

基于悬臂谐振器的声子晶体双频拓扑波导研究^{*}

黄许飞 茅晓晨[†]

(河海大学 力学与工程科学学院, 南京 211100)

摘要 近年来,拓扑声子晶体的研究受到了广泛的关注.然而,由于结构尺寸和质量等因素的限制,低频范围内的拓扑波导的实现较为困难,而多频拓扑波导的研究更具挑战.本文基于谷霍尔原理提出了一种内嵌悬臂梁谐振器的新型声子晶体,通过打破空间反演对称解除狄拉克点的简并,实现了带隙的打开和双频拓扑波导.结果表明,随着悬臂梁长度差异的增大,两个带隙的宽度可分别增至 28 Hz 和 72 Hz.在此基础上,通过设计具有不同单胞的超胞结构和排列方式,可获得多种波导路径,如直角型和“+”型等.此外,弹性波也可在弯折后结构中沿不同单胞的边界传播.当弯折角度从 20°增至 40°时,波局域范围逐渐减小.本文的研究成果可为低频波导器件的设计提供新途径.

关键词 拓扑声子晶体, 谷霍尔效应, 能带结构, 波导

中图分类号:TB535

文献标志码:A

Research on Dual-Band Topological Waveguides in Phononic Crystals Based on Cantilever Resonators^{*}

Huang Xufei Mao Xiaochen[†]

(College of Mechanics and Engineering Science, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract In recent years, the investigations of topological phononic crystals have received considerable attention. However, due to the requirements of the structural dimensions, mass, and other factors, the realization of topological waveguides in the low-frequency range is difficult, and the research on multi-frequency topological waveguides is even more challenging. This paper proposes a novel phononic crystal with embedded cantilever-beam resonators based on the valley-Hall topological principle. By breaking spatial inversion symmetry, the degeneracy at the Dirac point is lifted, leading to the opening of bandgaps and dual-band topological waveguides. The results show that as the beam length difference increases, the low-frequency bandgap width and the high-frequency bandgap width increase to 28 Hz and 72 Hz respectively. Furthermore, by designing supercell structures with different unit cells and arranging them in specific configurations, different waveguide paths can be obtained, such as right-angle and “+”-shaped types. In the structure after bending, elastic waves can propagate along the boundaries between different unit cells. As the bending angle increases from 20° to 40°, the wave localization range gradually decreases. The obtained results of this paper can provide new strategies for the design of low-frequency waveguide devices.

Key words topological phononic crystals, valley Hall effect, band structure, wave guide

2025-11-11 收到第 1 稿,2025-12-10 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12172119); National Natural Science Foundation of China(12172119).

[†] 通信作者 E-mail:maochen@hhu.edu.cn

引言

波动调控在无损伤检测、医学成像、地质勘探等领域有着广泛的应用. 声子晶体的引入为实现更有效和更准确的波动调控提供了新的路径. 通过元胞设计和周期性/拟周期性排列, 声子晶体可实现滤波^[1]、聚能^[2]、负折射^[3]、信息处理^[4]、振动抑制^[5]等. 近年来, 拓扑声子晶体已成为人们关注的热点领域^[6], 可呈现出无散射、免疫缺陷等优异的特性. 在拓扑声子晶体中通过打破空间反演对称性, 量子谷霍尔效应可诱导受拓扑保护的边缘态. 边缘态可使波传输不受缺陷影响, 无外置物理场亦可实现波传播.

局域共振型声子晶体通常由具有局域共振单元的元胞周期性排列而成, 可实现低频范围的波导. Liu 等^[7]研究了一种含有双曲梁谐振器的声子晶体, 分析谐振器不同状态的切换对于拓扑性质的影响, 实现了 750~850 Hz 频率范围内的拓扑波导. Sun 等^[8]设计了一种嵌入两个六边形棱柱谐振器的声子晶体, 讨论了谐振器的质量变化对波导的影响, 实现了狄拉克锥的频率调节, 得到了 560~620 Hz 的波导. Chen 等^[9]研究了一种基于螺旋支撑结构的可调声子晶体, 分析了谐振器质量梯度增大对弹性波的影响, 实现了低频 245 Hz 左右的波导. Huang 等^[10]通过橡胶和金属组成谐振器, 考察了其拓扑负折射效应和波导鲁棒性, 得到了 6890 Hz 附近的波导. Chen 等^[11]在柔性环氧树脂框架中嵌入不对称铅制谐振器, 获得了低频 (<1000 Hz) 拓扑谷锁定波导.

