

# 单自由度流致振动系统的多稳态动力学及其控制<sup>\*</sup>

穆耀轩 张文 吴鑫 苏晗 乐源<sup>†</sup>

(西南交通大学 力学与航空航天学院,成都 611756)

**摘要** 考虑一类单相流作用的单自由度间隙振动系统的动力学模型,采用数值方法求解其运动微分方程,利用胞映射方法通过分岔图、相轨线图和吸引域揭示了系统的多稳态动力学,指出多个存在不同振动运动共存的流体流速区间,利用线性增益控制方法,引入衰减函数组成的线性反馈耦合控制信号.考虑在不改变系统主要参数的情况下在共存吸引子之间进行切换即优化冲击振子的响应,以及避免擦边引起的混沌响应.实现了系统在不同的稳态之间切换,提升了此类流致振动系统的稳定性.

**关键词** 流致振动, 多稳态动力学, 吸引域, 线性增益控制, 胞映射方法

中图分类号:O313

文献标志码:A

## Single-Degree-of-Freedom Flow-Induced Vibration System and Its Multistable Dynamics and Control<sup>\*</sup>

Mu Yaoxuan Zhang Wen Wu Xin Su Han Yue Yuan<sup>†</sup>

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

**Abstract** A dynamic model of a single-degree-of-freedom vibro-impact system with clearance under single-phase fluid flow is considered. The governing differential equations are solved numerically, and the multistable dynamics of the system are revealed through bifurcation diagrams, phase trajectories, and basins of attraction using the cell mapping method. Multiple flow velocity ranges are identified in which multiple vibrational motions coexist. A linear gain control strategy is employed by introducing a linear feedback coupling control signal composed of an attenuation function. The study focuses on switching between coexisting attractors without altering the system's primary parameters, thereby optimizing the response of the impact oscillator and avoiding chaotic responses induced by grazing bifurcations. This enables switching between different steady states, thereby enhancing the stability of such flow-induced vibration systems.

**Key words** flow-induced vibration, multistable dynamics, basin of attraction, linear gain control, cell mapping method

### 引言

流致振动(flow-induced vibration, FIV)是指

由于流体与固体物体之间的相互作用所引起的振动现象.这种振动通常出现在流体流动过程中,尤其是当流体流经物体表面或通过管道等结构时.

2025-08-07 收到第1稿,2025-09-03 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(12072291,12202168),青年科学基金资助项目(12302015); National Natural Science Foundation of China (12072291,12202168), National Science Foundation for Young Scientists of China (12302015).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail:leyuan2003@sina.com

Zhao 和 Yang<sup>[1]</sup> 已经证明了具有立方俯仰刚度的二自由度自主翼型模型在不可压缩流动中混沌运动的存在性,并在弹性轴位置范围内观察到周期倍增的混沌路径. Jayaraman 和 Narayanan<sup>[2]</sup> 研究了以硬化弹簧-Duffing 振子为模型的谐波微励方形钝体在流体流动激励中的混沌运动,并用内插单元映射法给出了多重定态周期运动对应的初始条件映射.

在间隙约束系统的流致振动(驰振)中,由于分段线性的弹性约束和碰撞,可能出现吸引子共存现象即多稳态现象. Simiu 和 Cook<sup>[3]</sup> 研究了两种情况下振子的运动:一种是浸没在均匀流中的施加强制谐波的单弹性安装杆,另一种是这种杆的自主弹性耦合对. 他们描述了强迫振子在强迫振幅/频率参数空间中的模态锁定的振荡形式,并确定了从准周期性到混沌和湍流间歇性的转变. 对于耦合的振子对,确定了两个稳定的吸引子,其轨道分别与这两个吸引子拓扑相似,并存在一个双稳区域,其中一个吸引子在一定的参数值范围内是奇异的,另一个吸引子在足够高的速度下消失. Lin 等<sup>[4]</sup> 研究了原始矩形钝体振动模型及其改进双边间隙模型,讨论了流速、间隙对改进后系统整体动力学的影响.

在耗散系统中,系统对于给定的一组参数,会有几种可能的最终稳定状态(吸引子)共存,同时系统收敛到的最终状态关键取决于初始条件,即其中一个吸引子对应的长期动力学行为由初始条件定义. 一组初始条件产生了一组汇聚到同一个吸引子的轨迹,称为吸引域. 吸引子的诞生伴随着其吸引域的出现,其边界可以是平滑的,也可以是分形的.

