

基于稀疏识别算法的非线性经济动力学建模与应用*

李佼瑞 邓迪[†]

(西安财经大学 统计学院, 西安 710100)

摘要 本文利用非线性动态系统稀疏辨识(SINDy)算法,基于广义 Lotka-Volterra 模型优化了经济系统的非线性动力学模型,并将优化后的模型用于研究我国工业增加值、金融业增加值、出口总值和进口总值四个变量的复杂动态关系,包括线性、交互关系和高阶影响关系.和传统的 Lotka-Volterra 模型相比较,稀疏识别算法优化后的模型在拟合和短期预测方面具有更高的精度,并且模型能够筛选出系统中的关键项,在经济层面具有更强的可解释性.

关键词 稀疏识别, 非线性动力学, 短期预测, 交互关系

中图分类号:F015

文献标志码:A

Nonlinear Economic Dynamics Modeling and Application Based on Sparse Identification Algorithm*

Li Jiaorui Deng Di[†]

(School of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100, China)

Abstract This study utilizes the sparse identification of nonlinear dynamical systems (SINDy) algorithm to optimize the nonlinear dynamic model of the economic system based on the generalized Lotka-Volterra model. The optimized model is applied to explore the complex dynamic relationships among four variables: industrial added value, financial added value, total exports, and total imports in China, including linear, interactive, and higher-order influence relationships. Compared to the traditional Lotka-Volterra model, the model optimized by the sparse identification algorithm demonstrates higher accuracy in fitting and short-term forecasting. Additionally, the model is able to identify key components within the system, offering stronger interpretability in economic terms.

Key words sparse identification, nonlinear dynamics, short-term forecasting, interaction relationships

引言

非线性动力学模型在经济系统中的应用十分广泛,近年来取得了较好的研究成果,其中生态系

统的概念最初源自生态学,之后学者 Moore^[1]将该概念扩展至商业领域,提出商业生态系统的概念. Lotka-Volterra(LV)模型最初在 20 世纪 40 年代被提出,用于描述生物种群之间的相互作用,后广

2024-12-24 收到第 1 稿,2025-01-11 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11572231),2023 年西安财经大学研究生创新基金项目资助(23YCZ03),National Natural Science Foundation of China(11572231),2023 Graduate Innovation Fund of Xi'an University of Finance and Economics (23YCZ03).

[†] 通信作者 E-mail:dideng@xaufe.edu.cn

泛用于经济学,王闯^[2]从大小股东间的内在关系建立 LV 竞争生态模型,周甜甜等^[3]对产业经济生态化的共生关系进行研究.然而, LV 模型主要描述变量之间的基本非线性相互作用,如二阶交互项以及常数项,该限制使得其不足以充分捕捉系统中存在的复杂高阶非线性相互作用和多维依赖关系.为解决这些限制,研究人员提出了 LV 模型的各种扩展版本,王圣元^[4]提出将 LV 模型与多选择目标规划方法相结合来分析产品组合交互作用.段文奇等^[5]拓展 LV 基准模型至引入成熟企业的三主体共生演化模型以打破主流两主体共生模式的局限.徐梦瑞^[6]提出 n 维广义 LV 模型,进行系统的动力学分析.

此外,更多非线性动力学的方法也逐渐发展,这类方法广泛应用于物理、工程、生物和环境等领域^[7-10],同时,其跨学科领域的成功也体现在了经济领域,本文作者^[11,12]构建了一个动态系统,用于分析企业和政府在合作与非合作两种情况下的污染控制,此后还建立了“资源—环境—经济”(REE)三维动力系统模型,为实现协调可持续发展提供理论依据.林子飞等^[13]分析了含有分数阶导数的经济波动模型,将随机动力系统的概念引入经济波动模型以理解经济波动的本质特征.传统动力学建模方法虽然取得了较好的效果,但其更多基于理论以及分析建模,模型受制于其固定形式,在实际数据的应用中易出现精度不高的问题,尤其是对于非线性模型来讲,模型的微小误差容易引发结果产生较大的偏差,寻求其优化方法变得极为重要.

在大数据时代,数据驱动的方法在互联网金融和数字经济发展等领域显示出潜力,揭示了经济变量之间的非线性关系^[14,15]. Gu 等人^[16]利用机器学习技术识别了资产定价中复杂的非线性关系. Brunton^[17]、Mangan^[18]、Kaiser 等人^[19]提出了一种 SINDy 及其变体方法,该方法为解决复杂动力系统提供了一种新的框架,已广泛应用于工程^[20]、生物学^[21]、数据科学^[22,23]等领域,用于发现控制方程.虽然 SINDy 方法最初不是为经济学设计的,但它在物理和生物系统中的成功应用表明了它具有广泛的跨学科潜力.