近年来, 不同频段的波导研究日益受到重视. 林建华等^[12]基于矩形梁连接六边形棱柱设计了声子晶体梁结构, 分析了棱柱尺寸对拓扑相变的影响, 实现了多个分离频段拓扑边界态的弹性波传输. Chen 等^[13]提出了一种轻质正弦梁连接质量块的声子晶体, 研究了质量块的半径对狄拉克锥之间带隙的影响, 得到了低频 43~54 Hz 和 414~481 Hz 的波导. 在声子晶体板结构的研究方面, Chaunsali 等^[14]设计了一种螺栓—基板耦合的声子晶体板结构, 考察了重构基板螺栓的排布和拓扑波导之间的关系, 得到了双频段弹性边缘波, 并实现了弹性波频段的动态可调. Xu 等^[15]研究了一种嵌入三角形铅质棱柱谐振器的声子晶体板结构, 讨论了棱柱高度差对狄拉克点简并性的影响, 实现了

在低频范围内双频带拓扑保护边缘传输. Ni 等^[16]设计了一种基于双质量谐振器的声子晶体, 得到了拓扑保护的界面态.

本文提出了一种具有局域共振单元的谷霍尔声子晶体结构. 其中, 局域共振单元由三个对称分布的悬臂式谐振器组成. 首先, 研究了不同单胞的能带结构和位移场分布, 分析了悬臂梁长度差对带隙的影响. 在此基础上, 考察了超胞的能带结构, 探讨了多种声子晶体的波导特性, 得到了不同的波传播路径及其传输率, 讨论了结构弯折的声子晶体超胞的边缘态及其弹性波位移场分布.

1 模型

如图 1 所示, 单胞由基板和两组局域共振单元构成. 两组局域共振单元对称布置, 其中心位置分别位于菱形基板长对角线的 2 个三等分点上. 各组局域共振单元由 3 个附有圆柱状质量块的悬臂梁谐振器组成, 并呈空间对称分布. 圆孔半径 $R = 12$ mm, 左侧圆孔内的悬臂梁长均为 L_1 , 右侧圆孔内的悬臂梁长均为 L_2 , $L_1 = L_2 = 5.1$ mm. 各梁的宽度 $b = 3$ mm, 厚度 $h_1 = 3$ mm. 梁端部的圆柱质量块半径 $r = 2$ mm, 厚度 $h_2 = 24$ mm. 圆柱质量块的材料为铅, 密度 $\rho = 11\,300$ kg/m³, 杨氏模量 $E_1 = 17$ GPa, 泊松比 $\nu_1 = 0.33$. 各圆柱质量块的上下表面距离梁中心位置相同, 质量块横截面的圆心和圆形孔中心之间的距离为 3 mm. 基板材料为环氧树脂, 密度 $\rho = 1150$ kg/m³, 杨氏模量 $E_2 = 1$ GPa, 泊松比 $\nu_2 = 0.45$. 梁的材料和基板相同. 基板结构为菱形, 厚度 $h_1 = 3$ mm, 边长 $a = 50$ mm.

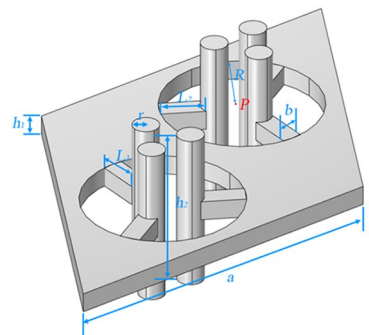


图 1 单胞示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the unit cell

2 能带结构

利用有限元软件 COMSOL Multiphysics 开展仿真建模和计算. 在图 1 所示单胞的四个边界设置

Floquet 周期性条件, 网格单元设置为四面体. 图 2 为单胞的能带结构图. 如图 2 所示, 在 $0 \sim 1000$ Hz 的频率范围内呈现出 2 个狄拉克简并点, 由红色三角形标记. 其中, 低频和高频区域中狄拉克点的频率分别为 161 Hz 和 847 Hz.

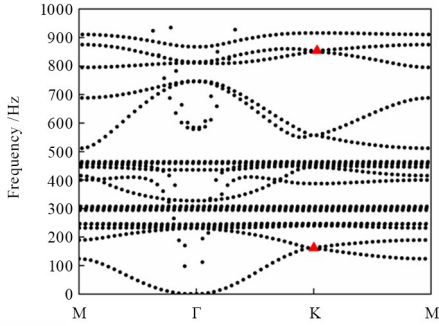


图 2 能带结构

Fig. 2 Band structure of the unit cell

为分析这两个简并点处的振动特征, 计算了相应的位移场, 如图 3 所示. 本文仅考虑面外振动. 由图 3 可知: 谐振器的振动明显, 而基板的振动相对较小. 这表明, 振动能量主要局域在谐振器内.