许多稳定状态共存的区域是一个临界区域,低噪声或任何其他外部扰动都可能使系统从一个吸引子切换到另一个吸引子,从而为动力学行为增加一个新的特征. 当控制参数变化并经过分岔时,系统动力学状态可能发生剧烈变化. 对于实际应用系统,多稳态现象会对系统的实际运行情况产生不利的影响,为达到特定目的,动力系统需要在噪声环境中把期望的状态稳定化;同时,在特定情况下系统可以采取一定的控制方法,在不改变系统的主要参数的条件下,使系统到达期望的运动状态. Jiang<sup>[5]</sup> 考察了周期反馈控制在 Duffing 系统中的应用,线性增益反馈控制是周期反馈控制的改进. 柴凯<sup>[6]</sup> 针对非线性隔振系统存在多个不同拓扑特

性的吸引子,提出了实现不同吸引子之间迁移控制的方法. 结果表明:开环加非线性闭环控制方法相比开环、闭环和开环加线性闭环控制方法,传递域是全局的,且不受目标函数的影响,为降低潜艇辐射水声中的低频线谱特征提供了新的思路. 赵文浩<sup>[7]</sup> 等利用间歇控制方法,对船舶横摇系统进行稳态切换,并研究了控制力强度对控制效果的影响. Liu 等<sup>[8]</sup> 利用线性增大控制方法,研究了碰撞系统中共存吸引子的控制问题,并通过延续方法确定控制参数,从而在最优的性能指标下对系统进行控制. Liu 等<sup>[9]</sup> 提出一种间歇控制方法,将该方法应用到光滑和非光滑动力系统,并以 Duffing 振子和碰撞系统为例,用数值和试验结果证明了该方法能使系统在两个稳定吸引子之间切换.

本文考虑一类类似振动模式<sup>[10,11]</sup> 单自由度的流致振动非光滑系统,由于存在等效流体力和分段线性约束等因素,系统呈现出强非线性特性. 通过胞映射方法确定系统的多稳态动力学行为并通过线性增益控制方法,在不改变系统的主要参数的情况下,可使系统在不同的状态之间切换,将系统的混沌运动或者高周期解控制到稳定的区域上,从而提高此类流致振动系统的稳定性.

## 1 单一结构的流致振动系统方程

单自由度受定常横流作用的孤立矩形截面钝体系统如图 1<sup>[4]</sup> 所示,是在单边间隙系统<sup>[10]</sup> 的基础上改进而来. 在单相定常均匀流中,受到横向流的流体激励的矩形截面钝体遵循 Den Hartog 准稳态理论. 其中横向来流速度为  $V$ , 质量为  $m$  的矩形钝体由刚度为  $k_1$  的线性弹簧和以  $c$  为线性黏性阻尼系数的缓冲器约束,两个有间隙的弹簧的刚度分别表示为  $k_3$  和  $k_4$ . 质量块和弹簧之间的间隙为  $y_3$

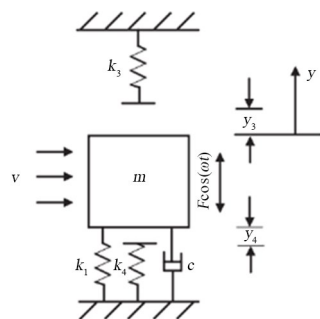


图 1 具有标准截面的单一结构的流激振动模型<sup>[4]</sup>  
Fig. 1 Flow-induced vibration model of a single structure with standard cross-section<sup>[4]</sup>

和  $y_4$ ,  $y$  是钝体的竖直位移, 假设质量由振幅为  $F$ 、频率为  $\omega$  的谐波进行谐波激励。

作为一单自由度单一结构的动力系统, 钝体发生驰振的非线性因素包括间隙软冲击带来的非光滑因素和流体冲击带来的流体诱导力  $F_L$ 。把作用在物体上的力  $F_L$  分解成两个分量: 流体流动的方向(阻力  $D$ )以及垂直于流体的方向(升力  $L$ ), 并定义攻角  $\alpha = \dot{y}/V$ 。对于攻角为  $\alpha$ , 速度为  $V_{rel}$  的相对流体, 其升、阻力系数值  $C_L$ 、 $C_D$  由相同  $\alpha$  时的静力风洞试验经验值确定, 当  $\alpha$  为小攻角时, 升力方向上的  $F_L$  可表示为  $F_L = C_y \rho h s V^2 / 2$ , 其中诱导力系数  $C_y = -(C_L + C_D \tan \alpha) \sec \alpha$ ,  $L = C_L \rho h s V_{rel}^2 / 2$ ,  $D = C_D \rho h s V_{rel}^2 / 2$ 。流体诱导力可进一步表示为:

$$F_L = -\frac{1}{2} \rho V^2 d C_L \Big|_{d=0} - \frac{1}{2} \rho V^2 d \left( \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_D \right) \Big|_{\alpha=0} \alpha + o(\alpha^2) \quad (1)$$

其中  $C_L$  和  $C_D$  可以由实验曲线用含  $\alpha$  的多项式近似, 这里考虑的所有截面均关于流向轴对称, 因此  $C_L$  是  $\alpha$  的奇函数,  $C_D$  是  $\alpha$  的偶函数。如果  $C_L$  多项式是  $\alpha$  的五次或更少的幂次, 而  $C_D$  多项式是  $\alpha$  的四次或更少的幂次, 则后面的计算将得到简化。

将流体诱导力系数  $C_y$  相对于攻角  $\alpha$  展开为泰勒级数, 并依据 Parkinson 和 Smith 的实验结论<sup>[12]</sup> 取前三阶:

$$C_y(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 + \dots \\ = a_0 + a_1 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right) + a_2 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^2 + a_3 \left( \frac{\dot{y}}{V} \right)^3 + \dots \quad (2)$$

假设非线性振动的振幅和相位变化缓慢, 则在两种不同非线性的累积效应下, 钝体在竖直方向上的运动方程表示为:

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + G(y) = F \cos(\omega t) + F_L \quad (3)$$

式中:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho S V^2 [B_1 (\dot{y}/V) + B_3 (\dot{y}/V)^3] \\ G(y) = \begin{cases} k_1 y, & -y_4 \leq y \leq y_3 \\ k_1 y + k_3 (y - y_3), & y > y_3 \\ k_1 y + k_4 (y + y_4), & y < -y_4 \end{cases}$$

然后将式(3)转化为无量纲形式<sup>[10]</sup>, 取:  $\sigma_3 = k_3/k_1$ ,  $\sigma_4 = k_4/k_1$ ,  $x = y/\delta$ ,  $e_3 = y_3/\delta$ ,  $e_4 = y_4/\delta$ ,  $\zeta = c/(m\omega_n)$ ,  $U = V/(\delta\omega_n)$ ,  $\tau = \omega_n t$ ,  $\Omega = \omega/\omega_n$ ,  $\zeta_3 = -\beta B_3/(2U)$ ,  $\beta = \rho S \delta^2/m$ ,  $\zeta_1 = -\beta B_1 U/2$ ,  $\zeta_0 = \zeta + \zeta_1$ ,  $f = F/(m\omega_n^2 \delta)$  可得:

$$\ddot{x} + \zeta_0 \dot{x} + \zeta_3 (\dot{x})^3 + g(x) = f \cos(\Omega \tau) \quad (4)$$

式中:

$$g(x) = \begin{cases} x, & -e_4 \leq x \leq e_3 \\ x + \sigma_3 (x - e_3), & x > e_3 \\ x + \sigma_4 (e + e_4), & x < -e_4 \end{cases}$$

## 2 多稳态动力学

### 2.1 胞映射方法

将连续的非线性动力系统状态空间离散为小单元, 称作胞状态空间, 其中每个胞都是不同状态点的集合<sup>[13]</sup>。因为每个胞的尺寸足够小, 一般可用胞的中心点或者端点近似代替整个胞, 以其为初值向前进行数值积分, 构造点到点的映射, 原系统中状态点之间的关系就可以反映为状态胞与其像胞之间的映射关系<sup>[14]</sup>。

对于一般的非自治系统, 其微分方程可以表示为以下形式:

$$\frac{df}{dx} = f(x, \beta_i, t), i = 1, 2, \dots, n; \beta_i \in \mathbf{R}^K, t \in \mathbf{R} \quad (5)$$