本文基于广义 Lotka-Volterra (GLV) 模型中经济变量可能存在的关系,利用 SINDy 方法优化经济系统,选择合适的特征工程,分析中国工业产

出、金融部门产出、出口总额和进口总额之间的相互关系,构建更精确的非线性动态模型.不仅拓展了 SINDy 方法在经济学中的应用,获得了较好的短期预测效果,还根据实证结果给出可行性政策建议.

1 广义 Lotka-Volterra 模型

Lotka-Volterra (LV) 模型是由 Logistic 模型衍生而来的, Logistic 模型最初用于描述物种之间的竞争和共生动态,其数学表达式如公式(1):

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1)$$

这里 N 代表种群规模, r 是内在增长率, K 是环境的承载能力. 当考虑两个种群之间的相互作用时, Logistic 模型可以扩展到 LV 模型. 随着时间的推移, LV 模型已被应用于经济领域, 用于描述不同经济实体之间的相互作用, 其数学表达式如下:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1 + \alpha_{12} N_2}{K_1}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2 + \alpha_{21} N_1}{K_2}\right) \end{cases} \quad (2)$$

为了使模型从经济层面更易理解, 将其简化成公式(3):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 - \alpha_{12} x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 - \alpha_{21} x_1 x_2 \end{cases} \quad (3)$$

这里, x_1 和 x_2 表示两个经济变量, r_1 和 r_2 是它们的内在增长率, α_{12} 和 α_{21} 表示变量之间的相互作用系数. 这些系数的不同组合导致不同的相互作用动态, 如表 1 所示.

表 1 经济关系描述

Table 1 Description of economic relationships

系数组合	经济关系	经济解释
$\alpha_{12} > 0, \alpha_{21} > 0$	竞争	双方争夺资源
$\alpha_{12} > 0, \alpha_{21} = 0; \alpha_{12} = 0, \alpha_{21} > 0$	偏害	一方受损, 一方无影响
$\alpha_{12} > 0, \alpha_{21} < 0; \alpha_{12} < 0, \alpha_{21} > 0$	捕食/寄生	一方抑制一方获益/ 一方以一方为代价获益
$\alpha_{12} = 0, \alpha_{21} = 0$	中性关系	双方独立
$\alpha_{12} = 0, \alpha_{21} < 0; \alpha_{12} < 0, \alpha_{21} = 0$	偏利关系	一方受益, 一方无影响
$\alpha_{12} < 0, \alpha_{21} < 0$	互惠关系	双方合作获益

GLV 模型是对基本 LV 模型的扩展. 通过纳入更多种群和更复杂的相互作用, 来描述多个物种或

实体之间错综复杂的动态关系. 具体如公式(4):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1(a_1 - b_{11}y_1 - b_{12}y_2 - \dots - b_{1s}y_s) \\ \frac{dy_i}{dt} = y_i(a_i - b_{i1}y_1 - b_{i2}y_2 - \dots - b_{is}y_s) \\ \frac{dy_s}{dt} = y_s(a_s - b_{s1}y_1 - b_{s2}y_2 - \dots - b_{ss}y_s) \end{cases} \quad (4)$$

其中 a_i, b_{ij} 为实参数, 代表当前部门对自身动态变化的影响系数和其他部门对当前部门的交互影响系数, 可以采用最小二乘法对 GLV 模型的系数进行估计. 该方法可以估计物种或变量之间的相互作用, 清晰地展示变量之间的多种交互关系, 对于经济系统具有很强的理论解释作用, 但由于缺乏稀疏正则化和函数库的灵活性, 模型在实际拟合数据趋势方面存在明显的局限性, 无法捕捉变量之间更复杂的关系. GLV 模型很大程度上为我们的经济建模指引了明确方向, 有利于我们对特征库的选择, 以此为基础, 引入更多具有稀疏调整的可解释性的方法对于提高模型的鲁棒性和准确性至关重要.

2 SINDy 驱动的 LV 模型

2.1 SINDy-LV 模型

SINDy 是一种基于稀疏回归的方法, 旨在从时间序列数据中识别低维非线性动力系统模型. 其核心概念是通过从特征库选择几个基函数, 将其拟合到观测数据并捕获主导动力学来近似系统的演化方程. SINDy 方法通过以下步骤识别非线性动力学方程. 首先, 给定一个系统的时间序列数据, 如公式(5):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & \dots & x_1(t_n) \\ \dots & \ddots & \dots \\ x_q(t_1) & \dots & x_q(t_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