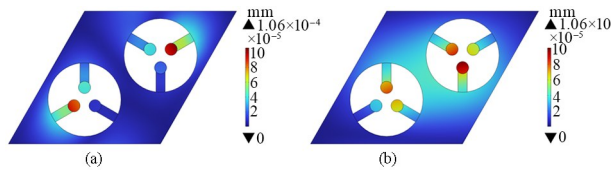


图 3 狄拉克点对应的位移场: (a) 第一个狄拉克点; (b) 第二个狄拉克点

Fig. 3 The displacement fields of two Dirac points: (a) The first Dirac point; (b) The second Dirac point

图 4 为当 $L_1 = 7.6$ mm 和 $L_2 = 0.5$ mm 时的能带结构. 此时的结构记为单胞 B, 而原结构记为单胞 A. 如图 4 所示, 单胞 B 的能带结构具有 4 个谷态, 分别对应狄拉克锥上的点 K_1 、 K_2 、 K_3 和 K_4 . 显然, 单胞 B 的狄拉克点打开, 带隙形成. 这主要是因为单胞 B 内两组悬臂梁的刚度差异, 打破了 C_{6v} 对称性.

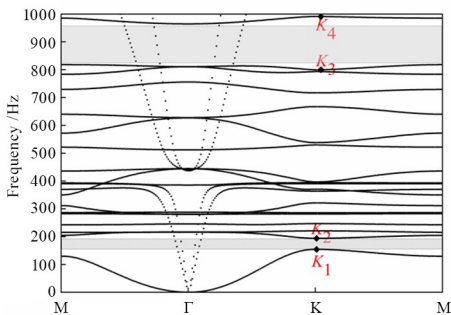


图 4 单胞 B 的能带结构

Fig. 4 Band structure of the unit cell B

图 5 为单胞 B 的位移场分布图, 其中箭头表示单胞内部的整体机械能流的方向. 由图 5 可知, K_1 点的位移场中, 左上方和右下方边界附近的机械能流旋转方向为顺时针; 而 K_2 点的位移场中, 左上方和右下方边界附近的机械能流旋转方向为逆时针. 此外, K_3 和 K_4 的位移场中也存在手性能量流. 因此, 相邻两个狄拉克锥上机械能流动具有旋转手性特征, 这是谷霍尔边缘态的重要特征^[13]. 从位移场分布可知, 结构振动主要集中在谐振器附近.

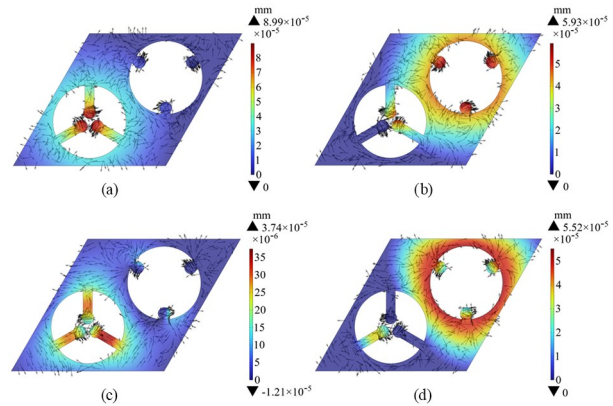
图 5 单胞 B 的位移场: (a) K_1 ; (b) K_2 ; (c) K_3 ; (d) K_4

Fig. 5 The displacement fields of the unit cell B:

(a) K_1 ; (b) K_2 ; (c) K_3 ; (d) K_4

图 6 为当 $L_1 = 0.5$ mm 和 $L_2 = 7.6$ mm 时单胞的能带结构. 此结构记为单胞 C. 单胞 C 的能带结构也具有 4 个谷态, 分别对应狄拉克锥上的点 K'_1 、 K'_2 、 K'_3 和 K'_4 . 通过比较图 4 和图 6 可知, 两个单胞的能带结构相似.

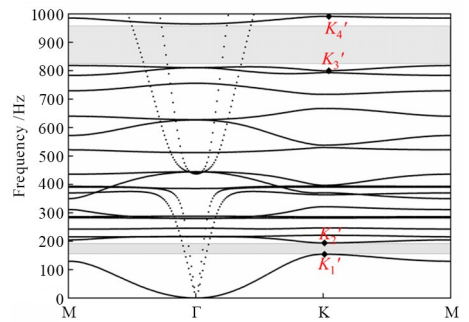


图 6 单胞 C 的能带结构

Fig. 6 Band structure of the unit cell C

图 7 为单胞 B 和单胞 C 在不同谷态情形下的位移场和相位分布图. 如图 7 所示, 单胞 B 的谷态 K_1 (K_2) 和单胞 C 的谷态 K'_2 (K'_1) 所对应的振动集中在左下方 (右上方) 谐振器附近; 单胞 B 的谷态 K_3 (K_4) 和单胞 C 的谷态 K'_4 (K'_3) 所对应的振动集中在左下方 (右上方) 谐振器附近. 这表明, 在单胞 B 与单胞 C 之间存在能带反转. 在相位分布图中,

红色箭头代表相位变化的涡旋方向^[11]. 单胞 B 和单胞 C 相邻谷态对应的相位涡旋旋转方向相反, 说明单胞 B 和单胞 C 之间发生了拓扑相变.

