

基于李群描述的眼外肌—眼球耦合系统控制研究^{*}

汪雪妮 郭建峤[†]

(北京理工大学 空天科学与技术学院,北京 100081)

摘要 眼球运动是人类感知和交互的关键,眼外肌为眼球三维运动提供了主要驱动力。然而,现有眼外肌—眼球耦合系统生物动力学模型难以处理眼外肌—眼球复杂接触缠绕,且眼球动力学方程忽略了其大范围转动特征。本工作运用几何力学方法,构建了眼外肌—眼球耦合系统动力学模型,探讨了眼外肌主动发力引起眼球三维转动的生物动力学机制。首先,基于测地线方法确定眼外肌—眼球间三维缠绕路径,并建立眼球水平大范围运动过程中眼外肌力臂变化模型。其次,将眼球视为定点转动刚体,基于 $SO(3)$ 李群结构,推导出眼球定点转动的 Euler-Lagrange 方程。在此基础上,利用旋转矩阵插值并结合 Euler-Lagrange 方程逆向求解眼动力矩,结合静态优化算法估计眼外肌群各肌肉最优发力模式。基于开源软件 OrbitTM 1.8 和 OpenSim 对本文提出的方法进行验证,结果表明测地线方法所得眼外肌肌肉力线方向与 OrbitTM 1.8 的模拟结果吻合,所得眼外肌力臂以及静态优化估计的眼外肌发力模式与 OpenSim 模拟结果具有一致性。本文构建的眼球运动几何力学与控制算法,为理解眼外肌控制眼球的生物力学机制、明晰斜视等眼外肌疾患病理机制与治疗方案提供了理论模型与定量支撑。

关键词 眼外肌, 测地线, 李群, Euler-Lagrange 方程, 静态优化

中图分类号:O313;R318.01

文献标志码:A

A Study on the Control of the Extraocular Muscle-Eyeball Coupled System Based on Lie Group Representation^{*}

Wang Xueni Guo Jianqiao[†]

(School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract Eye movement is a key aspect of human perception and interaction, with the extraocular muscles (EOMs) providing the primary driving forces for three-dimensional rotations of the eyeball. However, existing biomechanical models of the coupled EOM-eyeball system struggle to accurately account for the complex wrapping and contact interactions between the muscles and the eyeball, and the equations of motion for the eyeball often neglect its large-amplitude rotational characteristics. In this work, a geometric mechanics framework is developed to construct a dynamic model of the coupled EOM-eyeball system, aiming to reveal the biomechanical mechanisms by which active EOM forces induce three-dimensional ocular rotations. First, the geodesic method is employed to determine the three-dimensional wrapping paths between the EOMs and the eyeball, and a model to describe the variation of EOM moment arms during large-amplitude horizontal eye movements is established. Second, by treating the eyeball as a rigid body with a fixed center of rotation, the Euler-Lagrange equations of motion are derived on the $SO(3)$ Lie

2025-11-15 收到第 1 稿,2025-12-10 收到修改稿。

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12472037, 12132009),中国力学学会青年人才托举工程资助项目(2023QNRC001); National Natural Science Foundation of China(12472037, 12132009), Young Elite Scientists Sponsorship Program by CAST(2023QNRC001).

[†] 通信作者 E-mail: guojianqiao@bit.edu.cn

group. On this basis, the rotational matrices are interpolated on $SO(3)$, and and ocular torques are obtained via inverse dynamics based on the Euler-Lagrange formulation. Furthermore, a static optimization algorithm is introduced to estimate the optimal activation patterns of the extraocular muscle group. The proposed approach is validated using the open-source simulation software OrbitTM 1.8 and OpenSim. The results show that the EOM paths obtained by the geodesic method are consistent with those simulated in OrbitTM 1.8, and that the calculated moment arms and optimized muscle activation patterns agree well with the OpenSim results. The geometric mechanics and control framework developed herein provides a theoretical model and quantitative basis for understanding the biomechanical mechanisms by which the extraocular muscles control eye movements, as well as for clarifying the pathological mechanisms and therapeutic strategies of extraocular muscle-related disorders such as strabismus.

Key words extraocular muscles, geodesic, Lie group, Euler-Lagrange equation, static optimization

引言

精准的眼球运动是人类获取视觉信息的基础^[1,2]. 这一功能的实现,高度依赖于眼外肌—眼球耦合系统. 眼外肌通过复杂的协同—拮抗收缩,驱动眼球做大范围位姿变化,从而完成注视、扫视、平滑追踪等关键视觉任务^[3].

临床上,眼外肌功能异常或协调失衡是导致斜视等常见眼动障碍疾病的重要原因. 斜视(strabismus)是指各种原因引起的眼外肌力失衡、视轴偏斜的一种常见眼科疾病,全球约有2%~7%的儿童受其影响^[4]. 斜视的特征为双眼视觉轴线的恒常或间歇性不一致,其临床表现为一眼固视目标时,另一眼出现偏离^[5]. 与正常双眼协同运动不同,斜视患者即使在静息状态下,其眼位也固定在偏离第一眼位(即眼球在自然状态下,视线正对前方时的方向)^[6]的位置. 因此,研究眼外肌—眼球耦合系统的肌力分配方式,对明晰斜视等眼动异常疾病的患病机制具有重大意义.

动力学建模是揭示生物力学机制的关键途径^[7,8]. 对眼外肌—眼球耦合系统进行精确的动力学建模,不仅为深入理解眼球运动生物力学原理提供了量化分析工具,也为斜视等眼动异常疾病的患病机制与手术规划提供了理论依据. 最早的眼外肌—眼球耦合系统三维力学模型由Robinson^[9]提出,该模型将眼外肌简化为弹性元件,并包含真实的肌肉解剖路径和肌肉激活—长度—张力关系. Simonsz等^[10]和Miller等^[11]分别在Robinson的模型上做出了改进,后者演变成OrbitTM1.8模拟

软件,适用于研究眼部异常运动的产生机制和手术规划. 近年来,研究者基于开源平台OpenSim开发的一系列动眼模型^[12,13],实现了眼球水平运动时眼外肌动态力矩仿真.

为了模拟眼外肌复杂的非线性力学特性,Wei等^[14]将眼外肌建模为一束并行的、包含分布质量和非线性本构的多段线. 他们将水平直肌建模为负责眼球转动的全局层与调控滑车位置的眼眶层,实现了眼外肌功能的精细化建模^[15]. 开源软件OpenSim^[12,13]将眼外肌简化为基于Hill模型的力元,肌肉路径主要由一系列固定的附着点和包络几何定义,实现了对眼球三维运动(如扫视、平滑追踪、注视)的动力学仿真. 然而,上述模型仍未能反映真实的解剖几何,且无法实现对肌肉—眼球动态缠绕的精确刻画.

有限元方法也被广泛应用于眼外肌—眼球系统的力学建模^[16,17]. 例如,卢海等^[18]建立了包括眼球、6条眼外肌和视神经的三维有限元模型. 但其将眼外肌简化为线弹性材料,未能充分考虑其主被动收缩力. Wang等^[19]发展了眼球—眼眶的有限元模型,通过在外直肌止点施加位移来驱动眼球转动. 但该模型未能直接模拟眼外肌主动收缩,且简化了各条眼外肌的动力学特性,以及其与眼球间复杂缠绕关系. 后续有限元研究也存在明显局限:部分模型省略了眼眶结缔组织对眼外肌的约束作用^[20,21],部分模型也未考虑眼外肌复杂几何和主被动收缩^[21].

