

力学元件网络数值计算方法与数据驱动建模应用*

孙昊¹ 吴启迪¹ 高泽洋¹ 张晓旭^{1,2,3†} 徐鉴¹

(1. 复旦大学 工程与应用技术研究院, 上海 200433)

(2. 复旦大学 智能机器人教育部工程研究中心, 上海 200433)

(3. 复旦大学 教育部脑科学前沿中心, 上海 200433)

摘要 系统辨识的手段主要分为两类,一类是基于第一性原理的建模体系,另一类则是基于机器学习方法的数据驱动建模。尽管数据驱动模型在精度上更有优势,但物理可解释性的缺乏往往导致模型可靠性难以论证,从而限制了其在工程领域的广泛应用。力学元件网络 (elementary mechanical network, EMN) 作为一种数据驱动建模新方法,其模型范式遵循现有的力学理论框架,从而确保辨识结果可以通过力学的视角加以解释。然而,由于 EMN 结构中存在诸多约束,其模型精度不及神经网络等数据驱动方法,因此,在模型架构的基础上提高网络的逼近能力是 EMN 进一步发展和应用的关键。本文首先从 EMN 的数值计算角度出发,为 EMN 建立了一套微分一代数显式求解框架,并基于此框架设计了包含欧拉法、二阶龙格-库塔法和四阶龙格-库塔法在内的数值求解算法。其次,通过数值算例分析了新框架下 EMN 的计算精度及其初值敏感性,同时比较了三种数值计算方法在求解能力、稳定性和时间复杂度上的差异,为后续方法的选择提供依据。最后进行仿真实验,通过训练 EMN 构建 LuGre 摩擦力的等效模型。实验结果表明,训练后 EMN 均方误差 (mean square error, MSE) 仅为 0.0018,且能够有效还原模型的内部状态变量,验证了 EMN 用于模型定量、定性特征双逼近的可行性。

关键词 数据驱动建模, 物理可解释性网络, 机器学习, 系统辨识, 可重构网络

中图分类号: TP391

文献标志码: A

Numerical Computation of Elementary Mechanical Networks and Its Applications in Data-Driven Modeling*

Sun Hao¹ Wu Qidi¹ Gao Zeyang¹ Zhang Xiaoxu^{1,2,3†} Xu Jian¹

(1. Academy for Engineering & Technology, Fudan University, Shanghai 200433, China)

(2. MOE Engineering Research Center of AI & Robotics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

(3. MOE Frontiers Center for Brain Science, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract System identification methods are primarily divided into two categories: one is based on first-principles modeling, and the other on data-driven modeling via machine learning. Although data-driven models provide higher accuracy, their lack of physical interpretability can lead to challenges in validating model reliability, thereby limiting their widespread application in engineering. As a novel data-driven modeling approach, the elementary mechanical network (EMN) adheres to the existing mechanical theory framework, ensuring that the identified results can be interpreted from a mechanical perspective. However, due to the numerous constraints within the EMN structure, its modeling accuracy is inferior

2024-09-11 收到第 1 稿, 2025-01-26 收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目 (12372065, 12372022), 机器人技术与系统国家重点实验室开放基金资助 (SKLRS-2023-KF-19), National Natural Science Foundation of China (12372065, 12372022), State Key Laboratory of Robotics and Systems (HIT) (SKLRS-2023-KF-19).

† 通信作者 E-mail: zhangxiaoxu@fudan.edu.cn

to other data-driven methods such as neural networks. Therefore, enhancing the network's fitting capability within the existing model architecture is key to further development and application of EMN. This paper first develops a set of differential-algebraic explicit solution frameworks for EMN from the perspective of numerical computation and designs numerical solving algorithms, including the Euler method, the second-order Runge-Kutta method, and the fourth-order Runge-Kutta method based on this framework. Next, numerical examples are provided to analyze the computational accuracy and initial sensitivity of EMN under the new framework, while comparing the three numerical methods in terms of solving capability, stability, and time complexity, offering a basis for subsequent method selection. Finally, simulation experiments are conducted to build an equivalent model of LuGre friction by training the EMN. The experimental results show that the trained EMN achieves a mean square error (MSE) of only 0.0018 and can effectively reproduce the internal state variables of the model, verifying the feasibility of EMN for both quantitative and qualitative feature approximation.

Key words data-driven modeling, physically interpretable network, machine learning, system identification, reconfigurable network

引言

在现代工程和科学研究中,系统模型的辨识是理解和预测复杂系统行为的关键步骤.理论上,基于有限输入输出样本辨识所得的模型是真实系统的等价,因而辨识所得的模型也被称为代理模型^[1].按照建立的方式不同,代理模型可被分为经验驱动模型和数据驱动模型.早在1609年,德国天文学家 Kepler 便根据大量的观测资料建立了太阳与火星的运行轨道模型^[2],这也是记载最早的数据驱动建模案例.随后的几百年里,随着分析力学、电磁学等学科的发展,一套完善的第一性原理建模理论体系逐渐形成.基于先验知识推导的经验驱动模型具有物理可解释性强、参数依赖关系明确的优点,成为系统辨识领域的经典手段^[3-5].然而在面对复杂物理系统,例如天气、湍流等混沌系统时,由于未知的方程形式以及初始条件的不确定性,第一性原理建模变得几乎不可能^[6].