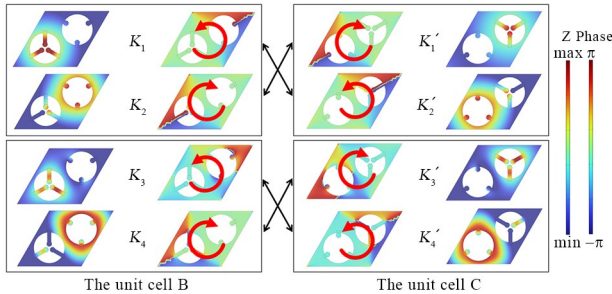


图 7 单胞 B 和单胞 C 在谷态处的位移场及其相位分布图
Fig. 7 Displacement fields and phase distribution diagrams of the unit cell B and the unit cell C at the valley state

下面考察谐振器梁长之差 $\Delta L = L_1 - L_2$ 对于带隙的影响. 当 $L_1 = 6.2 \text{ mm}$, $L_2 = 8.2 \text{ mm}$ 时, 则 $\Delta L = 2.0 \text{ mm}$. 此时, 狄拉克锥之间低频带隙为 $153 \sim 167 \text{ Hz}$, 高频带隙为 $831 \sim 875 \text{ Hz}$. 当 $L_1 = 5.2 \text{ mm}$, $L_2 = 8.2 \text{ mm}$, 则 $\Delta L = 3.0 \text{ mm}$, 狄拉克锥之间低频带隙为 $148 \sim 170 \text{ Hz}$, 高频带隙为 $818 \sim 892 \text{ Hz}$. 当 $L_1 = 4.2 \text{ mm}$, $L_2 = 8.2 \text{ mm}$ 时, 则 $\Delta L = 4.0 \text{ mm}$, 狄拉克锥之间低频带隙为 $148 \sim 176 \text{ Hz}$, 高频带隙为 $838 \sim 910 \text{ Hz}$. 随着梁长差值的增大, 狄拉克锥打开的带隙逐渐变宽. 低频范围带隙的宽度从 14 Hz 逐渐增长到 28 Hz , 而高频范围的带隙宽度从 44 Hz 增长到 72 Hz . 高频范围的带隙宽度增长量高于低频范围的带隙宽度增长量.

3 波传播路径

如图 8(a) 所示, 将 8 个单胞 B 和 8 个单胞 C 组建超胞 1. 超胞 1 的上下表面设置为自由边界, 沿着 x 方向在超胞 1 的左右两侧施加 Floquet 周期边界条件. 采用四面体网格单元, 网格大小为 0.00842 m . 图 8(b) 为超胞 1 的能带结构. 在超胞 1 的能带结构中有两条粗曲线, 这些线条为边缘态. 超胞 1 两条边缘态的频率范围分别为 $161 \sim 194 \text{ Hz}$ 和 $844 \sim 894 \text{ Hz}$. 图 8(c) 展示了超胞 1 在 189 Hz 和 855 Hz 对应边缘态的位移场. 显然, 能量主要集中在界面处.

通过改变单胞 B 和单胞 C 的上下顺序, 构造了超胞 2, 如图 9(a) 所示. 图 9(b) 为超胞 2 的能带结构, 其中两条边缘态对应的频率范围分别为 $135 \sim 200 \text{ Hz}$ 和 $839 \sim 872 \text{ Hz}$. 图 9(c) 展示了超胞 2 在 180 Hz 和 839 Hz 对应边缘态的位移场. 类似

于超胞 1, 能量也主要集中在两种声子晶体之间形成的界面处.

如图 10(a) 所示, 声子晶体 I 由 15×10 个单胞 B 和 15×10 个单胞 C 组成. 其中, 单胞 B 和单胞 C 分别位于上侧和下侧, 激励点位于 P_1 , 在右侧边界中心和上方区域的右侧边界中心分别设置响应点 Q_1 和 Q_2 . 为了抑制弹性波传递到边界产生的反射, 在四条边界上设置完美匹配层. 在左侧边界中点 P_1 施加垂直于结构的正弦点激励, 大小为 10 N . 图 10(b) 和图 10(c) 给出了激励频率为 170 Hz 和 870 Hz 的位移场. 显然, 弹性波可沿着不同单胞的边界传播, 远离边界处的振动较小. 相比低频时的弹性波能量, 高频弹性波能量向两侧衰减较快, 传播路径的宽度也更窄. 这种狭窄的传播路径使其其他