t_n 表示 n 个时间的观察状态, 每个 $x_m(t_i)$ 表示第 m 个变量在时间 t_i 时的观察状态 ($m = 1, 2, \dots, q, i = 1, 2, \dots, n$), 基于系统的先验知识或势函数形式构建库矩阵 $\Theta(x)$. 这个库矩阵包括一组候选基函数, 如常数项、线性项、二次项、多项式项和三角函数项等. 后文 SINDy 方法在经济数据的实际应用中, 我们结合了 GLV 模型的项与经济数据的特征, 选择了常数项、交互项、线性项、二次项为主要特征. 具体可以简单表示为公式(6):

$$\Theta(x) = [1, x_0, x_1, x_0x_1, x_1^2] \quad (6)$$

接下来, 应用数值微分得到每个时间点的时间导数, 如公式(7):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t_1) & \dots & \dot{x}_1(t_n) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \dot{x}_q(t_1) & \dots & \dot{x}_q(t_n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

然后将系统的动力学系统表示为这些特征的线性组合, 如公式(8):

$$\mathbf{f}(x) \approx \Theta(x)\xi \quad (8)$$

其中, ξ 为系数矩阵, SINDy 方法假设系统的动力学可以表示为稀疏线性组合. 因此, 系数矩阵 ξ 是稀疏的, 它的大部分元素为 0. 为了确定这个稀疏矩阵, SINDy 使用稀疏回归技术, 如最小绝对收缩和选择算子 (LASSO)、岭 (ridge) 或弹性网络 (ElasticNet). 优化问题表述为公式(9):

$$\xi = \operatorname{argmin}_{\xi} \left\| \frac{dx}{dt} - \Theta(x)\xi \right\|_2^2 + \lambda \|\xi\|_1 \quad (9)$$

这里的 λ 控制稀疏度, $\|\xi\|_1$ 表示系数矩阵的 ℓ_1 -范数. 这个过程允许识别重要的特征, 同时消除不相关的特征, 从而产生一个简化的系统动力学模型.

2.2 ElasticNet 优化器

在 SINDy 方法中, 导数的计算使用了数值微分法, 尽管受到经济数据的随机性特征影响, 这种方法可能放大噪声, 但我们可以通过引入稀疏回归来减少噪声的影响. 稀疏回归能够选择性地拟合数据中的重要动态特征, 从而抑制噪声对模型的干扰. 此外, 在数据预处理阶段, 我们对时间序列进行了季节性调整和标准化处理, 这些步骤帮助进一步减少了数据中的噪声, 确保模型训练时能够更好地捕捉到系统的真实动态规律.

ElasticNet 是一种稀疏回归方法, 为 SINDy 建模的优化过程引入了额外的灵活性. ElasticNet 结合了 LASSO 和 ridge 两种优化器, 使其更适合处理共线数据和复杂的稀疏结构. 具体来说, ElasticNet 的目标函数可表述为公式(10):

$$\xi = \operatorname{argmin}_{\xi} \left\| \dot{\mathbf{X}} - \Theta(x)\xi \right\|_2^2 + \alpha(\rho \|\xi\|_1 + \frac{1-\rho}{2} \|\xi\|_2^2) \quad (10)$$

这里的参数 α 控制了整体的正则化强度, 从而调整了解的稀疏性, $\rho \in (0, 1)$ 平衡了 ℓ_1 和 ℓ_2 正则化项

的贡献.当 $\rho=1$ 时,ElasticNet退化为LASSO,当 $\rho=0$ 时,ElasticNet退化为ridge.ElasticNet在高维数据设置中显示出明显的优势.它有效地解决了多重共线性问题,并且通过同时利用 ℓ_1 和 ℓ_2 正则化,在模型中实现了稀疏性和稳定性之间的平衡.此外,ElasticNet对噪声具有较强的鲁棒性,当数据中存在噪声时,可以实现更稳定的建模结果.ElasticNet与SINDy的集成增强了具有稀疏识别的非线性动力系统的建模,特别是在应用于分析中国经济动态时.这种组合提高了捕捉多维经济变量之间复杂相互作用的能力,同时确保了模型的稳定性和可解释性,即使在嘈杂的经济数据中也是如此.此外,它在短期预测准确性和识别关键动态特征方面提供了显著的优势.

3 在宏观经济学中的应用

3.1 宏观经济模型

我们使用了2007年至2023年期间的中国经济季度数据,包括以下四个经济指标,数据来源于联合国贸易数据库、中国经济信息网:

- (1)工业增加值(单位:十亿人民币);
- (2)金融增加值(单位:十亿人民币);
- (3)总出口额(单位:十亿美元);
- (4)总进口额(单位:十亿美元).