为解决眼外肌—眼球耦合系统建模问题,需提出眼外肌与眼球间缠绕状态的精确建模方法. 典型

的肌肉缠绕方法包括通过点法和障碍设置法^[22]。通过点法^[23]通过在肌肉起止点之间插入一系列约束在骨骼上的中间点,将肌肉路径分割为一系列直线段,但肌肉路径不满足光滑条件。障碍设置法^[24]将肌肉力线视为简化几何表面的测地线,然而传统肌肉缠绕障碍均简化为圆柱、圆环等标准几何体,难以反映肌骨系统复杂几何表面形貌。Scholz等^[25,26]将缠绕几何视为曲面流形,实现了基于真实肌骨几何拟合缠绕体。Penner与Leyendecker^[27]通过离散变分原理,将连续测地线问题转化为一个有限节点的位置优化问题,但得到的肌肉路径可能存在不光滑和不连续问题。Lavaiil等^[28]将该模型与约束优化框架结合,通过选取目标函数改善了上述问题。Tang等^[29]将肌肉建模为三维的考虑分布惯性的可变截面柔性梁,提出一种表面接触检测算法来捕捉动态包裹过程中的肌肉形状变化。鉴于眼球具有较为规则的球形几何,且眼外肌解剖路径应为光滑曲线,本文选择基于连续测地线的肌肉缠绕方法进行眼外肌路径建模。

眼球运动是三维刚体定点转动问题^[30],早期的眼球动力学建模常采用欧拉角^[31,32]或轴—角参数^[32,33]描述眼球朝向。然而,当眼球做大范围旋转时,欧拉角会因万向锁出现奇异性^[34,35]。轴—角参数虽能够直观描述眼球转动,但其动力学方程及力矩数学形式复杂^[36]。近年来,随着李群方法的兴起,已有学者^[35,37,38]将其引入眼外肌—眼球耦合系统分析。例如,Polpitiya等^[39]将眼球定义在特殊正交群 $SO(3)$ 上,用旋转矩阵表示眼球姿态,并通过轴—角参数描述其Euler-Lagrange方程。Ghosh等^[36]将该方法推广到头—眼协调系统,利用惯性矩阵和角速度描述头眼系统的动力学方程。上述研究虽在数学层面上较系统地阐述了眼球运动满足的几何结构和动力学方程,但均忽略了眼外肌的解剖特征和眼球转动的生物动力学机制。

本文结合微分几何理论,构建了眼外肌缠绕眼球的简化力学模型,精确描述眼外肌—眼球耦合系统接触缠绕路径,对眼球水平大范围运动力臂进行量化。在此基础上,建立眼球定点运动的几何力学方程,并基于静态优化算法模拟眼球水平转动时最佳肌力分配模式,从而明晰眼外肌控制眼球运动的生物动力学机制,并为斜视等眼外肌异常疾病诊疗提供理论基础与定量依据。

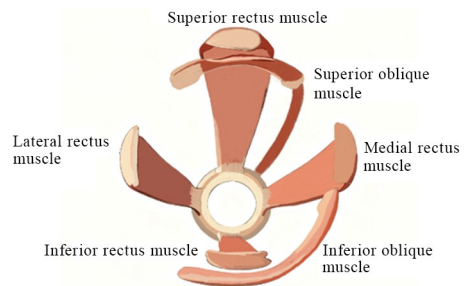
1 系统解剖结构与几何描述

1.1 眼外肌解剖及功能

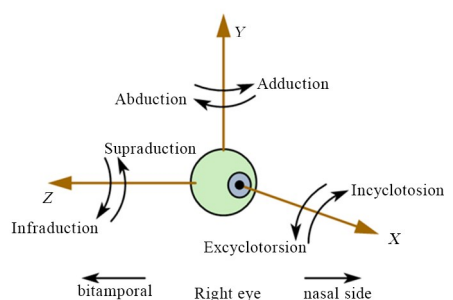
眼外肌—眼球耦合系统是实现眼球转动的核心动力学机制。该系统由眼球和眼球附属结构中的6条眼外肌(extraocular muscles, EOMs)共同作用,通过复杂的生物力学原理控制眼球运动,从而实现精确的注视、视觉追踪等功能。

眼外肌解剖结构如图1(a)所示,6条眼外肌中包括4条直肌,即外直肌(lateral rectus muscle, LR)、内直肌(medial rectus muscle, MR)、上直肌(superior rectus muscle, SR)和下直肌(inferior rectus muscle, IR)。这4条直肌都起源于Zinn环,这是一个位于眼眶后部的肌腱环。上直肌、下直肌分别起自Zinn总腱环上方和下方,内直肌、外直肌分别起自Zinn总腱环内侧偏下方和外侧。2条斜肌包括上斜肌(superior oblique muscle, SO)和下斜肌(inferior oblique muscle, IO)。上斜肌起源于Zinn总腱环内上方,穿过称为滑车的软骨结构后转向后外方;下斜肌起源于眼眶的下部,六条眼外肌的止点都连接在眼球表面^[40]。

为了更清晰地理解眼外肌在眼球运动中的作用,本文首先引入右眼三维坐标系,如图1(b)所示。



(a) 眼外肌解剖结构



(b) 右眼球坐标系及眼外肌功能

图1 眼外肌解剖结构及功能

Fig. 1 Anatomy and function of the EOMs

在该坐标系下,眼球运动可根据绕不同轴旋转分类,如绕 y 轴旋转的内收(adduction)和外展(abduction)运动、绕 z 轴旋转的上转(supraduction)和下转(infraduction)运动,以及绕 x 轴旋转的内旋(incycloduction)和外旋(excycloduction)运动. 基于这一坐标系,表1系统地总结了6条眼外肌在控制眼球运动中的主要及次要功能^[12].

表1 眼外肌的功能
Table 1 Function of EOMs

EOMs	Primary function	Secondary function
MR	Adduction	*
LR	Abduction	*
SR	Supraduction	Incycloduction
IR	Infraduction	Excycloduction
SO	Incycloduction	Infraduction
IO	Excycloduction	Supraduction

1.2 眼外肌—眼球缠绕模型

在肌肉—骨骼系统建模中,肌肉通常被抽象为一条柔性索,其路径需在肌肉起点与止点之间跨越复杂的骨性或关节几何表面. 由于肌肉不能穿透骨骼,因此其实际走向表现为在障碍物表面上绕行的曲线. 以自然测地线^[25]方法为代表,肌肉路径可表述为一条全局测地线,该曲线由直线段与障碍物表面的测地线交替组成.

如图2(a),设肌肉起点为 O , 止点为 I , 若存在 n 个障碍物表面 C_i ($i=1, \dots, n$), 则全局测地线由 $n+1$ 条直线段 S_i 和 n 条表面上的局部测地线 G_i 的交替序列组成, 总路径长度可写为

$$L = \sum_{i=1}^{n+1} L_{S_i} + \sum_{i=1}^n L_{G_i} \quad (1)$$

其中, L_{S_i} 表示直线段长度, L_{G_i} 表示测地线段长度. 还需满足肌肉与骨骼接触点 P_i 和 Q_i 处的直线段方向与测地线方向一致, 数学形式为

$$\begin{cases} \mathbf{e}^i = \mathbf{e}_P^i \\ \mathbf{e}_Q^i = \mathbf{e}^{i+1} \end{cases} \quad (2)$$

其中, \mathbf{e}^i ($i=1, \dots, n+1$) 是直线段 S_i 的方向向量, \mathbf{e}_P^i 和 \mathbf{e}_Q^i ($i=1, \dots, n$) 是测地线段 G_i 分别在 P_i 和 Q_i 处的方向向量. 这一几何约束确保了缠绕路径在接触点处光滑且唯一.

