

双层负刚度隔振系统低频性能优化及 舒适性评价研究*

黄磊 高芳清[†] 钱开开 李昊

(西南交通大学 力学与航空航天学院 先进结构材料力学行为与服役安全四川省重点实验室,成都 611756)

摘要 车辆、船舶、航空器等载运工具座椅的低频振动严重影响乘员舒适性与健康,搭载的精密仪器也需有效隔离微幅振动以保障其工作精度,传统线性隔振系统在低频段性能有限,难以满足高舒适性与高精度隔振需求.负刚度结构通过几何非线性实现高静刚度与低动刚度,可显著改善低频隔振性能.针对单层负刚度系统在抑制振动二次传递方面的不足,设计了一种双层负刚度隔振系统.基于谐波平衡法推导系统动力学方程,并通过数值方法验证解析结果的准确性.参数分析表明,系统在低频隔振性能上全面优于传统线性系统;在此基础上提出了基于加速度传递率峰值控制的精密设备隔振性能评价指标,以及考虑加权传递率均值的人体舒适度指标.研究结果可为载运工具座椅与精密仪器低频隔振新型系统设计提供理论依据与舒适性评价方法.

关键词 负刚度, 舒适性评价, 低频隔振, 传递率, 谐波平衡法

中图分类号:O322

文献标志码:A

Low-Frequency Performance Optimization and Comfort Evaluation of a Dual-Stage Negative Stiffness Vibration Isolation System*

Huang Lei Gao Fangqing[†] Qian Kaikai Li Hao

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Sichuan Key Laboratory of Mechanical Behavior and Service Safety of Advanced Structural Materials, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract Low-frequency vibrations of seats in vehicles, ships, aircraft, and other means of transportation severely affect the comfort and health of occupants. Additionally, the precision instruments precision instruments mounted on these platforms require effective isolation from micro-amplitude vibrations to ensure their operational accuracy. However, traditional linear vibration isolation systems have limited performance in the low-frequency range, making it difficult to meet the demands for high comfort and high-precision vibration isolation. Negative stiffness structures achieve high static stiffness and low dynamic stiffness through geometric nonlinearity, which can significantly improve low-frequency vibration isolation performance. To address the limitation of single-stage negative stiffness systems in suppressing the secondary transmission of vibrations, a dual-stage negative stiffness vibration isolation system is proposed. The dynamic equations of the system are derived based on the harmonic balance method, and the accuracy of the analytical results is verified through numerical methods. Parametric analysis shows that the system outperforms traditional linear systems in terms of low-frequency vibration isolation performance. On this basis, an evaluation index for the vibration isolation performance of precision equipment based on the peak control of acceleration transmissibility, together with a human comfort index considering the weighted mean of transmissibility, were proposed. The results provide a theoretical

2025-10-27 收到第1稿,2025-11-19 收到修改稿.

* 西南交通大学科技基金资助项目(VH8811065049);Southwest Jiaotong University Science and Technology Fund (VH8811065049).

[†] 通信作者 E-mail:gfq_vib@163.com

basis and a comfort evaluation method for the design of new low-frequency vibration isolation systems for seats and precision instruments in transportation systems.

Key words negative stiffness, comfort evaluation, low-frequency vibration isolation, transmissibility, harmonic balance method

引言

在车辆、船舶、航空器等载运工具运行中,座椅或敏感设备系统易受到常规隔振难以抑制的低频振动(通常低于 10 Hz)激励.这类振动不仅严重影响乘员的舒适性,长期暴露还会引发健康问题^[1];对于搭载的精密仪器而言,微幅振动也会导致测量误差或性能下降.因此,开发具有优异低频隔振性能的系统,提高低激励频率区域的隔振性能^[2-9],对提升乘坐舒适度与保障仪器精度具有重要意义.典型、常规的工程隔振方式常可等效为单自由度弹簧-质量系统,隔振效果仅在激励频率超过系统固有频率的 $\sqrt{2}$ 倍时才能体现,虽然降低系统刚度可减小固有频率,但也会导致承载能力下降,隔振性能具有明显局限性.

为克服传统隔振系统的局限,众多学者致力于开发新型隔振结构,其中负刚度结构(NSS)因能在不显著削弱静刚度的前提下实现极低的动刚度,受到广泛关注^[10-15].该结构通过负刚度元件与正刚度元件的耦合,同时实现高承载能力和低刚度特性,其本质是正刚度提供承载力、负刚度抵消正刚度以降低等效刚度的耦合效应.已有研究围绕单层负刚度系统展开多项改进:例如,Tian等^[15]提出凹形X形结构配合变节距弹簧,拓宽了准零刚度区间;Ji等^[16]结合永磁负刚度装置与位移放大机构,提升了线性负刚度范围;尹蒙蒙等^[17]提出将QZS弹簧组与X型剪式结构结合,设计出新型X型准零刚度隔振器(X-QZS),该结构通过QZS元件替换传统X型结构中的线性弹簧,利用X型框架的几何非线性放大了QZS的低刚度特性;Pu等^[18]则基于仿生原理提出结构简单、适应性强的准零刚度隔振器.这些研究显著提升了单层负刚度系统在低频隔振与高负载方面的性能.刘兴天等^[19]聚焦隔振对象重量波动($\pm 10\%$ 轻载/过载)对QZS隔振性能的影响,通过构建含欧拉屈曲梁负刚度调节机构的QZS系统,引入垂向平衡调节装置确保不同载荷

下系统仍能稳定于零刚度点.

然而,单层隔振系统在实际应用中仍存在局限,其假设下层质量体与基础刚性连接,无法有效抑制振动在结构内部的二次传递.为此,研究者逐渐将目光转向双层隔振结构,通过分层设计进一步拓展隔振频带,并结合负刚度机制增强低频性能.例如,Platus^[20]提出的负刚度机构被用于精密仪器的六自由度隔振系统;Wu等^[21]设计的平面磁弹簧实现了二维线性负刚度隔离;Zhao等^[22]则在高层建筑风振控制中优化了带负刚度的调谐惯容阻尼器参数.

在此背景下,本文提出一种双层负刚度隔振系统,该系统通过在上下两层分别引入由水平弹簧-滑块-连杆机构构成的负刚度单元,形成非线性刚度耦合机制.基于谐波平衡法,系统分析阻尼、刚度及关键结构参数对系统动态响应的影响,旨在拓展低频隔振带宽、抑制共振峰值,提升系统在车辆座椅、船舶座椅、航空座椅及精密仪器平台等多种载运与隔振场景中的适用性与舒适性.

1 双层负刚度结构系统

1.1 简化模型构建

经典的三弹簧负刚度隔振器构型如图1(a)所示,其中垂直方向的线性弹簧提供正刚度,两侧预压水平弹簧通过几何非线性产生负刚度效应,从而实现高静刚度与低动刚度的结合.为进一步增强对振动传递路径的控制,Le等^[23]提出采用斜杆与水平弹簧串联的连杆机构[图1(b)],通过机构放大作用实现对负刚度的灵活调控.