考虑到使用了季度数据,存在较强季节性,我们需要消除季节性影响.seasonal_decompose函数来自Python开源库statsmodels,该库提供了多种经济学和统计建模的工具.seasonal_decompose函数具体用于时间序列的季节性分解,能够将时间序列拆解为趋势成分、季节性成分和残差成分.该方法广泛应用于经济数据的季节性调整和趋势分析^[24].我们利用该方法对每个时间序列进行加性模型的分解,以提取和去除季节成分.具体操作见公式(11):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{T}(t) + \mathbf{S}(t) + \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{X}_{\text{adj}}(t) &= \mathbf{X}(t) - \mathbf{S}(t) \\ \mathbf{X}_{\text{pred, reseasoned}}(t) &= \mathbf{X}_{\text{pred}}(t) + \mathbf{S}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $\mathbf{X}(t)$ 是原始数据, $\mathbf{T}(t)$ 是趋势成分, $\mathbf{S}(t)$ 是季节性成分, $\mathbf{R}(t)$ 是残差成分, $\mathbf{X}_{\text{adj}}(t)$ 是去季节性的数据, $\mathbf{X}_{\text{pred}}(t)$ 是预测值, $\mathbf{X}_{\text{pred, reseasoned}}(t)$ 是加回季节成分的预测数据.使用seasonal_decompose函

数,提取出 $\mathbf{S}(t)$.然后,将 $\mathbf{S}(t)$ 从原始数据中减去,得到已调整的去季节性数据 $\mathbf{X}_{\text{adj}}(t)$,在模型对去季节性数据进行预测后,将季节性成分加回预测结果中,重构出原始数据的季节性特征,得到 $\mathbf{X}_{\text{pred, reseasoned}}(t)$.拟合时将数据集分成训练集(80%)和测试集(20%),采用SINDy方法和ElasticNet优化器以及二阶多项式特征库对标准化后的训练数据进行建模,拟合模型后,使用数值积分器生成模拟数据,每15步使用真实数据更新初始条件,以防止误差积累.并对模拟数据进行反向标准化.最后,使用平均绝对百分比误差(MAPE)评估模型的预测准确性,验证其在训练集和测试集上的性能.模型结果如公式(12):

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = 0.064x_0 + 0.043x_1 - 0.227x_2 + \\ \quad 0.078x_3 - 0.035x_1x_3 - 0.003x_3^2 + 0.053 \\ \frac{dx_1}{dt} = -0.022x_1 + 0.032x_2 + 0.003x_3^2 + 0.050 \\ \frac{dx_2}{dt} = 0.071x_0 - 0.245x_2 + 0.149x_3 + \\ \quad 0.0054x_0x_2 - 0.007x_1^2 + 0.106x_2^2 - \\ \quad 0.142x_3^2 + 0.032 \\ \frac{dx_3}{dt} = 0.291x_0 - 0.515x_2 + 0.135x_3 - \\ \quad 0.179x_0x_3 + 0.080x_1^2 + 0.146^2x_2 - \\ \quad 0.043x_3^2 + 0.020 \end{cases} \quad (12)$$

其中, x_0 代表工业增加值, x_1 代表金融业增加值, x_2 代表出口总值, x_3 代表进口总值, $\dot{(\cdot)}$ 代表其变化率.

图1展示了使用基于SINDy模型的方程(12)和数值积分方法得到的观测值与拟合值.

图1与表2的实证结果表明,SINDy模型能够在合理的精度下对数据进行14期预测.且SINDy模型较GLV模型更加精简,可以有效地识别和捕获核心影响因素,揭示工业产出、金融增长、出口和进口之间的线性、交互和高阶影响关系.

表2 SINDy模型MAPE值
Table 2 MAPE values of SINDy model

	Industrial	Financial	Export	Import
Train	0.0369	0.0501	0.0585	0.0808
Test	0.0887	0.0515	0.2932	0.0624