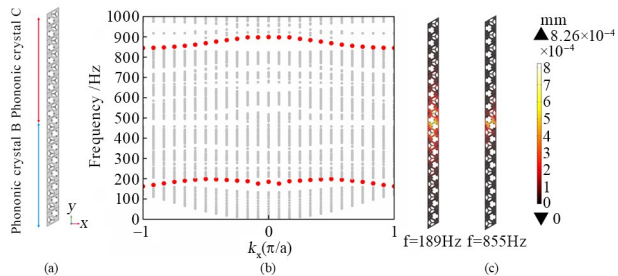


图 8 超胞 1 的示意图、能带结构和边缘态位移场:
(a) 模型图; (b) 能带结构; (c) 位移场

Fig. 8 Schematic diagram, band structure, and edge state displacement fields of the supercell 1: (a) Model; (b) Band structure; (c) Displacement fields

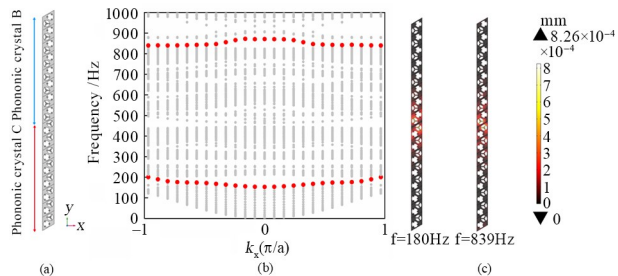


图 9 超胞 2 的示意图、能带结构和边缘态位移场:
(a) 模型图; (b) 能带结构; (c) 位移场

Fig. 9 Schematic diagram, band structure, and edge state displacement fields of the supercell 2: (a) Model; (b) Band structure; (c) Displacement fields

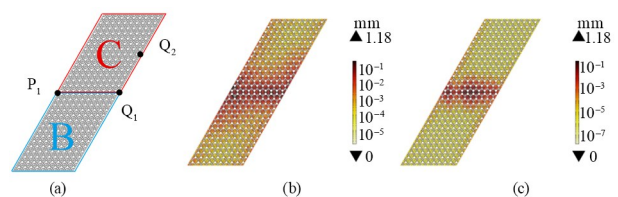


图 10 声子晶体 I 的示意图及其在不同外激励频率下的位移场:
(a) 模型图; (b) 170 Hz 时的位移场; (c) 870 Hz 的位移场
Fig. 10 Schematic diagram and displacement fields of the phonic crystal I under different excitation frequencies: (a) Model; (b) Displacement field for 170 Hz ; (c) Displacement field for 870 Hz

区域免受弹性波的影响. 边缘态允许弹性波沿着界面传播, 不允许波通过体态, 从而实现高效的传输效率.

下文采用传递率评估边缘态频率范围内弹性波传输水平. 传递率定义为: $T = 20 \lg |A_{\text{out}}/A_{\text{in}}|$, 其中 A_{out} 为响应点的振幅, A_{in} 为激励点的振幅. 在声子晶体 I 的左侧激励点 P_1 施加振幅为 0.1 mm 的正弦激励, 设置激励的频率范围分别为 100~200 Hz 和 800~900 Hz. 如图 11(a) 和图 11(b) 所示, 阴影区域对应于边缘态的频率范围, 从 P_1 到 Q_1 的传递率 T_1 为波导路径的传递率, 从 P_1 到 Q_2 的传递率 T_2 为非波导路径的传递率. 在边缘态频率范围内, T_1 显著大于 T_2 . 这表明弹性波能沿这两种声子晶体的界面传播.

如图 12(a) 所示, 声子晶体 II 由 18×20 个单胞组成, 其中, 12×10 个单胞 B 位于虚线框内, 而 6×20 个单胞 C 位于实线框内上方区域, 12×10 个单胞 C 位于实线框内下方区域, 结构左侧和下方两种声子晶体的分界点分别为 P_2 和 Q_3 , Q_4 位于结构中黑点处, 其中 P_2 为激励点, Q_3 和 Q_4 为响应点. 在图 12(a) 中, 在激励点 P_2 分别施加频率为 170 Hz 和 870 Hz 的正弦点激励可得到位移场分布图. 如图 12(b) 和图 12(c) 所示, 弹性波沿着单胞 B 和单胞 C 之间的边界传播, 路径呈直角型.

在声子晶体 II 的激励点施加振幅为 0.1 mm 的正弦激励, 设置激励的频率范围分别为 100~200 Hz 和 830~900 Hz. 弹性波从 P_2 传输到 Q_3 和 Q_4 的传输率如图 13(a) 和图 13(b) 所示, 其中阴影区域对应于边缘态频率范围. 从 P_2 到 Q_3 和 Q_4 的传输率分别为 T_3 和 T_4 . 在边缘态频率范围内, T_4 迅速减小, 而 T_3 基本保持平稳, 表明弹性波在边缘态频率范围内可以从 P_2 传输到 Q_3 .