基于该思路,本文构建如图2所示的双层负刚度隔振系统,该系统在上下两层均布置负刚度机构,通过几何非线性耦合作用,进一步提升低频隔振性能并抑制二次振动传递.基于该构型,质量块 m_1 被限定在垂直平面内沿滑动面运动.初始状态下, m_1 和中间质量块 m_2 由垂直弹簧的压缩力与重力平衡维持静止,因此系统的承载能力仅取决于

垂直弹簧刚度及其初始变形量. 系统运行需满足三组弹簧始终处于受压状态. 当底座受激励时, 振动通过垂直弹簧和阻尼器传递至隔振设备, 质量块的振动幅值由该非线性隔振系统的刚度特性决定.

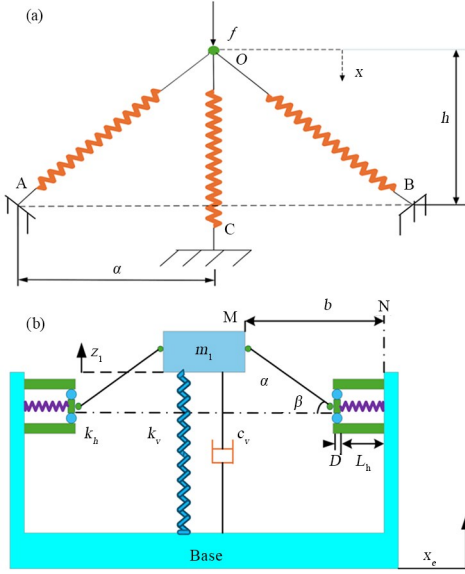


图1 单层隔振器模型: (a)经典三弹簧结构; (b)带连杆的三弹簧结构

Fig. 1 Single-layer vibration isolator models: (a) Classic three-spring structure; (b) Three-spring structure with connecting rod

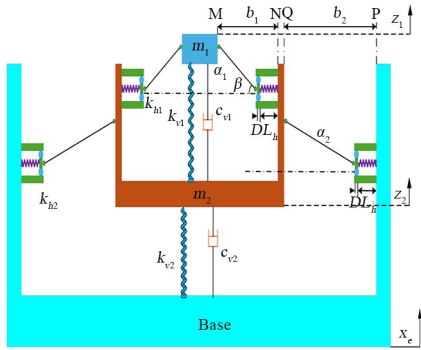


图2 双层负刚度结构隔振系统

Fig. 2 Double-layer negative stiffness structure vibration isolation system

设 m_1 与 m_2 之间的相对位移为 $z_1 = x_1 - x_2$, m_2 与底座间的相对位移为 $z_2 = x_2 - x_e$, 其中 x_1 是 m_1 的绝对位移, x_2 是 m_2 的绝对位移, x_e 是支座的位移. 在基础上施加小振幅低频基础激励 $x_e = X_e \cos(\omega t)$ 后 ($\omega < 10$ Hz), 从基础传递到 m_2 和基础所受的力分别为

$$\begin{cases} f_{v1}(z_1, \dot{z}_1) = c_{v1} \dot{z}_1 + k_{v1} z_1 + 2k_{h1} \left(\frac{b_1 - D}{\sqrt{a_1^2 - z_1^2}} - \frac{L_{h10}}{\sqrt{a_1^2 - z_1^2}} - 1 \right) z_1 \\ f_{v2}(z_2, \dot{z}_2) = c_{v2} \dot{z}_2 + k_{v2} z_2 + 2k_{h2} \left(\frac{b_2 - D}{\sqrt{a_2^2 - z_2^2}} - \frac{L_{h20}}{\sqrt{a_2^2 - z_2^2}} - 1 \right) z_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中, c_{v1} , k_{v1} 和 k_{h1} 分别是上层负刚度结构的竖直阻尼器的阻尼系数、竖直弹簧的刚度和水平弹簧的刚度, c_{v2} , k_{v2} 和 k_{h2} 分别是下层负刚度结构的竖直阻尼器的阻尼系数、竖直弹簧的刚度和水平弹簧的刚度, b_1 和 b_2 分别为 M 到 N 以及 Q 到 P 的距离, a_1 和 a_2 为上下层负刚度结构中连杆的长度, D 为与水平弹簧相连的滑块宽度, L_{h10} 和 L_{h20} 分别为上、下层水平弹簧的原长, L_{h1} 和 L_{h1} 则分别为上、下层水平弹簧在任意位置的长度.

1.2 系统静态特性分析

为了研究结构相关参数以及水平弹簧刚度与垂直弹簧刚度比值对双层负刚度结构系统刚度特性的影响, 以下分析以上层负刚度结构为例.

由式(1)可得上层负刚度结构的垂直恢复力 F_1 的表达式为:

$$F_1 = k_{v1} z_1 + 2k_{h1} \left(\frac{b_1 - D}{\sqrt{a_1^2 - z_1^2}} - \frac{L_{h10}}{\sqrt{a_1^2 - z_1^2}} - 1 \right) z_1 \quad (2)$$

引入以下无量纲参数: $\hat{F}_1 = F_1/k_{v1}L_{h10}$, $\hat{z}_1 = z_1/L_{h10}$, $\eta_{11} = a_1/L_{h10}$, $\eta_{12} = (b_1 - D)/L_{h10}$, $\kappa_1 = k_{h1}/k_{v1}$. 其中 \hat{F}_1 为无量纲恢复力, \hat{z}_1 为无量纲相对位移, η_{11} , η_{12} 为结构参数, κ_1 为水平弹簧刚度与垂直弹簧刚度比值. 则式(2)可改写为无量纲形式:

$$\hat{F}_1 = \hat{z}_1 + 2\kappa_1 \left(\frac{\eta_{12} - 1}{\sqrt{\eta_{11}^2 - \hat{z}_1^2}} - 1 \right) \hat{z}_1 \quad (3)$$

对上式关于无量纲相对位移 \hat{z}_1 求导可得上层结构的无量纲非线性刚度:

$$\hat{K}_1 = 1 + 2\kappa_1 \left[\frac{\hat{z}_1^2(\eta_{12} - 1)}{(\eta_{11}^2 - \hat{z}_1^2)^{3/2}} - \frac{(1 - \eta_{12}) + \sqrt{\eta_{11}^2 - \hat{z}_1^2}}{\sqrt{\eta_{11}^2 - \hat{z}_1^2}} \right] \quad (4)$$

令式(4)中 $\hat{z}_1 = 0$, 可得静力平衡位置的非线性刚度 (\hat{K}_{SEP1}):

$$\hat{K}_{SEP1} = 1 + 2\kappa_1 \left(\frac{\eta_{12} - \eta_{11} - 1}{\eta_{11}} \right) \quad (5)$$