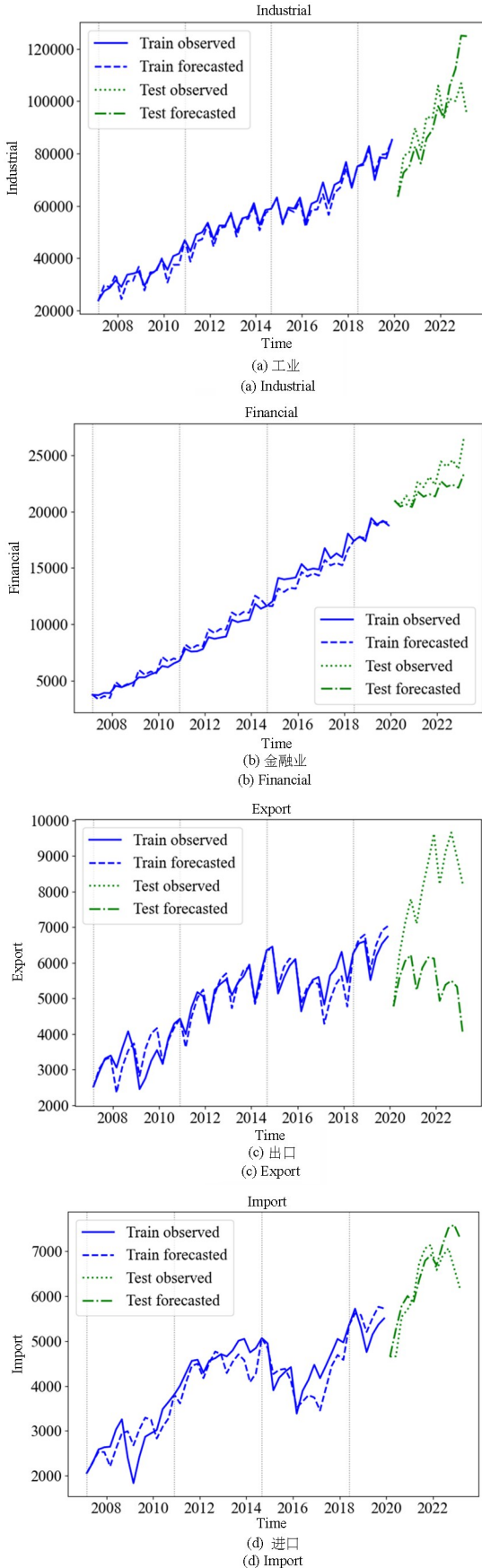


图1 SINDy模型拟合效果图 $\alpha=0.003, \ell_1=0.3, \text{polynomial}=2$
 Fig. 1 Fitting effect diagram of SINDy model, with $\alpha=0.003, \ell_1=0.3,$ and $\text{polynomial}=2$

3.2 模型结果分析

首先,我们使用网络图来说明这四个变量之间的整体关系,其中线的粗细表示影响的强度(线越粗,影响越强).线条样式代表影响的类型(实线表示积极影响,虚线表示消极影响),如图2.

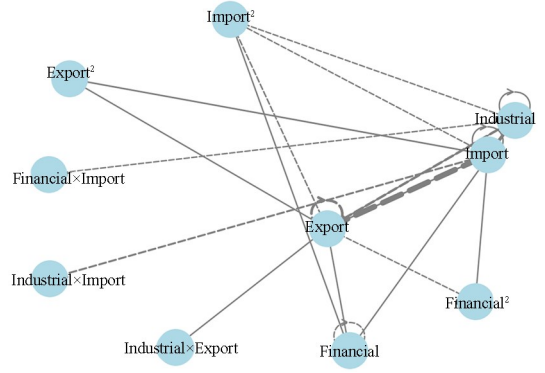


图2 影响关系网络图
 Fig. 2 Network of variable interactions

然后,我们选择三个具有代表性的项,描述三种类型的关系,并使用3D图以及等高线图直观地演示这些动态变化.图3说明了出口总值 x_2 对进口总值 x_3 变化率的线性影响,用 $-0.515x_2$ 表示.这种关系表明,随着经济内部出口总值的上升,进口的增长速度会放缓,这反映了出口导向型经济中国内需求的压缩.

图4展示了金融业增加值 x_1 和进口总值 x_3 对工业增加值 x_0 变化率的交互作用,用 $-0.035x_1x_3$ 表示.从3D图中可以明显看出,交互作用的效果在不同区域之间存在差异.3D曲面图越陡峭,交互效应越强.等高线图5则进一步突出了这种关系,颜色范围不等从紫色到黄色表示 x_0 从负到正的位移.密集排列的等高线表明, x_1 和 x_3 的组合对工业产出有显著影响,特别是在两个变量都很高的地区,导致工业增长受到明显抑制.这种现象可能是由于财政资源被转移到支持进口贸易上,从而减少了用于制造业的资金.

图6说明了出口总值 x_2 对进口总值 x_3 变化率的高阶影响,用项 $0.146x_2^2$ 表示.二次拟合曲线呈现典型“U”形,反映了出口总值的非线性影响.随着 x_2 从较低水平上升, x_3 开始下降,但随后又开始上升.这表明,出口总值在不同阶段对进口的影响不同:在出口增长的早期阶段,进口可能受到抑制,但随着出口达到一定规模,进口增长加速,说