其中,  $x$  为  $n$  维状态变量,  $\beta_i$  为系统内部的参数变量,  $f$  为映射关系。当  $\beta_i$  发生变化时, 系统的状态也会发生改变。为了分析不同内部参数的改变对系统全局特性的影响, 首先将动力系统的状态空间离散为胞状态空间, 在由  $x$  方向和  $y$  方向构成的二维平面上, 将状态胞表示为  $c_{ij}$ ,  $d_i$  和  $d_j$  分别表示为单个状态胞在  $x$  和  $y$  方向上的长度。经过多次迭代后, 具有相同状态属性的点将汇集在一起, 形成不同的吸引域。

### 2.2 改变来流速度情况下的多稳态动力学及其吸引域演化

本文以 Narayanan 和 Sekar 的间隙弹性约束模型<sup>[10]</sup> 为本文模型基础, 并考虑 Lin 等<sup>[4]</sup> 改进的双边模型。矩形截面钝体在小攻角下单相定常流中的流体诱导力系数  $C_y$  等由 Mizota<sup>[15]</sup> 的实验结合经验近似给出, 本文模型参数选择见表 1。

本文取外激励频率为 1, 以无量纲化后的来流速度为分岔参数分析系统的动力学行为变化。采用变步长 Runge-Kutta 法和延续算法对系统的运动微分方程进行求解, 通过选取不同的初值, 得到随

参数  $F$  变化的分岔图,如图 2 所示.从分岔图中可以观测到,当  $U \in [2, 3.5]$  时,系统呈现出多吸引子共存现象,存在多种不同的吸引子.

表 1 矩形截面钝体双边间隙模型参数<sup>[10]</sup>

Table 1 Parameters of the rectangular cross-section bluff body with bilateral gaps model<sup>[10]</sup>

参数	值
$\beta$	0.10
$\zeta$	0.05
$\Omega$	1.00
$\delta$	0.32
$\sigma$	10.00
$\sigma$	10.00

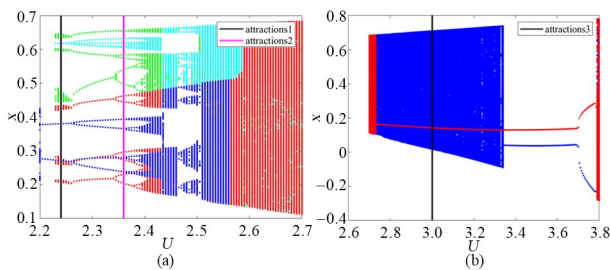


图 2 系统随分岔参数  $U$  的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram of the system with respect to the bifurcation parameter  $U$

取  $U=2.24$  以及  $U=3$  时(图黑色及紫色参考线所示),系统的全局吸引域如图 3(a)、图 4(a)所示,图中的离散点为吸引子.取不同的初值可以得到对应的不同相轨迹图与庞加莱截面如图 3(b)(c)、图 4(b)(c)所示.相轨迹图与吸引域离散点颜色保持一致.

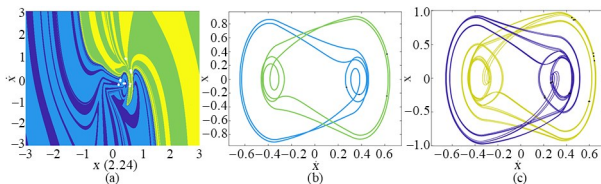


图 3 参数  $U=2.24$  时系统的吸引域:(a)全局吸引域;(b)吸引域相轨迹图;(c)吸引域庞加莱截面

Fig. 3 Attraction basin of the system at parameter  $U=2.24$ : (a) Global attraction basin; (b) Phase trajectories for each attraction domain; (c) Poincaré section for each attraction domain

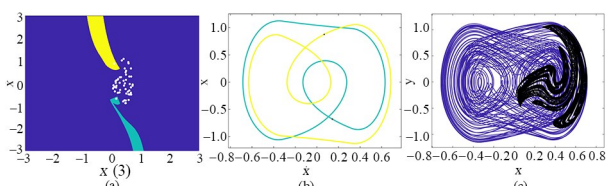


图 4 参数  $U=3$  时系统的吸引域:(a)全局吸引域;(b)吸引域相轨迹图;(c)吸引域庞加莱截面

Fig. 4 Attraction basin of the system at parameter  $U=3$ : (a) Global attraction basin; (b) Phase trajectories for each attraction domain; (c) Poincaré section for each attraction domain

当  $U=2.24$  时,如图 3(a)所示,存在对称的周期 2 和周期 7,四个吸引域共存;当  $U=3$  时,如图 4(a)所示,存在对称的两个周期一吸引子和混沌吸引子.系统在对应吸引域内取不同初值均会收敛到图 3(b)和图 4(b)中对应颜色的轨道上.