在此基础上,本文发展了基于自然测地线法的

眼外肌—眼球接触缠绕几何模型. 设眼球半径为 r , 球心为 O , 肌肉起点为 A , 肌肉在眼球上的附着点为 B (也称止点). 假设在任何时刻, 眼外肌缠绕眼球的路径是一个全局测地线, 如图2(b)所示, 全局测地线由肌肉起点 A 到切点 C 的直线段 S 以及切点 C 到止点 B 沿眼球表面的测地线段 G 组成. 球面的切点 C 由测地条件和指向条件共同确定. 其中, 由于上斜肌包含一个滑轮结构, 故以滑轮点为起点, 全局测地线由两条直线段和一条测地线组成.

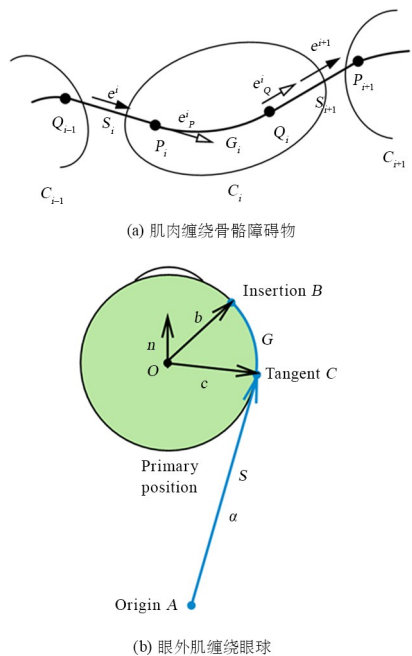


图2 接触缠绕模型示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the contact winding model

1.2.1 测地条件

BC 弧段为眼球表面的测地线段, 即 G 是半径为 r 的圆弧. 弧长 L_G 写为

$$L_G = r\theta, \quad \theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}}{r^2}\right) \quad (3)$$

1.2.2 指向条件

测地线段 G 在 C 点的路径方向与直线段 S 的方向保持一致. 由于测地线段 G 是半径为 r 的圆的一部分, 则指向条件在数学上等价于直线段 S 位于 COB 平面内. COB 平面的单位法向量写为

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}}{r^2} \quad (4)$$

C 点需满足

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5)$$

综上, 满足上述条件的全局路径长度可写为

$$L = L_G + L_S = r \arccos\left(\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}}{r^2}\right) + \|\mathbf{a}\| \quad (6)$$

2 眼球运动的几何动力学建模

2.1 眼外肌力臂模型

假设眼球运动过程中,眼外肌起点和上斜肌滑车位置始终保持不变,即不考虑颅骨空间运动.为精确描述眼球的水平方向运动(即内收或外展),定义两个坐标系:一个固定于头部的惯性坐标系(x, y, z);一个固连于眼球的本体坐标系(x', y, z'),随眼球一同运动.

眼球初始姿态处于第一眼位,即眼球在自然状态下,视线正对前方时的方向^[41].如图 3(a)所示,此时本体坐标系与惯性坐标系对齐.第一眼位下眼外肌的起止点^[13]如表 2 所示.

(x', y, z')是眼球向鼻侧水平转动 θ 角后的当前坐标,如图 3(b)所示.内直肌 MR 和外直肌 LR 的止点会随眼球运动而变化,导致各眼外肌的肌肉力线和力臂产生变化.

通过旋转矩阵即可计算出新的止点坐标,假设

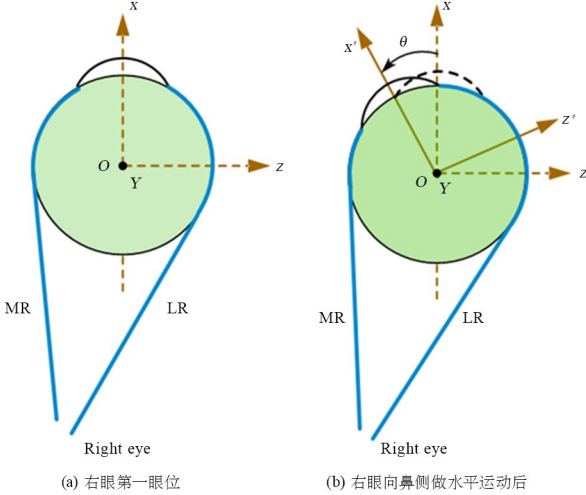


图 3 内外直肌路径
Fig. 3 Pathway of the MR and LR

表 2 眼外肌起止点及滑车位置

Table 2 Origin,insertion and pulley of EOMs

EOMs	Origin/mm	Insertion/mm	Pulley/mm
MR	[-30, 0.6, -17]	[8.8, 0, -9.6]	*
LR	[-34, 0.6, -13]	[6.5, 0, 10]	*
SR	[-31.7, 3.6, -16]	[7.6, 10.4, 0]	*
IR	[-31.7, -2.4, -16]	[8.05, -10.2, 0]	*
SO	[8.2, 12.2, -15.2]	[4.4, 11, 2.9]	[-30.8, 1.15, -16.4]
IO	[11.3, -15.4, -11.1]	[-8, 0, 9]	*

第一眼位下的止点坐标为 p_0 ,则新的止点坐标为

$$p(\theta) = R(\theta) \cdot p_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot p_0 \quad (7)$$

由接触缠绕模型可知,止点改变导致眼外肌的缠绕路径产生变化,将路径长度写为 $L(\theta)$.根据肌腱位移法^[42]求解肌肉力臂,即认为肌肉力臂等于肌肉—肌腱单元长度关于关节角度的变化率:

$$R = \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (8)$$

2.2 一般李群刚体动力学方程

本文用 G 表示一般李群, \mathfrak{g} 表示其对应的李代数,是李群 G 在单位元 $e \in G$ 处的切空间, \mathfrak{g}^* 表示李代数的对偶空间.李群 G 中的元素 g 处的切空间为 $T_g G$,该切空间的对偶空间为 $T_g^* G$ ^[43].

运用 Hamilton 变分原理导出系统动力学方程^[44].当位形空间为李群 G 时,系统拉格朗日量 $L(g, \xi) = T(g, \xi) - V(g)$,其中 $g \in G$ 为广义坐标, $T(g, \xi)$ 为系统动能, $V(g)$ 为系统势能, $\xi \in \mathfrak{g}$ 为广义速度.设系统运动的初始时刻为 t_0 ,结束时刻为 t_1 ,则作用量泛函可表示为

$$\delta \mathcal{G} = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(g, \xi) dt \quad (9)$$

根据 Hamilton 变分原理,真实运动路径需满足作用量的一阶变分为零,即

$$\delta \mathcal{G} = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(g, \xi) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(g, \xi) dt = 0 \quad (10)$$

根据文献[45],式(10)可化为

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(g, \xi)}{\partial \xi} \right] - T_e^* L_g \frac{\partial L(g, \xi)}{\partial g} - \text{ad}_\xi^* \frac{\partial L(g, \xi)}{\partial \xi} = 0$$

$$\dot{g} = g\xi \quad (11)$$

其中 $T_e^* L_g : T_g^* G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ 表示左作用的拉回映射^[40], $\text{ad}_\xi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 是线性映射 $\eta \mapsto [\xi, \eta]$, $[\cdot, \cdot]$ 为李代数定义的李括号, $\text{ad}^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ 为 ad 算子的对偶映射,即配对括号满足 $\langle \text{ad}_\xi^* \alpha, \eta \rangle = \langle \alpha, \text{ad}_\xi \eta \rangle = \langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle$,其本质上描述了系统速度 $\xi \in \mathfrak{g}$ 如何通过李括号结构诱导动量 $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ 的变化.