明出口的繁荣最终带动了进口的需求。

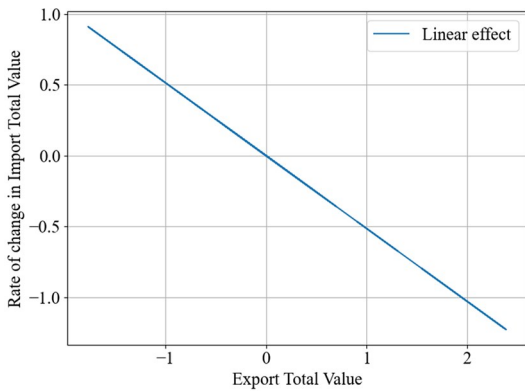


图 3 线性图: x_2 与 x_3 的线性作用

Fig. 3 Influence of linear relationships: Effect of x_2 on x_3

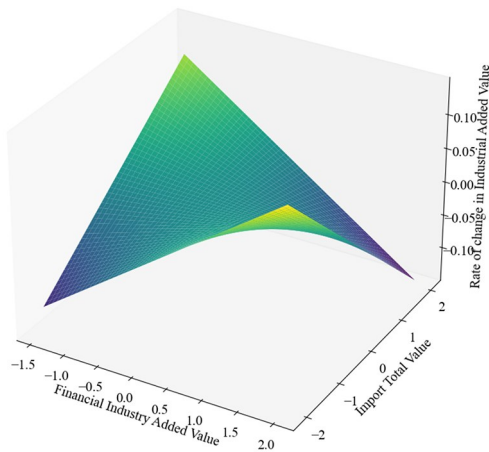


图 4 3D 图 x_1 和 x_3 对 x_0 的非线性交互作用

Fig. 4 3D graph of nonlinear relationships: interaction between x_1 and x_3 on x_0

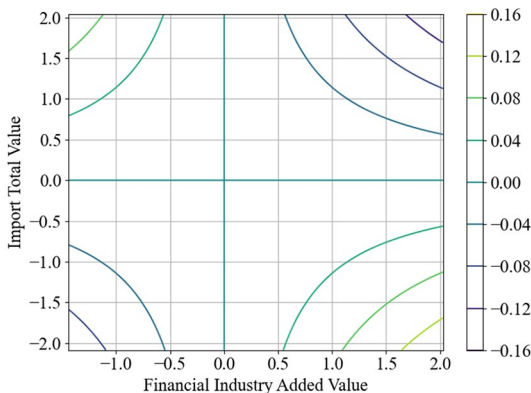


图 5 等高线图: x_1 和 x_3 对 x_0 的非线性交互作用

Fig. 5 Contour line of nonlinear relationships: interaction between x_1 and x_3 on x_0

通过对这些代表性关系的分析,我们可以直观地理解一个经济体中工业生产、金融增长、出口和进口之间复杂的相互作用,以及这些因素在不同阶段如何影响经济发展。随后,我们还可以基于这个模型对感兴趣的变量进行进一步的详细分析。

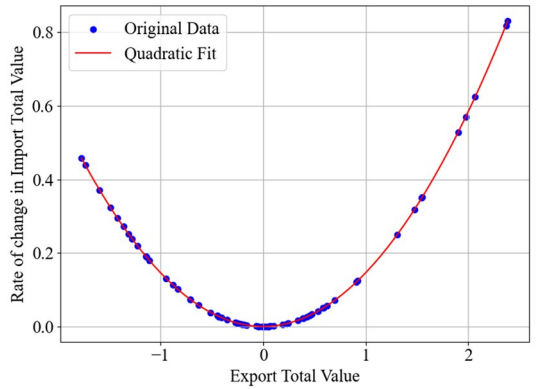


图 6 高阶关系 U 型图: x_2 对 x_3 的高阶作用

Fig. 6 U-chart of higher-order relationships: high-order effect of x_2 on x_3

3.3 基于实证结果的政策建议

本节通过对中国工业产出、金融增长、出口和进口之间非线性动态实证分析给出一系列可操作和有针对性的策略政策建议。

3.3.1 出口和进口之间的“U”型关系

模型揭示了出口与进口之间的“U”型关系,最初,出口增长抑制进口,随着出口达到一定规模,进口需求加速增长。这表明,在出口增长早期阶段,政府应鼓励出口企业优先考虑国内采购,并将其供应链本地化,以缓解短期内对进口的抑制。可以通过税收优惠或对国内采购企业的财政支持来实现。随着出口的扩大,政策应逐渐转向支持高质量原材料和先进技术的进口,以满足日益增长的生产需求。具体措施可包括降低进口关税和简化进口程序,确保出口企业能够有效地获得必要的进口资源。

3.3.2 金融增长对工业产出的门槛效应

该模型表明,金融增长对工业产出的影响存在非线性关系,特别是当金融支持和进口规模达到一定阈值时,过度的金融支持可能导致资源错配,阻碍产业发展。因此,政策制定者应谨慎平衡金融支持。例如,可以设立金融支持门槛,一旦金融信贷流向制造业,就引入贷款上限和风险评估等监管措施,防止过度杠杆。此外,政府应引导财政资源向高附加值和创新型制造业倾斜,避免过度依赖传统部门,从而增强工业部门的整体竞争力。