从吸引域中可以观察到,不同吸引子的吸引域边界具有分形结构,表现出较为复杂的全局特性.这些吸引子对初值非常敏感,微小的初值扰动都可能使系统被吸引到其他吸引子的吸引域上,即此类系统所需要的稳定工作周期会转入其他高周期或者混沌状态中去.这两种吸引域中存在一个稳定振动区域,此区域为小振幅周期 2 吸引子的吸引域,相对于其他类型的吸引子而言,系统在此吸引子下比较稳定,是此类单一结构的振动系统所需要的稳定状态.

### 3 多稳态动力学的线性增益控制

#### 3.1 多稳态控制基本原理

线性增益控制应用在系统稳态解、抑制双稳态、调节驱动响应的动力学和控制隐藏吸引子方面,通过简单衰减函数组成的线性反馈耦合系统来实现.主要考虑在不改变系统主要参数的情况下在共存吸引子之间进行切换即优化冲击振子的响应,以及避免擦边引起的混沌响应<sup>[16]</sup>.

为了在不影响其吸引域的情况下在非光滑系统中的共存吸引子之间切换,使用了线性增益控制方法的改进版本. Liu 等<sup>[9]</sup>已经在这个方向上做了初步工作,使用间歇反馈控制器控制光滑和非光滑动力系统.当当前吸引子满足与期望吸引子的接近条件时,该控制方案在时域中重复应用.对于避免擦边事件附近的混沌响应的控制问题,所考虑的冲击振子的分岔情况,以找到一个合适的周期解作为目标吸引子.

考虑一个二阶常微分方程表示的非自治系统

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + p(t) + u(t) \quad (6)$$

其中  $x$  是状态变量,  $f(x, \dot{x})$  是非线性函数,  $p(t)$  表示外部激励,  $u(t)$  表示外部输入控制.如果此系统在所选的参数下存在多个稳定解,且在没有外部控制的情况下,此系统有所需的稳定的轨道  $u(t) = 0$ , 其目标轨道即可表示为

$$\ddot{x}_d = f(x_d, \dot{x}_d) + p(t) \quad (7)$$

为了设置一个控制目标和控制器,将此系统从一个稳定轨道驱动到另一个轨道.取误差变量  $e_1, e_2$ , 表示目前轨道与目标轨道的状态差异.

$$\begin{cases} e_1 = x - x_d \\ e_2 = \dot{x} - \dot{x}_d \end{cases} \quad (8)$$

式(6)、(7)相减得到误差方程,其中:

$$f^*(x, x_d, \dot{x}_x, \dot{x}_d) = f(x, \dot{x}) - f(x_d, \dot{x}_d) \quad (9)$$

$$\dot{e}_2 = f^*(x, x_d, \dot{x}_x, \dot{x}_d) + u(t) \quad (10)$$

为了达到控制目的,需要定义一个控制格式<sup>[17]</sup>,可写为:

$$u(t) = -f^*(x, x_d, \dot{x}_x, \dot{x}_d) - k_p e_1 - k_d e_2 \quad (11)$$

其中  $u(t)$  是控制器的正线性增益.研究表明这种控制方法不会改变系统的动力学性质及其吸引子共存.