2.3 眼球定点转动动力学方程

眼球通常被建模为绕其中心做定点转动的球体^[36],其位形空间由特殊正交群 $SO(3)$ 精确描述.

李群 $SO(3)$ 定义为

$$SO(3) = \{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1 \} \quad (12)$$

其中旋转矩阵 \mathbf{R} 描述眼球从第一眼位到任意眼位的旋转, \mathbf{I}_3 为单位矩阵。

李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 是在单位元处无穷小生成元的集合, 表示为

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{ S(\boldsymbol{\omega}) \mid S(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (13)$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ 是本体坐标系下刚体的角速度。

系统拉格朗日函数 $L[\mathbf{R}, S(\boldsymbol{\omega})]: SO(3) \cdot \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}$ 可由动能 $T[\mathbf{R}, S(\boldsymbol{\omega})]$ 减去势能 $V(\mathbf{R})$ 得到, 写为

$$L[\mathbf{R}, S(\boldsymbol{\omega})] = T[\mathbf{R}, S(\boldsymbol{\omega})] - V(\mathbf{R}) \quad (14)$$

其中转动动能为

$$T(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{v}^2 dm(\boldsymbol{\rho}) \quad (15)$$

这里, B 表示刚体积分区域, \mathbf{v} 表示质点的旋转速度, $\boldsymbol{\rho}$ 为质点相对转动中心的矢径, $m(\boldsymbol{\rho})$ 表示刚体内各质点质量。

根据刚体动力学, 若已知角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和向量 $\boldsymbol{\rho}$, 旋转速度 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}$ 。在本体坐标系下展开, 则 $\|\mathbf{v}\|^2$ 可写为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 &= \|\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}\|^2 = \|\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \rho_x & \rho_y & \rho_z \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \rho_y \omega_3 - \rho_z \omega_2 \\ \rho_z \omega_1 - \rho_x \omega_3 \\ \rho_x \omega_2 - \rho_y \omega_1 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \|\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\omega}\|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

则转动动能写为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_B \|\mathbf{v}\|^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int_B \|\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\omega}\|^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\omega} dm \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\mathbf{J} = \int_B \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}) dm$ 表示转动惯量矩阵。查

阅文献[13]知, 典型人眼参数下的人眼转动惯量矩阵为 $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$, 其中 $J_i = 2/5mr^2$, 单位 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。平均人眼的重量 $m = 0.0075 \text{ kg}$, 半径 r 为 0.012 m 。

根据文献[45], 将拉格朗日量 $L[\mathbf{R}, S(\boldsymbol{\omega})]$ 代入式(11), 化简为 $SO(3)$ 上眼球定点转动的 Euler-Lagrange 方程组

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M} &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \quad (18)$$

其中 \mathbf{M} 为 6 条眼外肌共同作用的外力矩向量。

根据眼外肌—眼球缠绕模型和眼外肌力臂模型, 眼外肌对眼球作用的眼外力矩为

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^6 \left(R_i \cdot f_i \cdot \frac{\mathbf{n}_i}{\|\mathbf{n}_i\|} \right) \quad (19)$$

其中 f_i 为每条眼外肌的肌力大小, R_i 为各眼外肌肉的力臂。

3 眼外肌群发力模式优化控制

为深入研究眼外肌在特定运动模式下的协同发力机制, 本节以水平方向的眼球运动为具体研究对象, 基于前文建立的几何力学模型, 开展逆向动力学求解与静态优化分析。

3.1 逆向求解眼动力矩

将非第一眼位姿态建模为一次由第一眼位转动至该姿态的理想化眼动, 如图 4 所示。x 轴正方向为第一眼位方向。y 轴正方向由下颚指向头顶。将该眼动分解为眼球的水平运动和垂直运动。目标眼位为由第一眼位方向绕 y 轴旋转(水平运动) θ_1 (称为偏航角), 同时绕 z 轴旋转(垂直运动)

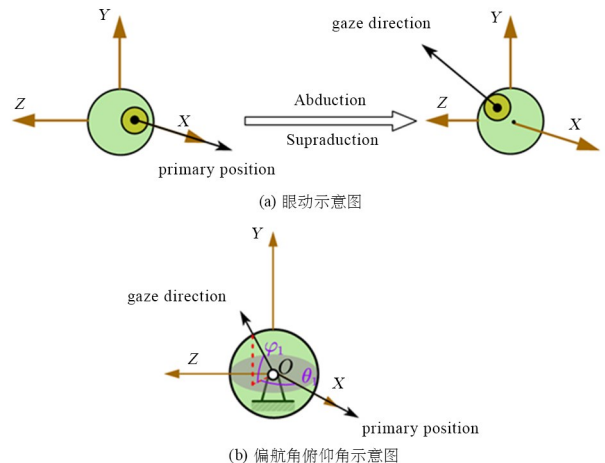


图 4 眼球运动示意图

Fig. 4 Diagram of eye movements

φ_1 (称为俯仰角)得到的方向.

本文逆向求解眼动力矩 \mathbf{M} 的流程图如图 5 所示,具体策略如下:

(1) 目标旋转矩阵

von Helmholtz 认为眼球转动表示最好从绕 z 轴的旋转开始^[46],因此旋转矩阵为 $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\varphi)$,其中

$$\mathbf{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (20)$$

(2) 旋转矩阵插值

定义从第一眼位到目标眼位的相对旋转矩阵 $\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_1$

其中, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}_3$.

由 Rodrigues 定理^[44],任何旋转矩阵都可由一个单位旋转轴 \mathbf{u} 和旋转角 θ 唯一确定

$$\mathbf{R}_\Delta = \exp[\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \theta] \quad (22)$$

其中 $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ 为向量 \mathbf{u} 的反对称矩阵,数学形式参考式(13). \mathbf{u} 和 θ 写为

$$\theta = \arccos \left[\frac{\text{tr}(\mathbf{R}_\Delta) - 1}{2} \right]$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Delta(3,2)} - \mathbf{R}_{\Delta(2,3)} \\ \mathbf{R}_{\Delta(1,3)} - \mathbf{R}_{\Delta(3,1)} \\ \mathbf{R}_{\Delta(2,1)} - \mathbf{R}_{\Delta(1,2)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

眼球从第一眼位旋转到目标眼位的过程中,旋转矩阵 $\mathbf{R}(t)$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_0 \exp[t \log \mathbf{R}_\Delta] \\ &= \mathbf{R}_0 \exp[t \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \theta] \\ &= \mathbf{R}_0 \exp[t\theta \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u})] \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $t \in [0, 1]$.