3.3.3 工业产出与出口之间的自我强化效应

工业产出与出口之间的关系表现出一种自我强化效应,即工业产出增长促进出口,反之亦然。然而,这种效应在超过一定阶段后可能会减弱。因此,政策应着眼于优化出口结构,提高出口产品的技术

含量和附加值,以保持这种良性循环.例如,政府可以通过产业政策和研发补贴等方式,支持制造业向高端和技术密集型领域升级,从而提高产品的国际竞争力,避免低附加值出口的“增长陷阱”.此外,政府应与伙伴国建立稳定的贸易合作机制,减轻外部市场波动对出口的负面影响,确保工业产出的稳定增长.

3.3.4 进口对工业产出的非线性影响

研究发现,进口对工业产出存在非线性影响,特别是在初始阶段,进口增加对工业产出产生积极影响,这可能是由于进口了高质量的原材料和先进的设备,提高了工业效率.政策制定者应鼓励制造业企业积极利用进口资源,特别是在产业升级的关键阶段.具体而言,政府可以提供进口税收优惠和金融便利,以支持企业获得国外先进设备和关键技术.同时,政策应引导企业在引进进口资源的同时加强创新能力,减少对进口的长期依赖,确保产业体系的自主性和可持续发展.通过实施这些基于非线性关系识别的政策建议,政策制定者可以更有效地促进中国经济部门之间的协调发展,同时最大限度地减少因政策失误导致的经济波动和风险.

4 结论

SINDy 在短期预测方面表现优异,推导出的方程更准确地揭示了中国工业、金融和贸易部门之间的非线性相互作用,为政策制定者提供了深入理解部门关系的视角,强调了非线性动力学在经济建模中的重要性,克服了传统模型假设的局限性,通过识别关键变量及其高阶相互作用,提供了更精确的预测工具和清晰的解释框架.在中国迈向高质量发展的过程中,SINDy 为政策制定者理解和应对部门间的复杂关系提供了强有力的工具.该方法不仅适用于中国的经济发展,也为其他国家的经济预测和政策制定提供了参考.

尽管如此,当前模型主要关注内部经济变量之间的动态关系,但经济系统本质上是开放的,外部因素也会对其产生重要影响,如全球贸易状况、汇率波动、国际资本流动和地缘政治事件等.因此,在解释模型结果和进行政策分析时,可以进一步充分考虑这些外部因素的潜在影响,以增强预测的全面性和实用性.此外,随着 SINDy 方法的不断扩展,通过引入高阶非线性项、整合其他动态建模技术,

可以进一步克服现有的局限性,提升模型的稳健性和对现实经济的适用性.

参考文献

- [1] MOORE J F. Predators and prey: a new ecology of competition [J]. *Harvard Business Review*, 1993, 71(3): 75–86.
- [2] 王闯. 基于 Lotka-Volterra 模型的股东种群共生性分析[J]. *统计与决策*, 2013, 29(9): 170–172.
WANG M. Symbiosis analysis of shareholder populations based on Lotka-Volterra model [J]. *Statistics & Decision*, 2013, 29(9): 170–172. (in Chinese)
- [3] 周甜甜, 王文平. 基于 Lotka-Volterra 模型的省域产业生态经济系统协调性研究 [J]. *中国管理科学*, 2014, 22(增刊1): 240–246.
ZHOU T T, WANG W P. Study on coordination of provincial industrial eco-economic systems based on Lotka-Volterra model [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2014, 22(S1): 240–246. (in Chinese)
- [4] 王圣元, 陈万明. Lotka-VolterraMCGP 模型在协同产品组合设计中的应用[J]. *数学的实践与认识*, 2023, 53(4): 35–42.
WANG S Y, CHEN W M. Application of Lotka-Volterra-MCGP model in collaborative product portfolio design [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2023, 53(4): 35–42. (in Chinese)
- [5] 段文奇, 李辰, 惠淑敏. 基于 Lotka-Volterra 模型的众创空间生态系统共生模式研究[J]. *审计与经济研究*, 2021, 36(3): 107–116.
DUAN W Q, LI C, HUI S M. Lotka-Volterra model based maker space ecosystem symbiotic mode [J]. *Journal of Audit & Economics*, 2021, 36(3): 107–116. (in Chinese)
- [6] 徐梦瑞. 广义 Lotka-Volterra 系统的动力学行为分析[D]. 济南: 山东大学, 2023.
XU M R. Analysis of the dynamical behavior of generalized Lotka-Volterra systems [D]. Jinan: Shandong University, 2023. (in Chinese)
- [7] 尹凤伟, 王学明, 薛海. 考虑碰摩的长轴承-双盘转子系统的非线性动力学特性[J]. *北京交通大学学报*, 2024, 48(6): 122–132.
YIN F W, WANG X M, XUE H. Nonlinear dynamic characteristics of a dual flexible rotor system