考虑一个一般的非线性振荡器  $\dot{x} = f(x)$ , 其中  $x$  是动力变量的  $m$  维向量,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \mathbb{R}^N$ ,  $f(x)$  是向量场.这种非线性系统的不动点可以使用与线性动力系统  $u$  的特定类型的耦合来稳定,描述为应用线性增益的动力系统一般表示为:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \varepsilon u \\ \dot{u} = -ku - \varepsilon(x - b) \end{cases} \quad (12)$$

其中  $\varepsilon$  描述了振荡器和线性系统  $u$  之间的耦合强度,  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N]^T \in \mathbb{R}^N$ ;  $m$  维的变量  $u$  描述了线性系统的动力学,第  $i$  个分量  $x_i$  对应的增广或耦合项为  $\varepsilon_i u$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, N$ , 如果  $x_i$  与系统变量  $u$  不耦合,则  $\varepsilon = 0$ ,  $\dot{u} = -ku$  中  $k$  是它的衰减参数,可用于调节到达稳定解所需的瞬态时间<sup>[14]</sup>.线性系统随着衰减参数  $k$  趋近于 0, 因此,如果没有与非线性系统的耦合  $[\varepsilon(x - b)]$ , 它就不能有持续的振荡.如果我们想稳定原系统的稳定解,则  $b = x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*]^T \in \mathbb{R}^N$ , 且  $\dot{x}|_{x=x^*} = f(x^*) = 0$  满足  $\dot{x}|_{x=x^*} = f(x^*) = 0$ , 当取  $b \neq x^*$ , 可将  $X = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N, \dot{u}]^T \in \mathbb{R}^{N+1} = 0$  这一增益系统稳定在稳定解上<sup>[18]</sup>.

### 3.2 多稳态控制及数值模拟

将振动系统微分方程转换为状态变量方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f \cos(\Omega\tau) - \zeta_0 \dot{x} - \zeta_3 (\dot{x})^3 - g(x) + u(\tau) \\ \dot{x}_1^F = x_2^F \\ \dot{x}_2^F = f \cos(\Omega\tau) - \zeta_0 \dot{x}_1^F - \zeta_3 (\dot{x}_1^F)^3 - g(x_1^F) \\ u(\tau) = \varepsilon \{x_1^F - x_1(\tau) + \lambda [x_2^F - x_2(\tau)]\} \end{cases} \quad (13)$$

其中:

$$g(x) = \begin{cases} x, & -e_4 \leq x \leq e_3 \\ x + \sigma_3(x - e_3), & x > e_3 \\ x + \sigma_4(x + e_4), & x < -e_4 \end{cases}$$

其中  $u(\tau) = \varepsilon [x_1^F - x_1 + \lambda (x_2^F - x_2)]$ , 定义了线性增益控制规律.在上面的表达式中,  $\varepsilon$  代表冲击振荡器与线性控制系统之间的耦合强度,  $\lambda$  是一个常数权重因子,  $x_1^F, x_2^F$  给出了系统期望的目标解的位置和速度.当  $\varepsilon = 0$  时,系统变为原模型.当给一个适当  $\varepsilon > 0$ , 且当  $\tau$  足够大时,当前系统轨迹  $[x_1(\tau), x_2(\tau)]$  收敛于期望解  $(x_1^F, x_2^F)$ .因此,当控制信号  $u(\tau)$  衰减为零,修改后的系统成为原始模型.这种方法将用于我们的研究中,以便在不改变系统参数的情况下,驱动冲击振荡器从一个不期望的工作模式,如混沌运动或具有高功耗的周期解,控制到期望的低耗能的周期行为.线性增益控制方法可使目标轨道在共存周期吸引子之间切换或抑制不期望的混沌响应.控制器通过消耗系统的能量以达到控制目的,若  $x = x^F$ , 则  $u(\tau) = 0$ , 即当前轨道稳定到目标轨道,完成控制过程<sup>[17]</sup>.控制的具体方程由式(6)可得:

取  $\varepsilon = 2, \lambda = 1$ , 控制格式为:

$$u(t) = 2[x_1^F - x_1 + (x_2^F - x_2)] \quad (14)$$

考虑一个周期的能量消耗为:

$$P_{AVG} = \frac{1}{T \int_0^T f \cos(\omega t) X_2 dt} \quad (15)$$

上式给出了每个周期用来驱动质量块的平均功率,  $T$  为轨道周期.