根据李群指数映射定义

$$\exp[\theta \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u})] = \mathbf{I} + \sin\theta \mathbf{S}(\mathbf{u}) + (1 - \cos\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u})^2 \quad (25)$$

则插值过程中的旋转矩阵可显式写为

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 \{ \mathbf{I} + \sin(t\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) + [1 - \cos(t\theta)] \mathbf{S}(\mathbf{u})^2 \} \quad (26)$$

(3) 角速度和外力矩

将式(26)代入 Euler-Lagrange 方程组的第二式,采用五点差分法计算 $\dot{\mathbf{R}}(t)$, 得

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}(t)^T \dot{\mathbf{R}}(t) \quad (27)$$

参考式(13),解出角速度 $\boldsymbol{\omega}(t) = [S(\boldsymbol{\omega})_{(3,2)}, S(\boldsymbol{\omega})_{(1,3)}, S(\boldsymbol{\omega})_{(2,1)}]^T$, 将其代入 Euler-Lagrange 方程组的第一式,采用二阶中心差分计算 $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$, 有

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}(t) \quad (28)$$

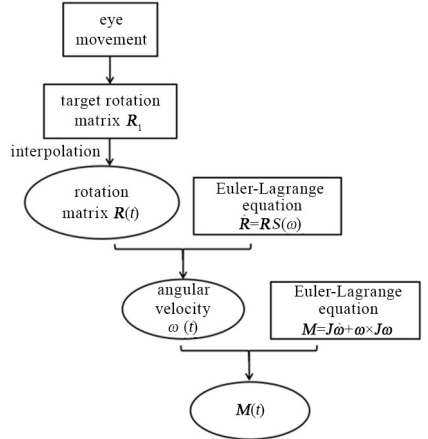


图 5 逆向求解眼动力矩流程图
Fig. 5 Flowchart for reverse solving of oculomotor torque

3.2 静态优化算法

本文采用 Hill 模型来描述眼外肌的力生成特性^[47,48],该模型被广泛应用于生物力学系统的肌肉协调研究,将肌肉—肌腱单元抽象为由收缩元件、串联弹性元件和并联弹性元件组成的力学系统.第 i 条眼外肌产生的总肌力可表示为:

$$f_i = f_i^{\max} [a_i \cdot f_{FL}(L) \cdot f_{FV}(V) + f_P(L)] \quad (29)$$

其中 f_i^{\max} 是第 i 条眼外肌最大等长肌力,即肌纤维在无缩短或拉长状态下,能够产生的最大主动收缩力^[49]. $a_i \in [0, 1]$ 为肌肉激活度,取 0 表示肌肉完全放松,取 1 则表示肌肉完全被激活,产生最大等长肌力. f_{FL} 和 f_{FV} 分别是主动力—长度关系和主动力—速度关系, L 为肌肉长度, V 是肌肉收缩速度. f_P 是被动力—长度关系.

采用 Silva 与 Ambrósio^[50]总结的 f_{FL} 、 f_{FV} 和 f_P 关系如下:

$$f_{FL}(L) = \exp \left\{ \left[-\frac{9}{4} \left(\frac{L}{L_0} - \frac{19}{20} \right) \right]^4 - \frac{1}{4} \left[-\frac{9}{4} \left(\frac{L}{L_0} - \frac{19}{20} \right) \right]^2 \right\}$$

$$f_{FV}(V) = \begin{cases} 0, & -V_0 > V \\ -\frac{1}{\arctan(5)} \arctan\left(-5 \frac{V}{V_0}\right) + 1, & 0.2V_0 \geq V \geq -V_0 \\ \frac{\pi}{4\arctan(5)} + 1, & V > 0.2V_0 \end{cases}$$

$$f_p(L) = \begin{cases} 0, & -L_0 > L \\ 8\left(\frac{L}{L_0} - 1\right)^3, & 1.63L_0 \geq L \geq -L_0 \\ 2, & L > 1.63L_0 \end{cases} \quad (30)$$

其中, L_0 是最优肌纤维长度, 指肌纤维产生最大等长肌力时的静息长度; V_0 是最大肌纤维收缩速度, 即肌纤维离心收缩肌力降为 0 时对应的临界缩短速度. 6 条眼外肌的最大等长肌力^[12]、最优肌纤维长度和最大肌纤维收缩速度^[13]如表 3 所示.

表 3 眼外肌肌肉生物力学参数

Table 3 Muscle biomechanical parameters for the EOMs

EOMs	f^{\max}/mN	L_0/m	$V_0/(\text{m/s})$
MR	160.5	0.041	4.62
LR	150	0.049	3.85
SR	120	0.045	4.20
IR	145.5	0.046	4.14
SO	61.5	0.040	4.76
IO	57	0.041	4.59

在研究眼球的动力学时,除了眼外肌主动收缩及其被动弹性特性产生的肌力矩外,还需要考虑眼眶内 Tenon's 囊、视神经、脂肪垫和结膜等被动结缔组织产生的被动组织力矩 \mathbf{M}_{tis} , 其作用是当眼外肌放松时将眼球拉回第一眼位并保持稳定^[51]. 这个被动组织力矩 \mathbf{M}_{tis} 可以表示为

$$\mathbf{M}_{\text{tis}} = -k_p \mathbf{q} - k_c \mathbf{q}^3 - k_d \boldsymbol{\omega} \quad (31)$$

其中 $\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ 分别代表旋转角度和角速度; $k_p = 2.23 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$, $k_c = 34.53 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}^3$, $k_d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}/(\text{rad/s})$ ^[13].

静态优化算法由 Delp 等^[23]于 1990 年提出, 其认为骨骼肌内力分配仅由人体动力学状态如外力矩、关节姿态等决定^[22]. 由于肌肉激活是运动中代谢能耗的主要驱动因素^[52], 该算法将第 i 束肌肉激活度 a_i 的 p 次幂加权之和作为目标函数, 期望以最低能耗分配眼外肌力. 因此, 静态优化算法的数学模型写作如下形式:

$$\min J = \sum_{i=1}^{N_{\text{mus}}} \omega_i (a_i)^p$$

$$\text{s. t. } \mathbf{M}_{\text{dir}} + \mathbf{M}_{\text{tis}} = \mathbf{M}_{\text{inv}}$$

$$\mathbf{M}_{\text{dir}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{mus}}} (R_i \cdot f_i \cdot \frac{\mathbf{n}_i}{\|\mathbf{n}_i\|})$$

$$\mathbf{M}_{\text{inv}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$$

$$f_i = f_i^{\max} [a_i \cdot f_{\text{FL}}(L) \cdot f_{\text{FV}}(V) +$$

$$f_p(L)], \quad 0 \leq a_i \leq 1 \quad (32)$$

其中: N_{mus} 代表肌肉的数量, 取 $N_{\text{mus}} = 6$; ω_i 表示权重, 这里取单位 1; 激活度 a_i 是本优化模型的决策变量; p 在这里取 2, 该值在既往静态优化模型中被广泛采用^[53], 这一取值保证目标函数凸性, 使求解过程稳定且具有唯一解; \mathbf{M}_{dir} 是眼外肌力控制眼球运动产生的力矩; \mathbf{M}_{inv} 为逆向动力学求解得到的眼动力矩.

4 仿真结果和验证

4.1 接触缠绕模型对比

根据表 2 的起止点数据, 利用 Matlab R2021b 模拟眼外肌缠绕眼球, 如图 6 所示. 进而得到第一眼位姿态下的肌肉力线和力臂大小, 如表 4 所示.

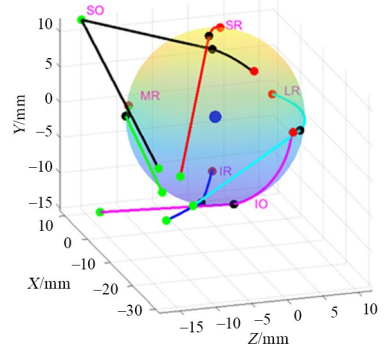
图 6 眼外肌缠绕眼球示意图
Fig. 6 EOMs surround the eyeball

表 4 眼外力线和力臂

Table 4 Geometry and moment arm for the EOMs

EOMs	Muscle fiber direction	Moment arm/mm
MR	$[-0.46, -0.81, 0.35]$	10.71
LR	$[-0.37, -0.88, 0.31]$	11.74
SR	$[-0.39, -0.83, 0.41]$	10.35
IR	$[-0.46, -0.85, 0.26]$	11.91
SO	$[-0.50, 0.36, 0.78]$	8.85
IO	$[-0.78, 0.60, -0.21]$	11.92

为定性验证眼外肌—眼球接触缠绕模型的合理性, 本文使用生物力学模拟软件 OrbitTM 1.8^[54] 对眼球及眼外肌相对位置做出对比模拟.