图3展示了当参数 $\kappa_1 = 0.6$, $\eta_{11} = 1.2$ 且 η_{12} 取不同值时的无量纲非线性恢复力曲线以及非线性刚度曲线. 从图3(a)可明显观察到上层结构具有双稳态特性, 从图3(b)可看出, 当 $\eta_{12} > 1.0$ 时, 刚度曲线呈现凹抛物线形状, 其刚度最小值出现在静态平衡位置处, 且其值恒大于 -0.2 . 随着质量块逐渐偏移静平衡位置, 无量纲非线性刚度相比于静

平衡刚度渐增. 在该条件下, 系统的无量纲非线性刚度可分为下面三种情况: 第一, 当 $\eta_{12} > 2.2$ 时, 在静平衡位置处的无量纲非线性刚度大于 1. 从式(3)和式(4)可知, 具有 NSS 结构的系统的非线性刚度始终大于没有 NSS 结构的系统的刚度——后者由垂直弹簧和阻尼并联组成. 众所周知, 这样的单层线性隔振系统仅在高频激励下表现出良好的隔振性能, 而较低的刚度会产生更宽的隔振频带. 因此, 在这种条件下, 带有 NSS 的系统无法有效隔离低频振动. 第二, 当 $1 < \eta_{12} < 1.2$ 时, 在静平衡位置处的无量纲非线性刚度介于 -0.2 到 0 之间. 因为具有负刚度的系统不能承受载荷, 所以为了支撑载荷, 必须合理选择参数 κ_1 的取值, 以确保非线性刚度始终保持为正值. 例如, 当 $\kappa_1 = 0.6$, $\eta_{11} = 1.2$, $\eta_{12} = 1.1$ 时静平衡位置处的非线性刚度小于 0 , 如图 3(b) 所示; 而当 $\eta_{11} = 1.2$, $\eta_{12} = 1.1$, κ_1 减小到 $6/11$ 时, 如图 4(a) 所示, 可得到正刚度. 第三, 当 $1.2 < \eta_{12} < 2.2$ 时, 在静平衡位置处的无量纲非线性刚度介于 0 到 1 之间. 此外, 质量块远离静平衡位置的位移存在一个范围, 在这个范围内, 上层 NSS 结构系统的无量纲非线性刚度小于 1 . 在这一工况下, 可有效抑制双稳态带来的非期望跳变, 使得系统在工作位移区间内的等效刚度始终为正且远离零刚度的临界失稳点, 确保静态平衡位置的唯一性与稳定性. 这表明, 当质量块在这个工作位移范围内移动时, 该系统的非线性刚度 \hat{K}_1 要小于线性系统的刚度 k_{v1} . 所以与线性系统相比, 该结构的隔振范围更大.

当 $\eta_{12} < 1.0$ 时, 刚度曲线呈现凸抛物线形状, 其刚度最大值出现在静态平衡位置处, 如图 3(b) 所示. 随着参数 κ_1 的减小, 曲线峰值会向上移动. 当刚度

$$\begin{cases} f_{t1}(z_1, \dot{z}_1) = f_{d1} + f_{s1} \approx c_{v1} \dot{z}_1 + \left(k_{v1} - 2k_{h1} + 2k_{h1} \frac{b_1 - D - L_{h10}}{a_1} \right) z_1 + k_{h1} \frac{b_1 - D - L_{h10}}{a_1^3} z_1^3 \\ f_{t2}(z_2, \dot{z}_2) = f_{d2} + f_{s2} \approx c_{v2} \dot{z}_2 + \left(k_{v2} - 2k_{h2} + 2k_{h2} \frac{b_2 - D - L_{h20}}{a_2} \right) z_2 + k_{h2} \frac{b_2 - D - L_{h20}}{a_2^3} z_2^3 \end{cases} \quad (6)$$

其中, f_{d1} 和 f_{d2} 是线性阻尼力; f_{s1} 和 f_{s2} 是近似恢复力, 其几何非线性刚度分别取近似展开式为:

$$\begin{cases} k_{v1} z_1 + 2k_{h1} \left[\frac{b_1 - D}{\sqrt{a_1^2 - z_1^2}} - \frac{L_{h10}}{\sqrt{a_1^2 - z_1^2}} - 1 \right] z_1 \approx k_1 z_1 + k_{c1} z_1^3 \\ k_{v2} z_2 + 2k_{h2} \left[\frac{b_2 - D}{\sqrt{a_2^2 - z_2^2}} - \frac{L_{h20}}{\sqrt{a_2^2 - z_2^2}} - 1 \right] z_2 \approx k_2 z_2 + k_{c2} z_2^3 \end{cases} \quad (7)$$

式中: $k_1 = k_{v1} - 2k_{h1} + 2k_{h1}(b_1 - D - L_{h10})/a_1$, $k_2 = k_{v2} - 2k_{h2} + 2k_{h2}(b_2 - D - L_{h20})/a_2$, $k_{c1} = k_{h1}(b_1 - D - L_{h10})/a_1^3$, $k_{c2} = k_{h2}(b_2 - D - L_{h20})/a_2^3$.

比下降到足够小值时, 在静平衡位置附近的非线性刚度可保持正值, 如图 4(b) 所示. 然而, 当隔振设备偏离静平衡位置且 \hat{z}_1 足够大时, 非线性刚度会转为负值, 因此, 该工况无法用于设计提升隔振性能的系统.

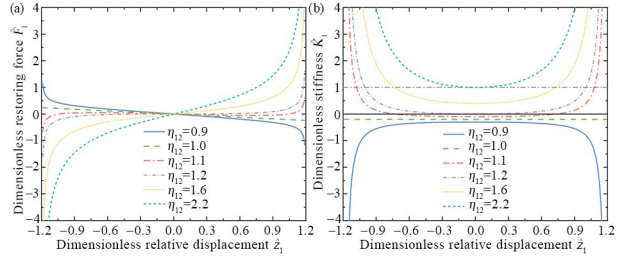


图 3 上层结构在 $\kappa_1 = 0.6$, $\eta_{11} = 1.2$, η_{12} 变化时的特性曲线图: (a) 无量纲恢复力关于无量纲相对位移曲线图; (b) 无量纲刚度关于无量纲相对位移曲线图

Fig. 3 Characteristic curves of the upper structure with varying η_{12} at $\kappa_1 = 0.6$ and $\eta_{11} = 1.2$: (a) Dimensionless restoring force versus dimensionless relative displacement curve; (b) Dimensionless stiffness versus dimensionless relative displacement curve

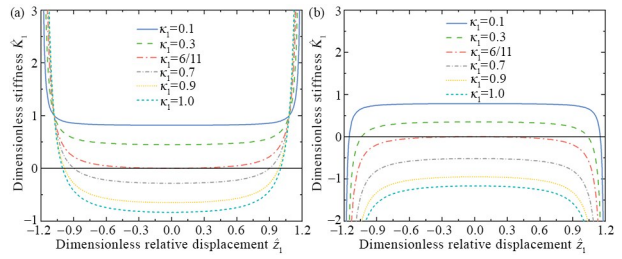


图 4 不同条件下的无量纲刚度关于无量纲相对位移曲线图: (a) $\eta_{11} = 1.2$, $\eta_{12} = 1.1$, κ_1 变化; (b) $\eta_{11} = 1.2$, $\eta_{12} = 0.9$, κ_1 变化
Fig. 4 Dimensionless stiffness versus dimensionless relative displacement curves under different conditions: (a) Variations of κ_1 at $\eta_{11} = 1.2$ and $\eta_{12} = 1.1$; (b) Varying κ_1 at $\eta_{11} = 1.2$ and $\eta_{12} = 0.9$