在冲击振动系统的振动过程中,为了提高类似结构的振动控制性能,需要将系统的高周期运动控制到单/双周期运动上或者由混沌运动控制到周期运动上.由式(14),控制参数选为  $\varepsilon = 2, \lambda = 1$ ; 取系统参数(1)以及外部激励为  $f = 1, U = 3, \omega = 1$ ; 通过数值模拟,得到系统随时间变化的控制过程,如图5所示,图5(a)表示系统轨迹的控制过程,图5(b)表示系统位移  $x_1$  和线性增益控制器  $u(\tau)$  的时间历程图.黑色曲线是线性增益控制器发生作用的过程,选择红色的混沌轨道作为当前轨道,小振幅蓝色周期1轨道作为目标轨道;系统运动先是稳定在红色混沌轨道上,在  $\tau = 63.08$  时开始控制,线性增益控制器发出控制信号,  $u(\tau)$  突然正向增大,系

统受到控制信号的调控;红色的混沌轨道成功被控制到小振幅蓝色周期1轨道上,在 $\tau=87.02$ 时控制结束, $u(\tau)$ 立刻减小并振荡的趋于零,不再发出信号;从图5(b)可知,此控制过程有效将混沌运动状态切换到单周期轨道上。

另选择系统参数(1)以及外部激励为 $f=1$ , $U=2.24$ , $\omega=1$ ;通过数值模拟,得到系统随时间变化的控制过程,如图6所示,图6(a)表示系统轨迹的控制过程,图6(b)表示系统位移 $x_1$ 和线性增益控制器 $u(\tau)$ 的时间历程图。选取红色周期9轨道作为当前轨道,此时目标轨道选取为周期2轨道。

在 $\tau=62.555$ 时开始控制,线性增益控制器发出控制信号, $u(\tau)$ 突然正向增大,系统受到控制信号的调控;红色的周期9轨道成功被控制到蓝色周期2轨道上,在 $\tau=89.422$ 时控制结束, $u(\tau)$ 立刻减小并振荡的趋于零,不再发出信号;从图6(b)可知,此控制过程将高周期轨道有效切换到低周期轨道上。

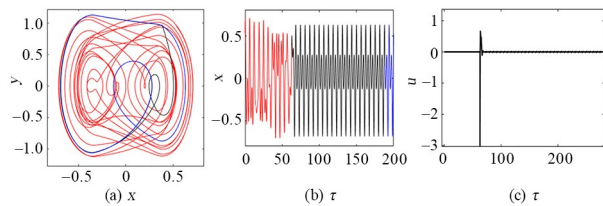


图5  $U=3$ 时系统随时间变化的控制过程:(a)多稳态控制相图;  
(b)时间历程图;(c)控制信号扰动图

Fig. 5 The control process of the system varying with time at  $U=3$ :  
(a) Multistable control phase portrait; (b) Time history diagram;  
(c) Control signal perturbation diagram

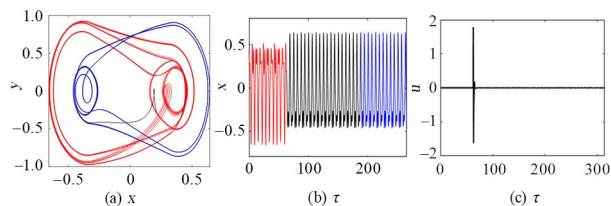


图6  $U=2.24$ 时系统随时间变化的控制过程:(a)多稳态控制相图;  
(b)时间历程图;(c)控制信号扰动图

Fig. 6 The control process of the system varying with time at  $U=2.24$ :  
(a) Multistable control phase portrait; (b) Time history diagram;  
(c) Control signal perturbation diagram

## 4 结论

本文解释了一类单自由度振动系统在与单相流耦合作用下的吸引子共存现象并实现了指定流体流速下的多稳态控制。此系统在双边弹性约束下,施加单相均匀流体作用下,发现多个吸引子共存的动力学现象,观察到系统的各个吸引子的吸引域边界具有分形的几何特性,落在分形区域中的周

期解非常不稳定。通过引入一个控制信号,将周期解控制到稳定的区域上,以提高此类振动系统的稳定性。通过线性增益控制法成功将系统的高周期运动控制到小振幅周期运动和混沌运动上;将系统的运动轨迹控制到期望的周期轨道上。通过数值模拟方法,绘制了控制过程的时间历程图以及相轨迹图,验证了这种控制方法的有效性。研究结果对有效控制此类振动系统,提升系统稳定性和切换运行方式具有一定的理论参考意义。此控制方法同样适用于其他存在吸引子共存的非自治动力系统,具有一定的普适性<sup>[20]</sup>。