本文缠绕模型所得的右眼内直肌、外直肌和眼球相对位置俯视图如图 7(a) 所示, 圆形代表右眼球, 绿色点为起点, 红色线条为测地线法模拟的肌肉缠绕路径. 该结果清晰地再现了内外直肌的解

剖生理特征:内直肌起于 Zinn 总腱环内侧,向前内方延伸并附着于眼球鼻侧;外直肌起于 Zinn 总腱环外侧,向前外方延伸并止于眼球颞侧. 两条肌肉的路径均呈现出从眶后向前环绕眼球的自然弯曲形态. Orbit™ 1.8 模拟的相对位置图参考图 7(b), 蓝色球体代表眼球,左右两侧的条带分别是内直肌和外直肌,红色与青灰色分别代表肌肉与肌腱. 对比可见,本文模型所呈现的肌肉起止点位置、整体走向及与眼球的相对空间关系,与 Orbit™ 1.8 的模拟结果定性一致. 同理,上下直肌和上下斜肌的对比结果也具有定性一致性. 因此,本文构建的肌肉缠绕模型具有较高可信度.

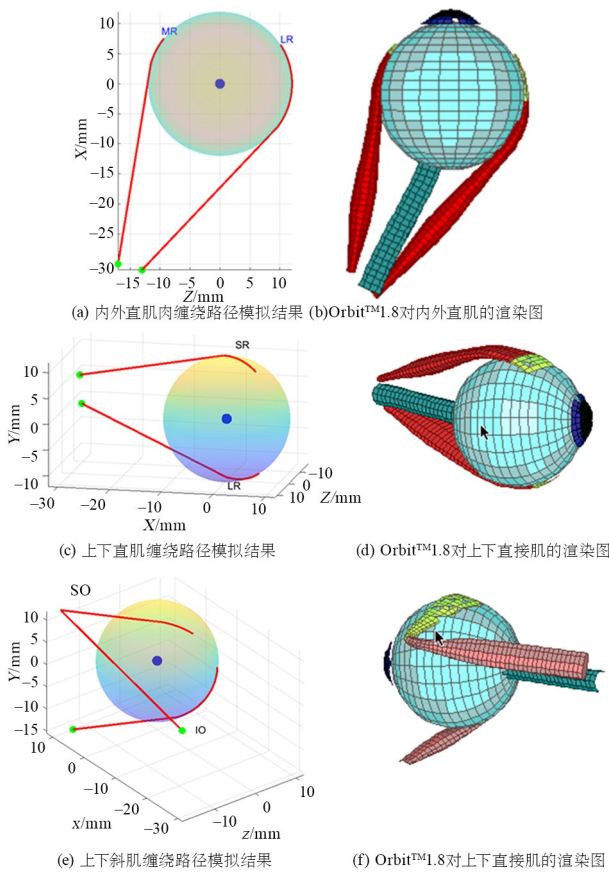


图 7 肌肉缠绕定性对比

Fig. 7 Qualitative comparison of muscle entanglement

为进一步对本文所建模型做定量验证,将模型输出的肌肉力臂与 Stanev 等^[13]在 OpenSim 中开发的动眼模型做对比. 图 8(a)和图 8(b)分别展示了眼球从鼻侧 40°向颞侧 40°水平转动的过程中,内直肌和外直肌力臂变化的对比结果. 可观察到本文模型计算的内外直肌力臂变化曲线与 OpenSim 模拟结果基本一致,均方根误差分别为 0.55 mm 和

0.15 mm,考虑到眼外肌力臂约为 12 mm,相对误差均低于 5%. 初步证明了本文建立的眼外肌—眼球接触缠绕模型和动态力臂模型的可靠性.

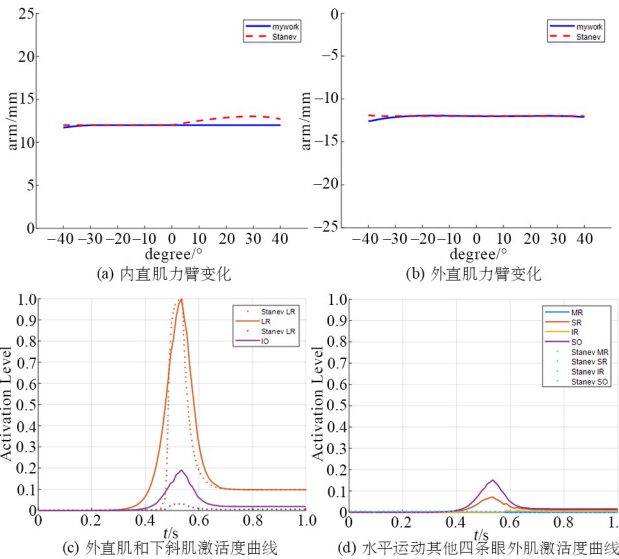


图 8 眼外肌激活度的定量验证

Fig. 8 Quantitative verification of EOMs activation

4.2 眼外肌力分配分析

为定量验证本文所提出的静态优化算法预测眼外肌激活模式的有效性,以右眼水平外展 15°作为验证工况^[11],将本文分析结果与 Stanev 等学者的仿真结果进行定量比较. 该运动场景如下:右眼从初始眼位向右偏离 15°,向上偏离 0°,即 $\varphi_1 = 0$, $\theta_1 = 15^\circ$ 时的眼动过程,分析该运动过程中各条眼外肌的激活度分布. 该运动模式对应斜视患者静息状态下右眼向右偏斜的情况,可将激活度最显著的眼外肌判断为导致该异常斜视眼位的发力肌肉,筛选为异常肌肉.

进一步分析右眼水平外展 15°过程中,6 条眼外肌激活度的变化情况. OpenSim 结果显示除外直肌 LR 和下斜肌 IO 外,其余 4 条眼外肌的激活水平均为 0. 外直肌 LR 和下斜肌 IO 的激活度对比结果如图 8(c)所示,外直肌 LR 作为主要的收缩肌,两种模型给出的激活度均随眼球外展而显著增加,且变化曲线高度吻合. 下斜肌 IO 的激活度在两者中均保持较低水平,说明本文模型能够准确捕捉主动肌的核心发力特征.

内直肌 MR、上直肌 SR、下直肌 IR 和上斜肌 SO 的激活水平如图 8(d)所示. 本文模型预测的 MR、SR、IR 和 SO 出现了轻微的激活,最高值为 0.15,而 OpenSim 的结果保持为 0. 从生理角度分

析,这种拮抗肌及相关肌群的轻微激活反映了眼球运动过程中肌群的协同策略,即主动肌发挥作用时,拮抗肌及相关肌群维持低水平激活^[55],以抵抗外界微小扰动(如头部轻微晃动).从力学角度分析,外直肌 LR 与下斜肌 IO 虽提供主要的水平转动力矩,但其力线方向及力臂分布不可避免地给其他两个方向带来较小投影.为了维持系统整体的力与力矩平衡,其余肌肉需产生小幅张力参与调节.因此,与 Stanev 等仿真结果相比,本文模型能够更精细地刻画多肌力矩耦合与姿态平衡机制.

5 结论

本文结合微分几何、李群和刚体动力学理论,建立了一个基于李群的眼外肌—眼球耦合系统动力学模型.主要结论如下:

(1)应用基于测地线原理的肌肉缠绕方法,构建了眼球曲面上的眼外肌缠绕路径计算方式,通过 OrbitTM1.8 和 OpenSim 软件对比证明了该方法的合理性.