如图 14(a) 所示, 将单胞 B 和单胞 C 进行对角布置可得到声子晶体 III. 其中, 9×10 个单胞 B 位于左下方线框内, 6×9 个单胞 B 位于右上方的线框内, 6×10 个单胞 C 位于左上方线框内, 9×9 个单胞 C 位于右下方的线框内. 位于声子晶体 III 左侧两种声子晶体边界处的 P_3 为激励点, Q_5 、 Q_6 、 Q_7 和 Q_8 为响应点. 其中, Q_5 、 Q_6 和 Q_7 均设置在其余三边的不同声子晶体分界处, Q_8 设置在图中黑点处. 在激励点 P_3 施加一个频率为 170 Hz 和 870 Hz 的正弦激励. 图 14(b) 和图 14(c) 为上述频

率下的位移场分布图. 由图 14(b) 和图 14(c) 可知: 弹性波在高频和低频区域的频率均可沿着不同单胞的多个边界传播, 传播路径呈现“+”型. 此外, 通过多个路径的传播可实现能量的分流, 通过多路径实现的能量分流有力地验证了拓扑波导不会因为路径的突变, 产生显著的背向散射, 体现拓扑波导的鲁棒性.

在声子晶体 III 的激励点 P_3 施加幅值为 0.1 mm 的激励, 激励频率设置为 100~200 Hz 和 800~900 Hz. 图 15(a) 和图 15(b) 为传递率结果图, 其中阴影区域为边缘态频率范围, 实线为 Q_5 和 P_3 之间的传递率 T_5 , 虚线为 Q_6 和 P_3 之间的传递率 T_6 , 点划线为 Q_7 和 P_3 之间的传递率 T_7 . 上述 3 条曲线为波导路径上的传递率. 短点划线为 Q_8 和 P_3 之间的传递率 T_8 , 对应于非波导路径的传递率. 在边缘态频率范围内, 波导路径上的传递率均高于非波导路径上的传递率.

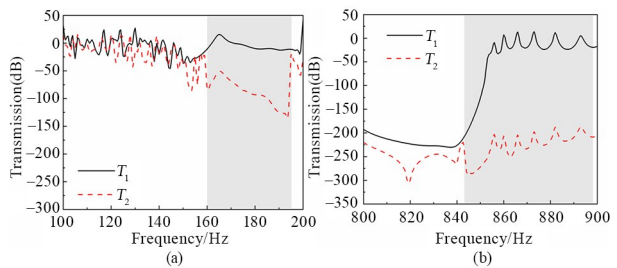


图 11 声子晶体 I 在不同频率范围内的传递率
Fig. 11 The transmissibility of the phononic crystal I for different frequency ranges

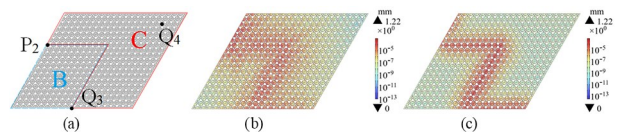


图 12 声子晶体 II 示意图及其在不同外激励频率下的位移场:
(a) 模型图; (b) 170 Hz 时的位移场; (c) 870 Hz 的位移场
Fig. 12 Schematic diagram and displacement fields of the phononic crystal II under different excitation frequencies:
(a) Model; (b) Displacement field for 170 Hz;
(c) Displacement field for 870 Hz

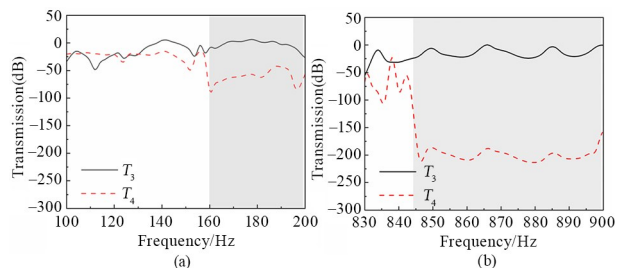


图 13 声子晶体 II 在不同频率范围的传递率
Fig. 13 The transmissibility of the phononic crystal II for different frequency ranges

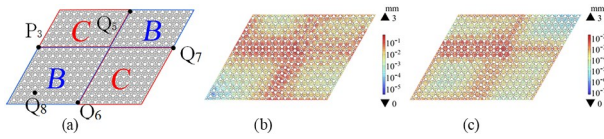


图 14 声子晶体 III 示意图及其在不同外激励频率下的位移场:

(a) 模型图; (b) 170 Hz 时的位移场; (c) 870 Hz 的位移场

Fig. 14 Schematic diagram and displacement fields of phononic crystal III under different excitation frequencies: (a) Model; (b) Displacement field for 170 Hz; (c) Displacement field for 870 Hz