## 参考文献

- [1] ZHAO L C, YANG Z C. Chaotic motions of an airfoil with non-linear stiffness in incompressible flow [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 138(2): 245-254.
- [2] NARAYANAN S, JAYARAMAN K. Chaotic oscillations of a square prism in fluid flow [J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 166(1): 87-101.
- [3] SIMIU E, COOK G R. Chaotic motions of self-excited forced and autonomous square prisms [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1991, 117(2): 241-259.
- [4] LIN W, QIAO N. A note on the periodic and chaotic responses of an SDOF system with piecewise linear stiffness subjected to combined harmonic- and flow-induced excitations [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 311(1/2): 567-578.
- [5] JIANG Y. Trajectory selection in multistable systems using periodic drivings [J]. Physics Letters A, 1999, 264(1): 22-29.
- [6] 柴凯, 楼京俊, 朱石坚, 等. 两自由度非线性隔振系统的吸引子迁移控制[J]. 振动与冲击, 2018, 37(22): 10-16.
- CHAI K, LOU J J, ZHU S J, et al. Attractor migration control of a two-degree-of-freedom nonlinear vibration isolation system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(22): 10-16. (in Chinese)
- [7] 赵文浩, 张文, 李高磊, 等. 船舶横摇系统的多稳态动力学及其控制[J]. 振动与冲击, 2022, 41(18): 192-196, 204.
- ZHAO W H, ZHANG W, LI G L, et al. Multistable dynamics and control of the ship's rolling system

- [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, 41(18): 192–196, 204. (in Chinese)
- [8] LIU Y, WIERCIGROCH M, ING J, et al. Intermittent control of coexisting attractors [J]. *Philosophical Transactions Series A, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 2013, 371(1993): 20120428.
- [9] LIU Y, PÁEZ CHÁVEZ J, PAVLOVSKAIA E, et al. Analysis and control of the dynamical response of a higher order drifting oscillator [J]. *Proceedings Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 2018, 474(2210): 20170500.
- [10] NARAYANAN S, SEKAR P. Periodic and chaotic responses of an sdf system with piecewise linear stiffness subjected to combined harmonic and flow induced excitations [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 184(2): 281–298.
- [11] WANG L, LIU W B, DAI H L. Aeroelastic galloping response of square prisms; The role of time-delayed feedbacks [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2014, 75: 79–84.
- [12] HARTOG D. *Mechanical Vibrations* [M]. 4th ed. Columbus, Ohio, USA: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956.
- [13] 柳宁, 李俊峰, 王天舒. 用胞胞映射计算被动行走模型不动点的吸引盆[J]. *工程力学*, 2008, 25(10): 218–223.  
LIU N, LI J F, WANG T S. Study of the basin of attraction of passive models by the aid of cell-to-cell mapping method [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(10): 218–223. (in Chinese)
- [14] 徐伟, 岳晓乐, 韩群. 胞映射方法及其在非线性随机动力学中的应用[J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(3): 200–208.  
XU W, YUE X L, HAN Q. Cell mapping method and its applications in nonlinear stochastic dynamical systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(3): 200–208. (in Chinese)
- [15] MIZOTA T, OKAJIMA A. Measurements of unsteady separated flows around rectangular prisms using tandem type hot-wire probe [J]. *Journal of the Flow Visualization Society of Japan*, 1982, 2(6): 607–610.
- [16] NAKAMURA Y, MIZOTA T. Unsteady lifts and wakes of oscillating rectangular prisms [J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1975, 101(6): 855–871.
- [17] 贺尔星, 赵文浩, 刘润, 等. 非线性车辆悬架系统的滞后分岔及多稳态控制[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(3): 30–36.  
HE E X, ZHAO W H, LIU R, et al. Hysteresis bifurcation and control multistability of nonlinear vehicle suspension system [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(3): 30–36. (in Chinese)
- [18] KARNATAK R. Linear augmentation for stabilizing stationary solutions: potential pitfalls and their application [J]. *PLoS One*, 2015, 10(11): e0142238.
- [19] RESMI V, AMBIKA G, AMRITKAR R E. Synchronized states in chaotic systems coupled indirectly through a dynamic environment [J]. *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2010, 81(4): 046216.
- [20] 谢建华, 乐源, 李登辉. *非线性动力学* [M]. 北京: 科学出版社, 2018.  
XIE J H, LE Y, LI D H. *Nonlinear dynamics* [M]. Beijing: Science Press, 2018. (in Chinese)