1.3 无量纲运动方程推导

当系统振动幅度较小时 ($|z_1| \ll 1$, $|z_2| \ll 1$), 则式(1)中的两个力可通过三阶泰勒级数展开式分别近似为:

则系统的运动方程可近似为:

$$\begin{cases} m_1(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 + \ddot{x}_e) + c_{v1}\dot{z}_1 + k_1 z_1 + k_{c1} z_1^3 = 0 \\ m_2(\ddot{z}_2 + \ddot{x}_e) + c_{v2}\dot{z}_2 + k_2 z_2 + k_{c2} z_2^3 - c_{v1}\dot{z}_1 - k_1 z_1 - k_{c1} z_1^3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

假设 $L_{h10} = L_{h20}$, 则上式可化简为无量纲形式:

$$\begin{cases} \ddot{\hat{z}}_1 + \ddot{\hat{z}}_2 + \hat{f}_{d1} + \hat{f}_{s1} = \Omega^2 \hat{X}_e \cos(\Omega\tau) \\ \mu \ddot{\hat{z}}_2 + \hat{f}_{d2} + \hat{f}_{s2} - \hat{f}_{d1} - \hat{f}_{s1} = \mu \Omega^2 \hat{X}_e \cos(\Omega\tau) \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\mu = m_2/m_1$, $\Omega = \omega/\omega_n$, $\tau = \omega_n t$, $\omega_n = \sqrt{k_{v1}/m_1}$, $\hat{z}_1 = z_1/L_{h10}$, $\hat{z}_2 = z_2/L_{h20}$, $\hat{X}_e = X_e/L_{h10} = X_e/L_{h20}$, $\zeta_1 = c_{v1}/2m_1\omega_n$, $\zeta_2 = c_{v2}/2m_1\omega_n$, $\kappa_1 = k_{h1}/k_{v1}$, $\eta_{11} = a_1/L_{h10}$, $\eta_{12} = (b_1 - D)/L_{h10}$, $\rho = k_{v2}/k_{v1}$, $\kappa_2 = k_{h2}/k_{v1}$, $\eta_{21} = a_2/L_{h20}$, $\eta_{22} = (b_2 - D)/L_{h20}$, $\hat{f}_{d1} = 2\zeta_1 \dot{\hat{z}}_1$, $\hat{f}_{s1} = \Omega_1^2 \hat{z}_1 + \gamma_1 \hat{z}_1^3$, $\hat{f}_{d2} = 2\zeta_2 \dot{\hat{z}}_2$, $\hat{f}_{s2} = \Omega_2^2 \hat{z}_2 + \gamma_2 \hat{z}_2^3$, $\Omega_1^2 = k_1/k_{v1} = 1 + 2\kappa_1[(\eta_{12} - 1)/\eta_{11} - 1]$, $\Omega_2^2 = k_2/k_{v1} = \rho + 2\kappa_2[(\eta_{22} - 1)/\eta_{21} - 1]$, $\gamma_1 = k_{c1}L_{h10}^2/k_{v1} = \kappa_1(\eta_{12} - 1)/\eta_{11}^3$, $\gamma_2 = k_{c2}L_{h20}^2/k_{v1} = \kappa_2(\eta_{22} - 1)/\eta_{21}^3$.

2 解析解推导与数值验证

2.1 一阶谐波平衡法

设式(9)的一次谐波近似解为

$$\begin{cases} \hat{z}_1(\tau) = \hat{Z}_1 \cos(\Omega\tau + \varphi_1) \\ \hat{z}_2(\tau) = \hat{Z}_2 \cos(\Omega\tau + \varphi_2) \end{cases} \quad (10)$$

无量纲阻尼力和恢复力的一次谐波近似分别为 $\hat{f}_{d1} \approx \hat{\alpha}_1(\hat{Z}_1) \sin(\Omega\tau + \varphi_1)$, $\hat{f}_{s1} \approx \hat{\beta}_1(\hat{Z}_1) \cos(\Omega\tau + \varphi_1)$, $\hat{f}_{d2} \approx \hat{\alpha}_2(\hat{Z}_2) \sin(\Omega\tau + \varphi_2)$ 和 $\hat{f}_{s2} \approx \hat{\beta}_2(\hat{Z}_2) \times \cos(\Omega\tau + \varphi_2)$. 其中 $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2$ 分别为 $\hat{f}_{d1}, \hat{f}_{s1}, \hat{f}_{d2}, \hat{f}_{s2}$ 在稳态响应时一次谐波分量的幅值, 可表示为:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1(\hat{Z}_1) \approx \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{d1}(\hat{z}_1, \dot{\hat{z}}_1) \sin(\Omega\tau + \varphi_1) d\tau \\ \hat{\beta}_1(\hat{Z}_1) \approx \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{s1}(\hat{z}_1, \dot{\hat{z}}_1) \cos(\Omega\tau + \varphi_1) d\tau \\ \hat{\alpha}_2(\hat{Z}_2) \approx \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{d2}(\hat{z}_2, \dot{\hat{z}}_2) \sin(\Omega\tau + \varphi_2) d\tau \\ \hat{\beta}_2(\hat{Z}_2) \approx \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{s2}(\hat{z}_2, \dot{\hat{z}}_2) \cos(\Omega\tau + \varphi_2) d\tau \end{cases} \quad (11)$$

将一次谐波近似解代入无量纲运动方程, 令等式两边 $\sin(\Omega\tau + \varphi_1), \cos(\Omega\tau + \varphi_1), \sin(\Omega\tau + \varphi_2)$ 和 $\cos(\Omega\tau + \varphi_2)$ 等各次谐波系数相等, 可得:

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{Z}_2 \Omega^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\Omega \hat{Z}_1} \dot{\hat{z}}_1(\tau) + \hat{f}_{d1} \\ &= -\frac{\Omega^2 \hat{X}_e \sin\varphi_1}{\Omega \hat{Z}_1} \dot{\hat{z}}_1(\tau) \\ & \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\hat{Z}_1} \dot{\hat{z}}_1(\tau) + \hat{f}_{s1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Omega^2 \hat{X}_e \cos\varphi_1}{\hat{Z}_1} \dot{\hat{z}}_1(\tau) \\ & - \frac{\hat{Z}_1 \Omega^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\Omega \hat{Z}_2} \dot{\hat{z}}_2(\tau) + \hat{f}_{d2} \\ &= -\frac{(1 + \mu) \Omega^2 \hat{X}_e \sin\varphi_2}{\Omega \hat{Z}_2} \dot{\hat{z}}_2(\tau) \\ & \frac{(1 + \mu) \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\hat{Z}_2} \dot{\hat{z}}_2(\tau) + \hat{f}_{s2} \\ &= \frac{(1 + \mu) \Omega^2 \hat{X}_e \cos\varphi_2}{\hat{Z}_2} \dot{\hat{z}}_2(\tau) \end{aligned} \quad (12)$$

