. (in Chinese)
- [15] 刘才山. 分析动力学中的基本方程与非完整约束[J]. 北京大学学报(自然科学版), 2016, 52(4): 756—766.
LIU C S. The fundamental equations in analytical mechanics for nonholonomic systems [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, 2016, 52(4): 756—766. (in Chinese)