(2)基于李群流形的微分几何结构,在 $SO(3)$ 群上建立了眼球定点转动满足的 Euler-Lagrange 方程组.

(3)在给定眼动下,本文设计静态优化算法,预测造成该姿态的眼外肌力分配.经 OpenSim 仿真验证,初步证明了该肌力分配模型的可靠性.

相较于 OrbitTM1.8 及 OpenSim 等现有仿真模拟软件,本文提出方法的突出优势如下:在运动学描述上,现有仿真工具常运用欧拉角建模,在描述眼球大范围转动时面临奇异性问题,本文将眼球的位形空间定义在 $SO(3)$ 群,在数学上避免了此类奇异性;在肌肉路径建模上,OpenSim 采用通过点法和几何包络^[56](如椭圆、圆柱)来近似肌肉路径,肌肉路径连续性依赖于离散点的数量与位置选取,本文基于测地线原理描述眼外肌—眼球缠绕路径,从几何层面保证了肌肉路径及其力臂在运动过程中的连续性与光滑性.

本文提出的基于李群的眼外肌—眼球耦合系统运动模型在临床和工程应用中具有潜在价值.对于斜视等眼外肌力失衡性疾病,本模型仅依赖患者静息状态下的视线偏斜角度,反解出与该偏斜最相符的肌力失衡模式,从而为异常肌肉初筛提供量化依据,有望辅助患者的术前评估及术式选择,减少

对术者经验的过度依赖.此外,该框架可扩展至人机工效评估等工程领域,例如可模拟长时间注视不同方位(如飞行员观察仪表、司机查看后视镜)时眼外肌激活与疲劳状态,为界面布局优化和视觉疲劳评估提供生物力学参考.

本文还存在局限之处:以最小能耗为目标的静态优化策略虽然能够较好地预测眼动的肌力分配,但是在快速扫视等时间受限的眼动任务中,人体需兼顾时间最短和肌力分配最优的多目标优化;建立眼外肌—眼球接触缠绕模型时,本文将眼外肌的路径简化为从固定起点出发的球面测地线,未考虑 Demer 等^[57]通过影像学研究揭示的滑车结构,该滑车结构会随着眼球的运动而前后移动,影响眼球运动时的力线方向和力臂.此外,眼球实际转动过程中其旋转中心可能发生微小偏移,这也会对眼外肌的力臂和力矩产生影响^[16].后续研究将考虑引入兼顾能耗与时间的多目标优化框架,引入动态滑车结构与眼球转动中心变化引起的复杂几何运动,并尝试将此研究从水平方向眼动扩展到水平、垂直方向眼动耦合,进一步研究眼外肌—眼球耦合系统的几何力学控制.

参考文献

- [1] 胡易东,童莉,高源龙,等.基于眼动信息的视觉交互技术研究进展[J].信息工程大学学报,2025,26(3):266-274.
HU Y D, TONG L, GAO Y L, et al. Survey of research progress in visual interaction technology based on eye movement information [J]. Journal of Information Engineering University, 2025, 26(3): 266-274. (in Chinese)
- [2] 刘忠义.人机协作对制造系统复杂性的影响研究[D].长春:吉林大学,2025.
LIU Z Y. Research on the influence of human-robot collaboration on manufacturing system complexity [D]. Changchun: Jilin University, 2025. (in Chinese)
- [3] JOHARI K, BHARDWAJ R, KIM J J, et al. Eye movement analysis for real-world settings using segmented linear regression [J]. Computers in Biology and Medicine, 2024, 174: 108364.
- [4] KRUNGKRAIPETCH L, KRUNGKRAIPETCH N, THREETONG T. A meta-analysis of associa-

- tion between strabismus in children/adolescents and risk of mental health disorders [J]. *Clinical Ophthalmology*, 2026, 19: 2333–2342.
- [5] 郭勇麟, 陈墨馨, 刘哲源, 等. 基于人工智能技术的斜视诊疗进展[J]. *上海交通大学学报(医学版)*, 2024, 44(3): 393–398.
- GUO Y L, CHEN M X, LIU Z Y, et al. Progress in diagnosis and treatment of strabismus based on artificial intelligence technology [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University (Medical Science)*, 2024, 44(3): 393–398. (in Chinese)
- [6] JOHN A, ALELUIA C, VAN OPSTAL A J, et al. Modelling 3D saccade generation by feedforward optimal control [J]. *PLoS Computational Biology*, 2021, 17(5): e1008975.
- [7] 张佳俊, 张舒, 徐鉴. 下肢康复外骨骼人机耦合动力学建模与控制 [J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(4): 55–63.
- ZHANG J J, ZHANG S, XU J. Human-machine coupled dynamic modelling and control of lower limb exoskeleton for rehabilitation [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(4): 55–63. (in Chinese)
- [8] 张稳, 吕阳, 徐鉴, 等. 基于库伦—粘性摩擦模型的大腿假肢动力学参数辨识[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(2): 68–76.
- ZHANG W, LV Y, XU J, et al. Dynamic parameter identification for an ankle-knee prosthesis with coulomb-viscous friction [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(2): 68–76. (in Chinese)
- [9] ROBINSON D A. A quantitative analysis of extraocular muscle cooperation and squint [J]. *Investigative Ophthalmology*, 1975, 14(11): 801–825.
- [10] SIMONSZ H J, SPEKREIJSE H. Robinson's computerized strabismus model comes of age [J]. *Strabismus*, 1996, 4(1): 25–40.
- [11] MILLER J M, ROBINSON D A. A model of the mechanics of binocular alignment [J]. *Computers and Biomedical Research*, 1984, 17(5): 436–470.
- [12] ISKANDER J, HOSSNY M, NAHAVANDI S, et al. An ocular biomechanic model for dynamic simulation of different eye movements [J]. *Journal of Biomechanics*, 2018, 71: 208–216.
- [13] STANEV D. Biomechanical simulation of virtual physiological humans: modeling of musculoskeletal kinematic and dynamic redundancy using coordinate projection methods [D]. Patras, Greece: University of Patras, 2018.
- [14] WEI Q, SUEDA S, PAI D K. Physically-based modeling and simulation of extraocular muscles [J]. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 2010, 103(2/3): 273–283.
- [15] WEI Q, MUTAWAK B, DEMER J L. Biomechanical modeling of actively controlled rectus extraocular muscle pulleys [J]. *Scientific Reports*, 2022, 12(1): 5806.
- [16] JAFARI S, PARK J, LU Y T, et al. Finite element model of ocular adduction with unconstrained globe translation [J]. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2024, 23(2): 601–614.
- [17] 何静. 眼外肌黏附行为及视神经对眼球运动作用的研究[D]. 太原: 太原理工大学, 2022.
- HE J. The effect of adhesion behavior of extraocular muscles and optic nerve on eye movement [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2022. (in Chinese)
- [18] 卢海, 万千, 王广志. 基于解剖数据建立人眼组织的三维有限元模型 [J]. *首都医科大学学报*, 2010, 31(1): 39–43.
- LU H, WAN Q, WANG G Z. Establishment of three-dimensional finite element model of human eye based on anatomical data [J]. *Journal of Capital Medical University*, 2010, 31(1): 39–43. (in Chinese)
- [19] WANG X, RUMPEL H, LIM W E H, et al. Finite element analysis predicts large optic nerve head strains during horizontal eye movements [J]. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 2016, 57(6): 2452–2462.
- [20] GRASA J, CALVO B. Simulating extraocular muscle dynamics. a comparison between dynamic implicit and explicit finite element methods [J]. *Mathematics*, 2021, 9(9): 1024.
- [21] KARAMI A, EGHTEHAD M. Simulation of active eye motion using finite element modelling [J]. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2018, 15: e24.
- [22] 郭建岍, 王言冰, 田强, 等. 人体肌骨的多柔体系统动力学研究进展[J]. *力学进展*, 2022, 52(2): 253–310.
- GUO J Q, WANG Y B, TIAN Q, et al. Advances in flexible multibody dynamics of human musculoskeletal systems [J]. *Advances in Mechanics*, 2022, 52(2): 253–310. (in Chinese)