结合无量纲阻尼力和恢复力以及一次谐波近似的表达式, 分别得到系统的阻尼力和恢复力的一次谐波分量的系数方程:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 \approx \Omega^2 X_e \sin\varphi_1 + \hat{Z}_2 \Omega^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \hat{\beta}_1 \approx \Omega^2 X_e \cos\varphi_1 + \Omega^2 [\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ \hat{\alpha}_2 \approx (1 + \mu) \Omega^2 X_e \sin\varphi_2 - \hat{Z}_1 \Omega^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \hat{\beta}_2 \approx (1 + \mu) \Omega^2 X_e \cos\varphi_2 + \Omega^2 (1 + \mu) \hat{Z}_2 + \Omega^2 \hat{Z}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \quad (13)$$

将公式(11)积分后代入公式(13)可得:

$$\begin{cases} -2\Omega\zeta_1 \hat{Z}_1 \approx \Omega^2 \hat{X}_e \sin\varphi_1 + \hat{Z}_2 \Omega^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \Omega_1^2 \hat{Z}_1 + \frac{3}{4} \gamma_1 \hat{Z}_1^3 - \Omega^2 \hat{Z}_1 \approx \Omega^2 \hat{X}_e \cos\varphi_1 + \hat{Z}_2 \Omega^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 2\Omega\zeta_2 \hat{Z}_2 \\ \approx (1 + \mu) \Omega^2 \hat{X}_e \sin\varphi_2 - \hat{Z}_1 \Omega^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \Omega_2^2 \hat{Z}_2 + \frac{3}{4} \gamma_2 \hat{Z}_2^3 - \Omega^2 (1 + \mu) \hat{Z}_2 \\ \approx (1 + \mu) \Omega^2 \hat{X}_e \cos\varphi_2 + \hat{Z}_1 \Omega^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \quad (14)$$

由于双层负刚度结构具有双稳态特性,因此谐波平衡法的解析解需通过稳定性判据判断是否为“真实稳态解”,从而识别两个稳定域内的稳定解与不稳定解,本文用构建雅可比矩阵(对位移、速度的偏导数矩阵),计算其特征值的方法进行辨别。若所有特征值的实部为负,解稳定;否则不稳定。而双稳

$$|T_r| = \frac{|\hat{x}_1 - \hat{x}_c|}{\hat{X}_e} = \frac{\sqrt{[\hat{Z}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{Z}_2 \sin(\varphi_2)]^2 + [\hat{Z}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{Z}_2 \cos(\varphi_2)]^2}}{\hat{X}_e} \quad (15)$$

基于人体低频振动舒适性的工程常识(如 ISO 2631-1 中“2~8 Hz 是人体坐姿舒适性最敏感的频率区间”),选取对应上述实际 2~8 Hz 的无量纲频率区间 $\Omega \in [1, 4]$ (以系统基准固有频率 $\omega_n = \sqrt{k_{v1}/m_1} = 2$ Hz 进行换算)作为舒适度评价的核心频段,定义该敏感频段加权传递率均值:

$$\hat{T}_w = \frac{\sum_{i=1}^n W_i T_r(\Omega_i)}{\sum_{i=1}^n W_i} \quad (16)$$

其中 Ω_i 为无量纲频率点; W_i 为固定权重系数,仅区分敏感频段内/外,在敏感频段内取 $W_i = 1$; $T_r(\Omega_i)$ 为无量纲频率 Ω_i 下的相对位移传递率。基于该舒适度评价指标,可直接通过参数变化下 \hat{T}_w 的“升降趋势”,判断舒适度优劣(\hat{T}_w 越小,舒适度

$$|T_a| = \frac{|\hat{x}_1^*|}{|x_c^*|} = \frac{\sqrt{[\hat{Z}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{Z}_2 \sin(\varphi_2)]^2 + [\hat{Z}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{Z}_2 \cos(\varphi_2)]^2}}{\hat{X}_e} \quad (17)$$

2.2 数值验证

本文近似推导了相对位移传递率的解析结果,为验证谐波平衡法能否准确捕捉所选参数的动力学特性,图 5(a)和(b)分别绘制了上下两层质量的幅频响应曲线(AFRC),并与四阶 Runge-Kutta 法向前和向后扫频数值计算的结果进行对比,参数设置为 $\zeta_1 = 0.04, \zeta_2 = 0.08, \kappa_1 = 0.6, \kappa_2 = 0.8, \eta_{11} = 1.2, \eta_{12} = 1.4, \eta_{21} = 1.3, \eta_{22} = 1.5, \mu = 0.3, \rho = 1.5, X_c = 0.4$ 。其中数值扫频方法得到的在位移激励下系统的上下层相对位移峰值约为一阶谐波平衡法所得峰值的 80%,表明两者具有合理的一致性,因此谐波平衡法可用于后续动力学行为的深入研究。

图 6 对比了双层 NSS 中被隔振物体 m_1 相对于基础的位移幅值($\hat{z}_1 + \hat{z}_2$)与单层 NSS 中被隔振物体相对于基础的位移幅值,其中双层 NSS 中的无量纲参数与图 5 中一致,单层 NSS 中的无量纲参数与上层结构一致。如图所示,双层 NSS 结构具

态系统的稳态切换本质是解分支的跳变,当外激励的幅值或频率变化时,解会在稳定分支的“临界点”发生跳变,实现两个稳定平衡点之间的切换。(例如幅频响应曲线的跳跃现象)

基于以上推导,该系统的相对位移传递率的表达式可简化为:

越好)。

机械精密仪器(如三坐标测量机、激光微加工机与半导体光刻机)的精度误差,本质上更易受振动加速度影响,而非位移。位移扰动主要反映位置偏移,而加速度扰动直接关联惯性力,会引发仪器内部组件(如传感器)之间的相对振动与应力波动,从而导致测量失准或功能失效,此类仪器的敏感频率区间多为 5~50 Hz(换算为无量纲频率则为 2.5~25)。例如半导体光刻机要求在上述频段内,加速度传递率 ≤ 0.05 。故可采用核心频段内上层质量绝对加速度传递率峰值 $T_{a,\max}$ 作为评价精密仪器隔振性能的指标,其中上层质量绝对加速度传递率的表达式为:

备比单层结构更小的位移幅值以及更低的共振频率,表现出更优异的低频隔振性能。

为进一步验证本文双层负刚度结构的低频隔振性能的优越性,在等参条件下,与 Zeng 等^[24]提出的传统双层准零刚度系统(DLQZS)以及吴维雷^[25]在其博士论文中提出的双层几何非线性隔振系统(DLNIS)的相对位移传递率曲线进行了对比,如图 7 所示。本文提出的双层负刚度结构系统的起始隔振频率(相对位移传递率首次小于 1 对应的频