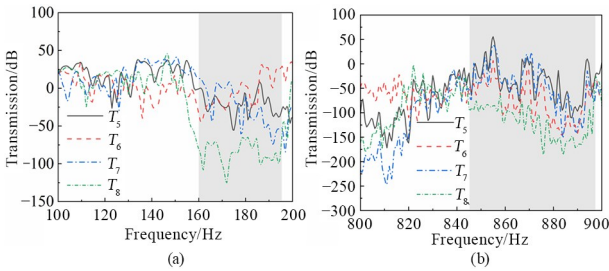


图 15 声子晶体 III 在不同频率范围的传递率

Fig. 15 The transmissibility of the phononic crystal III for different frequency ranges

为了考察弯折情形下的边缘态特性,将原超胞中不同单胞边界下侧区域绕 x 轴旋转可得到弯折后的结构,如图 16(a)所示.图 16(b)~(d)为弯折 20° 、 30° 和 40° 后超胞的能带结构.其中,粗曲线为边缘态.弯折 20° 时,边缘态频率为 $131 \sim 159$ Hz;弯折 30° 时,边缘态频率为 $124 \sim 162$ Hz;弯折 40° 时,边缘态频率为 $132 \sim 165$ Hz.因此,弯折角对边缘态频率具有一定的影响.通过对比不同弯折角度超胞的能带结构可知,弯折后结构的边缘态位置波动较小,均位于 160 Hz 附近.

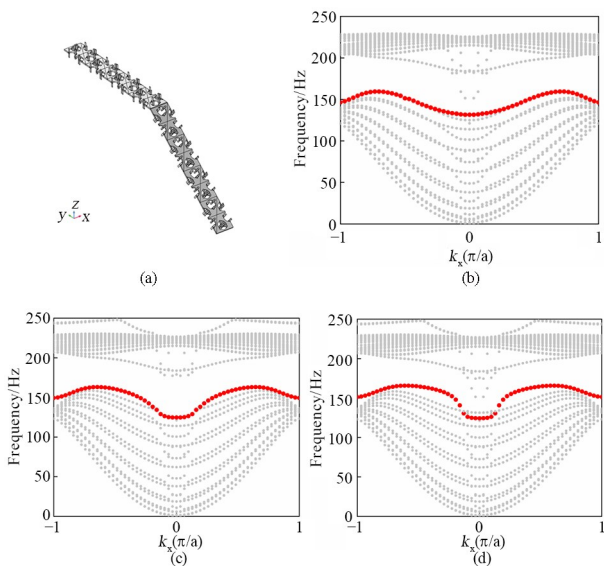


图 16 弯折后超胞的示意图及其不同角度超胞的能带结构:

(a) 模型图; (b) 20° ; (c) 30° ; (d) 40°

Fig. 16 The supercell model after bending and its band structures: (a) Model; (b) 20° ; (c) 30° ; (d) 40°

图 17 为弯折 20° 、 30° 和 40° 时超胞的位移场.显然,弹性波的振动主要集中在折角区域.随着弯折角的增大,弹性波被局域在折角区域的范围逐渐缩小.当弯折角度为 20° 时,弯折处附近的 14 个单胞振动较为明显,当弯折角度增加至 30° ,弯折处附近的 9 个单胞振动明显.当弯折角度增加至 40° 时,弯折处附近的 6 个单胞振动明显,超胞的振动范围逐渐缩小.因此,通过调整弯折角度可调控波导中弹性波的局域范围.

如图 18 所示,将 8 个超胞变形为弯折声子晶体 IV.在声子晶体 IV 的左侧施加垂直于 xoy 面的频率为 165 Hz 的正弦激励,可得到位移场分布图.显然,弹性波可沿着声子晶体 IV 中弯折边界传播.

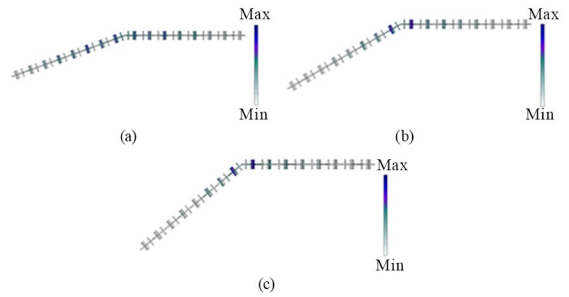


图 17 不同弯折角度下的超胞的位移场: (a) 20° ; (b) 30° ; (c) 40°

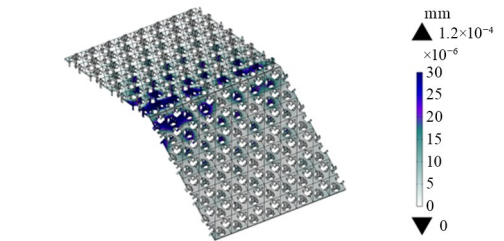


图 18 弯折角为 40° 时,声子晶体 IV 的位移场

Fig. 18 The displacement field of the phononic crystal IV when the bending angle is 40°