- [23] DELP S L, LOAN J P, HOY M G, et al. An interactive graphics-based model of the lower extremity to study orthopaedic surgical procedures [J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1990, 37(8): 757–767.
- [24] GARNER B A, PANDY M G. Estimation of musculotendon properties in the human upper limb [J]. *Annals of Biomedical Engineering*, 2003, 31(2): 207–220.
- [25] SCHOLZ A, STAVNESS I, SHERMAN M, et al. Improved muscle wrapping algorithms using explicit path-error Jacobians. [C]//THOMAS F, PEREZ-GRACIA A. *Computational Kinematics, the 6th International Workshop on Computational Kinematics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013, 395–403.
- [26] SCHOLZ A, SHERMAN M, STAVNESS I, et al. A fast multi-obstacle muscle wrapping method using natural geodesic variations [J]. *Multibody System Dynamics*, 2016, 36(2): 195–219.
- [27] PENNER J, LEYENDECKER S. A discrete mechanics approach for musculoskeletal simulations with muscle wrapping [J]. *Multibody System Dynamics*, 2022, 56(3): 267–287.
- [28] LAVAILL M, CHEN X Y, HEINRICH S, et al. Muscle path predictions using a discrete geodesic Euler-Lagrange model in constrained optimisation; comparison with OpenSim and experimental data [J]. *Multibody System Dynamics*, 2025, 65(4): 621–643.
- [29] TANG Y, GUO J, TIAN Q, et al. Dynamic modeling of three-dimensional muscle wrapping based on absolute nodal coordinate formulation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(15): 13073–13093.
- [30] 杜鑫宇. 斜视眼位与眼外肌运动模型的有限元仿真研究 [D]. 重庆: 重庆理工大学, 2023.
- DU X Y. Finite element simulation of strabismus and extraocular muscle movement model [D]. Chongqing: Chongqing University of Technology, 2023. (in Chinese)
- [31] 陈维毅, 杨桂通, 吴文周. 人体眼球的运动模型及相应的动力学方程组 [J]. *中国生物医学工程学报*, 2000, 19(3): 266–271.
- CHEN W Y, YANG G T, WU W Z. Mechanical model of human eye and corresponding dynamic equations [J]. *Chinese Journal of Biomedical Engineering*, 2000, 19(3): 266–271. (in Chinese)
- [32] HASLWANTER T. Mathematics of three-dimensional eye rotations [J]. *Vision Research*, 1995, 35(12): 1727–1739.
- [33] TWEED D, VILIS T. Implications of rotational kinematics for the oculomotor system in three dimensions [J]. *Journal of Neurophysiology*, 1987, 58(4): 832–849.
- [34] ISKANDER J, HOSSNY M, NAHAVANDI S. A review on ocular biomechanic models for assessing visual fatigue in virtual reality [J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 19345–19361.
- [35] ATHUKORALLAGE B, GHOSH B K. Eye and head rotation control via feedback linearization [C]//2022 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies. New York: IEEE, 2022, 1, 1501–1505.
- [36] GHOSH B K, WIJAYASINGHE I B, KAHAGALAGE S D. A geometric approach to head/eye control [J]. *IEEE Access*, 2014, 2: 316–332.
- [37] GHOSH B K, ATHUKORALLAGE B. Minimum energy optimal external torque control of human binocular vision [J]. *Control Theory and Technology*, 2020, 18(4): 431–458.
- [38] NOVELIA A, O'REILLY O M. On the dynamics of the eye: geodesics on a configuration manifold, motions of the gaze direction and Helmholtz's theorem [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 80(3): 1303–1327.
- [39] POLPITIYA A D, DAYAWANSA W P, MARTIN C F, et al. Geometry and control of human eye movements [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(2): 170–180.
- [40] 刘家琦, 李凤鸣. 实用眼科学 [M]. 3版. 北京: 人民卫生出版社, 2010.
- LIU J Q, LI F M. *Practice of ophthalmology* [M]. 3rd ed. Beijing: People's Medical Publishing House, 2010. (in Chinese)
- [41] JOHN A, ALELUIA C, VAN OPSTAL A J, et al. Modelling 3D saccade generation by feedforward optimal control [J]. *PLoS Computational Biology*, 2021, 17(5): e1008975.
- [42] CHEN Z, FRANKLIN D W. Muscle moment arm-joint angle relations in the hip, knee, and ankle: A visualization of datasets [J]. *Annals of Biomedical Engineering*, 2025, 53: 1757–1776.
- [43] LEE T. *Computational geometric mechanics and control of rigid bodies* [D]. Michigan: University of

- Michigan, 2008.
- [44] MARSDEN J E, RATIU T S. Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems [M]. New York: Springer, 2013.
- [45] 黄子恒. 基于李群的多体系统动力学建模与计算 [D]. 北京:北京理工大学, 2021.
HUANG Z H. Dynamic modeling and computation of multibody systems based on Lie group [D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2021. (in Chinese)
- [46] RUTHS J, GHOSH B K. Helmholtzian strategy to stay in focus with binocular vision [C]//2018 European Control Conference (ECC). New York: IEEE, 2018: 2380—2386.
- [47] HILL A V. The heat of shortening and the dynamic constants of muscle [J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences, 1938, 126(843): 136—195.
- [48] ZAJAC F E. Muscle and tendon: properties, models, scaling, and application to biomechanics and motor control [J]. Critical Reviews in Biomedical Engineering, 1989, 17(4): 359—411.
- [49] ROCKENFELLER R, GÜNTHER M. How to model a muscle's active force-length relation: a comparative study [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 313: 321—336.
- [50] SILVA M P T, AMBRÓSIO J A C. Solution of redundant muscle forces in human locomotion with multibody dynamics and optimization tools [J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2003, 31(3): 381—411.
- [51] JAFARI S, HOLLISTER J, KAVEHPOUR P, et al. Shear viscoelastic properties of human orbital fat [J]. Journal of Biomechanics, 2024, 177: 112416.
- [52] PIMENTEL R E, PIEPER N L, CLARK W H, et al. Muscle metabolic energy costs while modifying propulsive force generation during walking [J]. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 2021, 24(14): 1552—1565.
- [53] WOCHNER I, DRIESS D, ZIMMERMANN H, et al. Optimality principles in human point-to-manifold reaching accounting for muscle dynamics [J]. Frontiers in Computational Neuroscience, 2020, 14: 38.
- [54] 高玮. 应用 OrbitTM1.8 眼外肌生物力学模型辅助非共同性斜视诊断和治疗的研究 [D]. 天津: 天津医科大学, 2003.
GAO W. Application of OrbitTM1.8 biomechanics simulation for incomitant strabismus diagnosis and treatment [D]. Tianjin: Tianjin Medical University, 2003. (in Chinese)
- [55] LATASH M L. The control and perception of antagonist muscle action [J]. Experimental Brain Research, 2023, 241(1): 1—12.
- [56] GARNER B A, PANDY M G. Estimation of musculotendon properties in the human upper limb [J]. Annals of Biomedical Engineering, 2003, 31(2): 207—220.
- [57] DEMER J L. The orbital pulley system: a revolution in concepts of orbital anatomy [J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 2002, 956(1): 17—32.