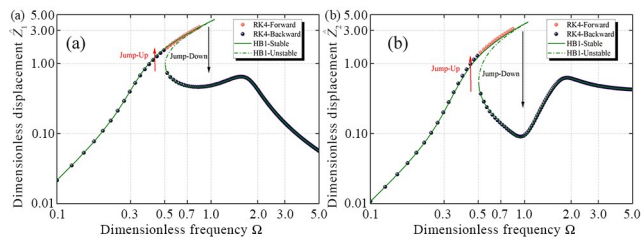


图 5 一阶 HBM 与数值方法间相对位移传递率的对比分析:
(a) m_1 的相对位移; (b) m_2 的相对位移

Fig. 5 Comparative analysis of relative displacement transfer rate between first-order HBM and numerical methods: (a) Relative displacement of m_1 ; (b) Relative displacement of m_2

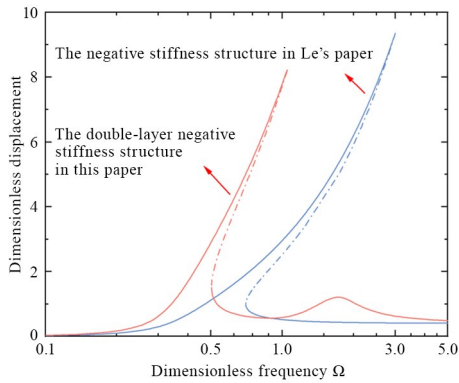


图6 振幅对比(蓝色线条表示单层NSS的振幅,红色线条表示双层NSS的上层振幅)

Fig. 6 Amplitude comparison (the blue line represents the amplitude of the single-layer NSS, and the red line represents the upper-layer amplitude of the double-layer NSS)

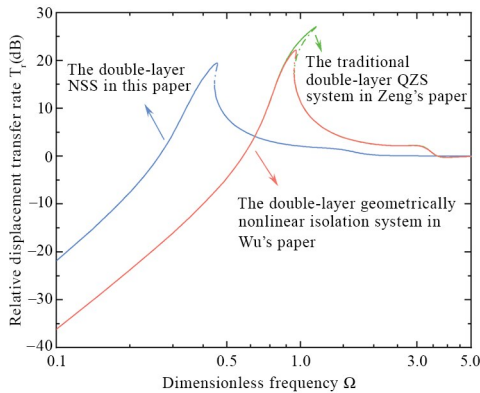


图7 不同双层结构隔振系统相对位移传递率对比

Fig. 7 Comparison of relative displacement transmission rates of different double-layer structural vibration isolation systems

率)约为1.619,传递率峰值约为19.433,相对于DLQZS系统和DLNIS系统,双层负刚度结构系统的起始隔振频率分别降低约52.59%和52.52%,传递率峰值分别减小约28.23%和12.19%。

3 不同参数的分析

3.1 阻尼参数

图8(a)展示了上层阻尼对系统传递率的影响。随着阻尼增大,共振峰值显著降低,但隔振带宽相应收窄。除极弱阻尼情况外,双层负刚度系统在所有阻尼配置下均优于传统线性系统。图8(c)进一步表明,上层阻尼在核心频段内对加权传递率以及加速度传递率峰值的影响均呈单增趋势,即随阻尼增大,对人体舒适度的贡献降低,对精密设备的保护程度降低。下层阻尼的变化趋势与上层类似[图8(b)(d)],但需要指出的是存在一个对人体最佳舒适度的下层阻尼比($\zeta_2 = 0.12$),而对精密设备

的保护始终程度处于较好范围(<0.05)。

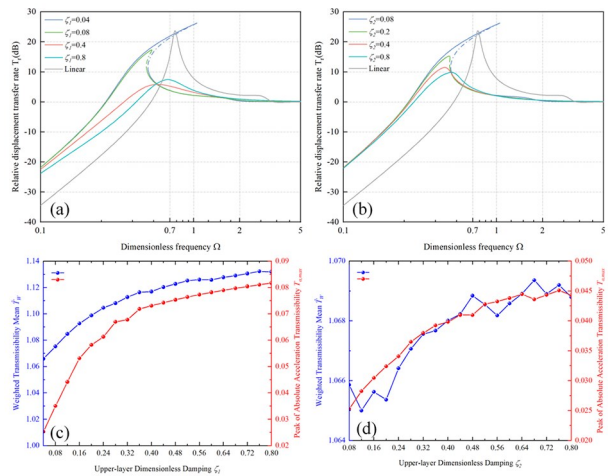


图8 阻尼对相对位移传递率及乘坐舒适度的影响:(a)(b)仅改变上层阻尼;(c)(d)仅改变下层阻尼(灰色线条表示仅具有垂直刚度与阻尼的线性隔振器)

Fig. 8 Effects of damping on relative displacement transmissibility and ride comfort; (a)(b) Only the upper-layer damping is changed; (c)(d) Only the lower-layer damping is changed (the gray lines in the figure represent linear vibration isolators with only vertical stiffness and damping)

3.2 刚度参数

图9(a)展示了通过改变上层水平刚度对位移传递率的影响,如图所示,上层水平刚度增大可显著拓宽隔振带宽,但共振峰值略有上升。当 $\kappa_1 < 0.1$ 时,系统性能全面优于线性系统。图9(d)显示,上层刚度比对人体舒适度的贡献在 $\kappa_1 = 0.6$ 附近达到峰值,对精密设备的保护程度随刚度比增大而升高。下层水平刚度的影响趋势与上层一致,在 $\kappa_2 = 0.85$ 附近对人体舒适度的贡献达到峰值[图9(b)(c)]。垂直刚度比的调整对系统性能影响显著[图9(c)]:当上层垂直刚度大于下层时,共振峰极低但带宽狭窄;当比值大于1时,共振峰渐增而带宽渐减,而图9(f)显示,垂直刚度比对人体舒适度的影响呈现非线性变化,在 $\rho = 1.5$ 附近对人体舒适度的贡献达到峰值,随刚度比增大对精密设备的保护程度降低。

3.3 结构参数

图10(a)展示了通过改变上层连杆长度对位移传递率的影响,如图所示,上层连杆长度增加可有效降低共振峰值并拓宽隔振带宽,在 $\eta_{11} > 1.3$ 时系统性能全面优于线性系统。上层连杆长度在核心频段内对加权传递率以及加速度传递率峰值的影响均呈单减趋势,即随连杆长度增加,对人体舒适