4 结论

本文研究了一种具有悬臂梁谐振器的拓扑声子晶体结构的波导特性.该结构含有两组局域共振单元,每组局域共振单元由 3 个悬臂梁谐振器组成,各个谐振器呈对称分布.首先,建立了单胞的有限元计算模型,得到了能带结构和位移场分布图,分析了狄拉克锥之间带隙的变化情况.随着梁长差值的增大,狄拉克锥打开的带隙逐渐变宽.低频范围带隙变化不明显,而高频范围的带隙增加明显.其次,通过组合不同单胞得到了超胞,分析了超胞的能带结构和边缘态.在此基础上,构建了多种声子

晶体结构,给出了在不同频率下的弹性波传播情况,得到了不同的波导路径,验证了拓扑波导的鲁棒性.此外,揭示了在弯折情况下的波传播情况和边缘态特性,通过增加弯折角度可缩小弹性波局域区域.

参考文献

- [1] WANG Z Y, YANG Y Z, LI H Y, et al. Multi-channel topological transport in an acoustic valley hall insulator [J]. *Physical Review Applied*, 2021, 15(2): 024019.
- [2] LI B S, CHEN H, XIA B Z, et al. Acoustic energy harvesting based on topological states of multi-resonant phononic crystals [J]. *Applied Energy*, 2023, 341: 121142.
- [3] ZHU R, LIU X N, HU G K, et al. Negative refraction of elastic waves at the deep-subwavelength scale in a single-phase metamaterial [J]. *Nature Communications*, 2014, 5: 5510.
- [4] 贾鼎, 葛勇, 袁寿其, 等. 基于蜂窝晶格声子晶体的双频带声拓扑绝缘体[J]. *物理学报*, 2019, 68(22): 224301.
- JIA D, GE Y, YUAN S Q, et al. Dual-band acoustic topological insulator based on honeycomb lattice sonic crystal [J]. *Acta Physica Sinica*, 2019, 68(22): 224301. (in Chinese)
- [5] 井亚彬, 刘汝盟, 王立峰. 纳尺度超材料研究进展[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(10): 5-17.
- JING Y B, LIU R M, WANG L F. Research progress on nanoscale metamaterials [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(10): 5-17. (in Chinese)
- [6] 陈治江, 章俊, 金晓清, 等. 一维拓扑声子界面态研究进展[J]. *动力学与控制学报*, 2025, 23(4): 1-15.
- CHEN Z J, ZHANG J, JIN X Q, et al. Research progress of one dimensional elastic topological interface state [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(4): 1-15. (in Chinese)
- [7] LIU X, CAI G P, WANG K W. Reconfigurable topologically protected wave propagation in metastable structure [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 492: 115819.
- [8] SUN X W, TAN M T, XU G G, et al. Sub-wavelength topological boundary states and rainbow trapping of local-resonance phononic crystal plate [J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2024, 57(22): 225302.
- [9] CHEN K K, DONG X J, PENG Z K, et al. Reconfigurable topological gradient metamaterials and potential applications [J]. *Thin-Walled Structures*, 2024, 205: 112572.
- [10] HUANG H B, HUO S Y, CHEN J J. Subwavelength elastic topological negative refraction in ternary locally resonant phononic crystals [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 198: 106391.
- [11] CHEN K K, DONG X J, GAO P L, et al. Multifunctional applications of topological valley-locked elastic waves [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 259: 108589.
- [12] 林建华, 毕仁贵, 唐诗瑶, 等. 基于弹性拓扑绝缘体的多频段谷锁定拓扑输运研究[J]. *物理学报*, 2025, 74(6): 064301.
- LIN J H, BI R G, TANG S Y, et al. Multiband valley-locked topological transport based on elastic topological insulator [J]. *Acta Physica Sinica*, 2025, 74(6): 064301. (in Chinese)
- [13] CHEN Z Y, MUHAMMAD, WANG X Y, et al. Low frequency topologically protected wave transport in sinusoidal lightweight acoustic metamaterials [J]. *Journal of Applied Physics*, 2021, 130(4): 045108.
- [14] CHAUNSALI R, CHEN C W, YANG J Y. Experimental demonstration of topological waveguiding in elastic plates with local resonators [J]. *New Journal of Physics*, 2018, 20(11): 113036.
- [15] XU G G, SUN X W, WEN X D, et al. Valley transport via dual-band elastic topological edge states in local-resonant phononic crystal plate [J]. *Journal of Applied Physics*, 2023, 133(9): 095110.
- [16] NI A C, SHI Z F. Topological metamaterial plates: Numerical investigation, experimental validation and applications [J]. *Engineering Structures*, 2023, 275: 115288.