- with rub-impact supported by long journal bearings [J]. *Journal of Beijing Jiaotong University*, 2024, 48(6): 122–132. (in Chinese)
- [8] 李俊瑞, 张艳霞. 带有环境净化的分数阶 Solow 模型及动力学分析[J]. *系统工程学报*, 2020, 35(1): 1–12.
LI J R, ZHANG Y X. Fractional order Solow model with environmental purification and its dynamic analysis [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2020, 35(1): 1–12. (in Chinese)
- [9] 王艳, 董宁宁, 王俊. 二维材料非线性光学及超快动力学研究进展[J]. *中国激光*, 2024, 51(11): 433–461.
WANG Y, DONG N N, WANG J. Research progress in nonlinear optics and ultrafast dynamics of two-dimensional materials [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2024, 51(11): 433–461. (in Chinese)
- [10] 雷钧天, 白震民, 张瀚月, 等. 非线性动力学分析方法在肌电信号中的应用进展[J]. *中国运动医学杂志*, 2024, 43(7): 554–562.
LEI J T, BAI Z M, ZHANG H Y, et al. Progress in the application of nonlinear dynamic analysis methods in electromyographic signals [J]. *Chinese Journal of Sports Medicine*, 2024, 43(7): 554–562. (in Chinese)
- [11] LI J R, YU S Q. Dynamic analysis for governance-pollution model with education promoting control [J]. *Soft Computing*, 2018, 22(16): 5311–5321.
- [12] 李俊瑞, 郭宇鸣. 资源-环境-经济(REE)模型的非线性动力学分析[J]. *动力学与控制学报*, 2019, 17(1): 56–64.
LI J R, GUO Y M. Nonlinear dynamic analysis of resource-environment-economy (REE) model [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(1): 56–64. (in Chinese)
- [13] 林子飞, 徐伟, 韩群. 基于分数阶导数的经济波动模型的稳定性研究[J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(3): 242–249.
LIN Z F, XU W, HAN Q. Stability analysis of an economic fluctuation model with fractional derivative [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(3): 242–249. (in Chinese)
- [14] SONG Y, YINGSONG L T, LI TAN Y W, et al. Data-driven modeling of the impact of Internet inclusive finance on the urban-rural income gap in the E-commerce era [J]. *Journal of Internet Technology*, 2022, 23(6): 1377–1388.
- [15] TEFATSION L, JUDD K L. *Handbook of computational economics; agent-based computational economics* [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [16] GU S H, KELLY B, XIU D C. Empirical asset pricing via machine learning [J]. *The Review of Financial Studies*, 2020, 33(5): 2223–2273.
- [17] BRUNTON S L, PROCTOR J L, NATHAN KUTZ J. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2016, 113(15): 3932–3937.
- [18] MANGAN N M, KUTZ J N, BRUNTON S L, et al. Model selection for dynamical systems via sparse regression and information criteria [J]. *Proceedings Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 2017, 473(2204): 20170009.
- [19] KAISER E, KUTZ J N, BRUNTON S L. Sparse identification of nonlinear dynamics for model predictive control in the low-data limit [J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 2018, 474(2219): 20180335.
- [20] 陈竑宇, 陈提. 挠性航天器姿态动力学数据驱动辨识与控制[J]. *力学学报*, 2024, 56(2): 433–445.
CHEN H Y, CHEN T. Data-driven identification and control of flexible spacecraft attitude dynamics [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(2): 433–445. (in Chinese)
- [21] PROKOP B, GELENS L. From biological data to oscillator models using SINDy [J]. *iScience*, 2024, 27(4): 109316.
- [22] SCHAEFFER H. Learning partial differential equations via data discovery and sparse optimization [J]. *Proceedings Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 2017, 473(2197): 20160446.
- [23] 郭嘉凯. 基于稀疏识别算法的混沌系统参数识别研究[D]. 太原: 山西大学, 2023.
GUO J K. Research on parameter identification of chaotic systems based on sparse identification algorithm [D]. Taiyuan: Shanxi University, 2023. (in Chinese)
- [24] SEABOLD S, PERKTOLD J. *Statsmodels: econometric and statistical modeling with Python* [C]// *Proceedings of the Python in Science Conference*. Austin, TX, USA: SciPy, 2010.