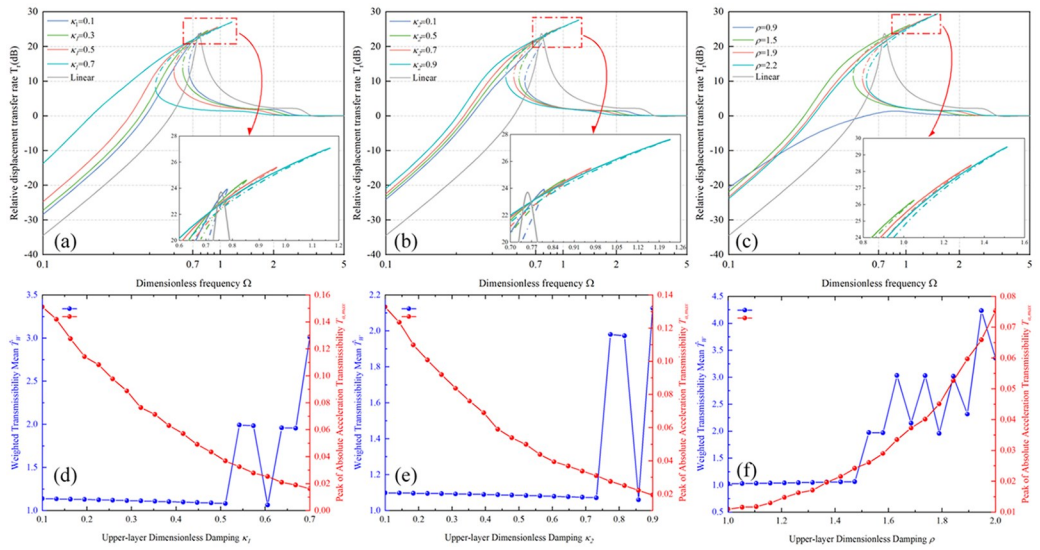


图 9 刚度变化对相对位移传递率及乘坐舒适度的影响: (a)(d) 仅改变上层非线性刚度; (b)(e) 仅改变下层非线性刚度; (c)(f) 仅改变垂直线性刚度比

Fig. 9 Effects of stiffness change on relative displacement transmissibility and ride comfort: (a)(d) Only the upper-layer nonlinear stiffness is changed; (b)(e) Only the lower-layer nonlinear stiffness is changed; (c)(f) Only the vertical linear stiffness ratio is changed

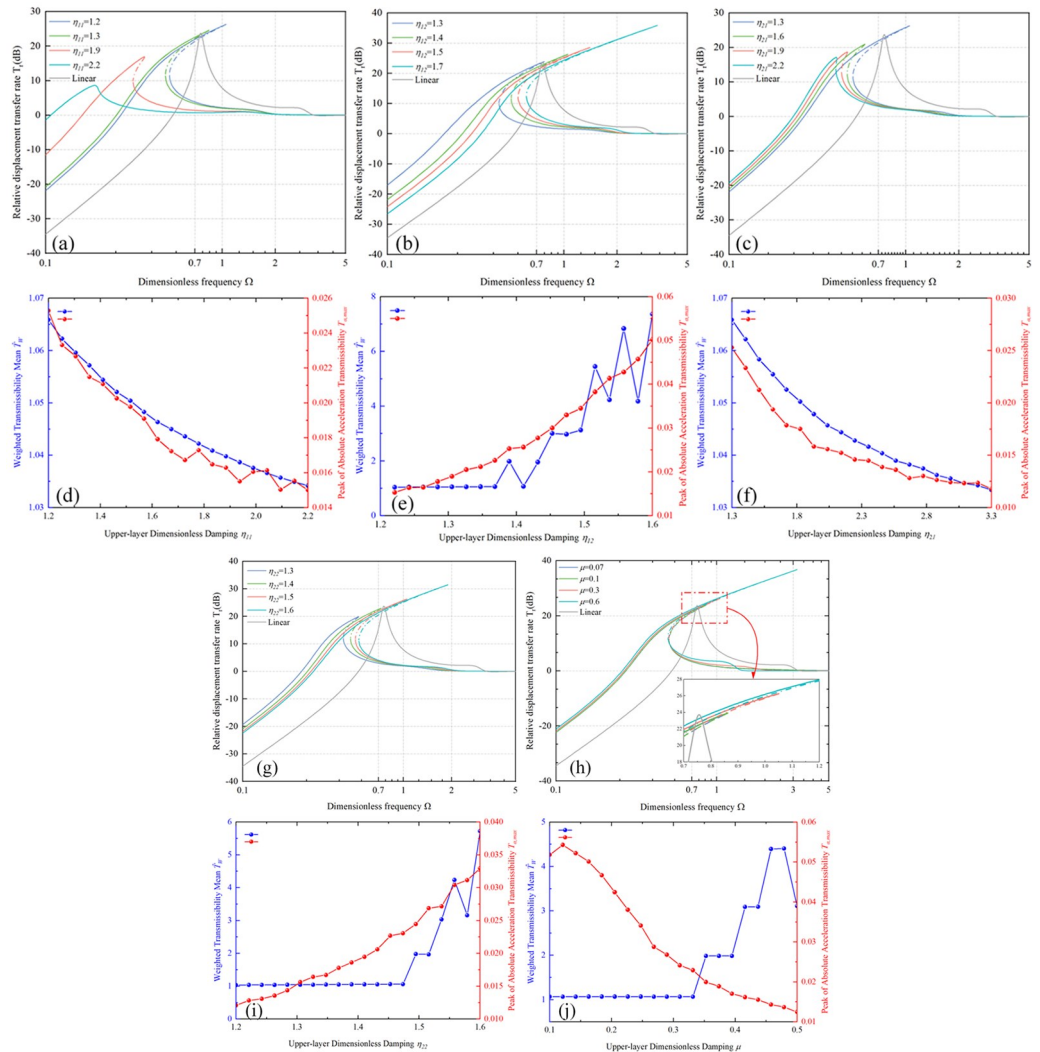


图 10 结构变化对相对位移传递率影响及乘坐舒适度的影响: (a)(d) 仅改变上层连杆长度; (b)(e) 仅改变 MN 长度; (c)(f) 仅改变下层连杆长度; (g)(i) 仅改变 QP 长度; (h)(j) 仅改变质量比

Fig. 10 Effects of structural change on relative displacement transmissibility and ride comfort: (a)(d) Only the length of the upper connecting rod is changed; (b)(e) Only the length of MN is changed; (c)(f) Only the length of the lower connecting rod is changed; (g)(i) Only the length of QP; (h)(j) Only the mass ratio is changed

度提高,对精密设备的保护程度提高[图 10(d)]. MN 距离增大导致共振峰上升与带宽收窄[图 10(b)],其在 $\eta_{12} = 1.4$ 附近对人体舒适度的贡献最大,而对精密设备的保护程度虽然随 MN 距离增大而降低,但始终处于较好范围(<0.05) [图 10(e)]. 下层连杆与 QP 距离的影响趋势与上层类似,需要指出的是在 $\eta_{22} = 1.5$ 附近对人体的舒适度贡献最大[图 10(c)(f)(g)(i)]. 质量比对系统性能影响较弱,仅在极小质量比(<0.07)时略优于线性系统,整体波动幅度小于 5% [图 10(h)]. 图 10(j)进一步表明,质量比在核心频段内对加权传递率的影响呈非线性变化,需要指出的是当 $\mu = 0.35$ 时,对人体的舒适度贡献最大;对加速度传递率峰值的影响呈单减趋势,对精密设备的保护始终程度处于良好范围(<0.06).

4 结论

本文通过理论建模与数值仿真,系统研究了阻尼、刚度及结构参数对双层负刚度隔振系统动态特性的影响. 研究结果表明,该系统在低频小振幅激励下,在所有参数配置下均表现出优于传统双层线性隔振系统的综合性能. 尽管在部分参数组合下共振峰值略高于线性系统,但其在拓宽隔振带宽、提升隔振平稳性方面具有显著优势.

参数分析表明:阻尼参数对共振抑制与带宽调节具有关键作用,存在最优阻尼值以实现最佳舒适度;刚度参数中,非线性刚度主要影响隔振带宽,而垂直刚度比则需在共振控制与带宽之间取得平衡;结构参数如连杆长度和关键点间距对系统性能具有明显调控效果,而质量比的影响相对有限.

本研究验证了双层负刚度结构在低频振动隔离中的有效性与工程潜力,为车辆、船舶、航空器等载运工具座椅,精密仪器平台等多级隔振系统的参数优化与舒适性设计提供了理论依据与方法支持.

后续研究将针对所提出的双层负刚度结构开展振动台试验,通过实测数据验证前文基于理论推导得到的力学特性预测结果(如传递率特性),进一步检验系统设计的合理性与理论模型的准确性,为研究成果的完善提供坚实的实验支撑.

参考文献

[1] PADDAN G S, GRIFFIN M J. Evaluation of whole-

- body vibration in vehicles [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 253(1): 195–213.
- [2] LIANG J S, LIU Z, CHANG B L. Simulation analysis of a three-degree-of-freedom low-frequency resonant mixer [J]. *Applied Sciences*, 2025, 15(9): 4861.
- [3] QIN Y X, PANG F Z, TANG Y, et al. Vibration isolation characteristics of a novel composite flexible vibration-damping foundation [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2025, 31(5/6): 675–687.
- [4] WANG M H, TIAN R L, ZHANG X L, et al. Nonlinear mirrored-stiffness design method for quasi-zero stiffness vibration isolators [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(20): 17881–17905.
- [5] YONG J W, DONG Y Y, BAO Y, et al. High load-bearing and low-frequency multi-broadband design of innovative composite meta-material [J]. *Materials & Design*, 2024, 241: 112945.
- [6] YU C Y, JIANG Q B, YU K F, et al. The vibration isolation proprieties of an X-shaped structure with enhanced high-static and low-dynamic stiffness via torsional magnetic negative stiffness mechanism [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(11): 8849–8870.
- [7] OU H F, SUN X M, WU Q L, et al. A novel bio-inspired kangaroo leg structure for low-frequency vibration isolation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(3): 1797–1814.
- [8] LU J J, YAN G, QI W H, et al. Load-adaptive quasi-zero stiffness vibration isolation via dual electromagnetic stiffness regulation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2023, 567: 118059.
- [9] LIU T, LI A Q, ZHANG H Y. Quasi-zero stiffness interval optimization design and dynamics analysis of a new bidirectional horizontal isolation system [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2024, 206: 110852.
- [10] AN Z L, XU C, WANG C H, et al. Metastructure for broadband vibration suppression and ultra-low frequency energy harvesting by integrating intercell negative stiffness mechanism with 2-DOF oscillators [J]. *Engineering Structures*, 2025, 342: 120883.
- [11] SHAO T Z, ZHANG C S, LI X Y, et al. Quasi-zero stiffness torsional vibration isolator with synchronous adjustable positive and negative stiffnesses and mechanical characteristics study [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2025, 39(7): 3773–3786.

- [12] MEHREGANIAN N, RAZI S, FALLAH A S, et al. Mechanical performance of negative-stiffness multistable bi-material composites [J]. *Acta Mechanica*, 2025, 236(2): 995–1017.
- [13] ZHOU Q, PAN W, LAN X, et al. A study on the amplification effect and optimum control of the intermediate column-lever negative stiffness viscous damper [J]. *Applied Sciences*, 2024, 14(17): 7627.
- [14] LIU Y, SUN F F, YANG J Q, et al. Development and experimental study of disc spring-based negative-positive-uncoupled stiffness devices for structural multi-level seismic fortification [J]. *Journal of Building Engineering*, 2024, 95: 110231.
- [15] TIAN R L, WANG M H, ZHANG Y S, et al. A concave X-shaped structure supported by variable pitch springs for low-frequency vibration isolation [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2024, 218: 111587.
- [16] JI L W, LUO Y J, ZHANG Y H, et al. A creative wide-frequency and large-amplitude vibration isolator design method based on magnetic negative stiffness and displacement amplification mechanism [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, 572: 118185.
- [17] 尹蒙蒙, 丁虎, 陈立群. X型准零刚度隔振器动力学设计及分析[J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(5): 46–52.
YIN M M, DING H, CHEN L Q. Dynamic design and analysis of X-shaped quasi-zero stiffness isolator [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(5): 46–52. (in Chinese)
- [18] PU H Y, LIU J, WANG M, et al. Bio-inspired quasi-zero stiffness vibration isolator with quasilinear negative stiffness in full stroke [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, 574: 118240.
- [19] 刘兴天, 孔祥森, 孙杰, 等. 隔振对象重量变化对准零刚度隔振器隔振性能的影响[J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(1): 63–67.
LIU X T, KONG X S, SUN J, et al. Effect of load imperfection on vibration isolation performance of a quasi-zero-stiffness isolator [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(1): 63–67. (in Chinese)
- [20] PLATUS D L. Negative stiffness mechanism vibration isolation systems [J]. *Proceedings of the SPIE*, 1992, 1619: 45–54.
- [21] WU M K, WU J L, REN B, et al. A linear planar magnetic spring for 2-DOF vibration isolation [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2025, 299: 110432.
- [22] ZHAO W W, QUAN Y, QIAO H S. Optimal parameter design of a tuned inerter viscous damper with negative stiffness for wind-induced vibration control in high-rise structures based on a reduced 2-degree-of-freedom model [J]. *Journal of Building Engineering*, 2025, 106: 112688.
- [23] LE T D, AHN K K. Experimental investigation of a vibration isolation system using negative stiffness structure [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, 70: 99–112.
- [24] ZENG R, YIN S, WEN G L, et al. A non-smooth quasi-zero-stiffness isolator with displacement constraints [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, 225: 107351.
- [25] 吴维雷. 几何非线性隔振系统性能分析的椭圆谐波平衡法[D]. 大连: 大连理工大学, 2023.
WU W L. Performance analysis of geometrically nonlinear isolation systems using the elliptic harmonic balance method [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2023. (in Chinese)