得益于计算机性能的进步,根据数据直接获取输入输出之间的关系成为当前系统辨识研究的前沿和热点.2009年,Schmidt等^[7]提出了符号回归算法,旨在通过优化数学表达式来拟合数据.2016年,Brunton等^[8]在符号回归的基础上,提出了稀疏辨识算法,使数据驱动建模方法拓展至高维系统,并在混沌洛伦兹系统上得到了验证.受这两类方法启发,近年来数据驱动辨识方法相关的工作飞速发展.现阶段,数据驱动模型大体可分为两

类,一类是通过多项式^[9-12]、三角函数^[13]、径向基等核函数^[14]线性叠加形成的模型,其模型复杂度也主要取决于核函数的项数.Huang等^[9]便是以多项式为核函数,建立物理系统的变分定律.Udrescu等^[15]基于符号回归,开发了一种由多项式组成的递归多维符号回归算法.由于这类模型是核函数的线性叠加,因此基于线性回归等算法便可以获得模型的最优解析解,其优势在于弱依赖先验知识、易于规模化计算,但是对于高阶模型的拟合效果不佳,甚至出现数值发散的问题^[16-18].另一类建模方法则是由人工神经元经非线性激活函数串联而成的深度神经网络,其模型复杂度主要由网络的规模决定,通常需要较深的网络才能获得拟合程度高的非线性模型^[19-21].因此,基于深度神经网络的数据驱动建模方法需要大量的数据来支撑网络架构,否则可能会过拟合,使模型失效^[22-23].

相较于经验驱动建模,数据驱动建模虽然有更强的拟合能力,但其结果多为抽象的黑箱模型,这一点在深度神经网络中格外明显^[24].黑箱模型隐藏了内部逻辑,仅能获得输入和输出之间的映射,缺乏对模型的解释,难以参考和用于决策过程,因此数据驱动模型的解释性具有重要意义^[25].一种赋予解释性的方法是将物理过程模型与数据驱动建模方法相结合.Reichstein等^[26]通过第一性原理推导系统的最优描述,随后根据机器学习的手段对参数进行学习.Huang等^[27]将拉格朗日量嵌入系统中,使拟合模型能够严格遵循能量意义.对于由

深度神经网络构成的数据驱动模型,由于其网络结构相对固定,难以结合第一性原理进行解释^[28].因此,该形式的数据驱动模型更加关注模型的透明性,即模型背后的实际意义^[29-31].物理信息神经网络(physics-informed neural network, PINN)是一种根据物理知识实现有监督学习任务的神经网络.与结合物理过程的数据驱动建模相比, PINN 将物理条件作为约束,嵌入到深度神经网络的损失函数中,使训练好的模型满足预设的物理规律^[32-33]. Iten 等^[21]提出了编码器—潜变量层—解码器的 PINN 架构,并通过阻尼摆等四个简单物理系统验证了架构的可行性. Chen 等^[34]基于该架构,将空间上离散采样点的时程数据映射为时空连续状态变量,进而再对时空连续状态进行符号回归,得到描述系统运动的偏微分方程.然而, PINN 的解释性在于潜变量层的约束,处理复杂系统时需要大量的数据来支撑网络架构,这导致它的泛用性受到了限制.

不同于上述可解释性的赋能原理,力学元件网络(elementary mechanical network, EMN)以弹簧、阻尼器、滑块等具备物理含义的基本力学元件为“神经元”,提出了内秉力学过程的元件网络建模新架构,从而具备准确且直观的力学可解释性^[35,36].然而,由于各元件之间严格遵循预设的物理规则,力学元件网络在计算过程中产生了大量的隐式非线性常微分方程,直接求解的计算框架效率较低,且网络规模受到限制,深度超过两层时无法计算.

综上所述,力学元件网络作为一种具备物理意义的数据驱动模型,可以解释包括系统特性在内的复杂现象.为了进一步提高其网络深度并保证计算精度,本文对网络模型的组网规则和数值计算方法进行了改进.

文章后续内容安排如下:第一节整理了力学元件网络的架构及模型.第二节基于该架构设计了求解框架和计算方法,旨在将隐式非线性常微分方程组改造为显式求解形式,进一步提高力学元件网络模型的计算效率,并使网络深度不受限制.第三节通过数值算例检验求解算法的精度和速度,随后讨论了初始条件对力学元件网络的影响.第四节将改进后的力学元件网络应用于 LuGre 摩擦模型,根据网络训练结果验证力学元件网络的精度和物理

可解释性.最后总结全文,并探讨了力学元件网络的未来研究方向.

1 力学元件网络基本架构与建模

前期工作已经提出了力学元件网络的基本架构,并就其力—变形的信息传递范式进行了讨论^[35].本文重点在于提出更高效的数值计算方法,以改善前期工作计算精度和网络规模无法兼顾的缺陷.

1.1 力学元件组网规则

为方便读者理解,本文首先简要介绍力学元件网络的模型范式及元件组网规则.目前,力学元件网络由滑块、阻尼器、线性弹簧3种元件组成,分别表示接触作用中常见的干摩擦、黏性摩擦、弹性形变作用.

如图1所示,这3类元件首先通过并联形成1个模块;各模块经过串联形成1个组;各组再经过并联形成1个网络.

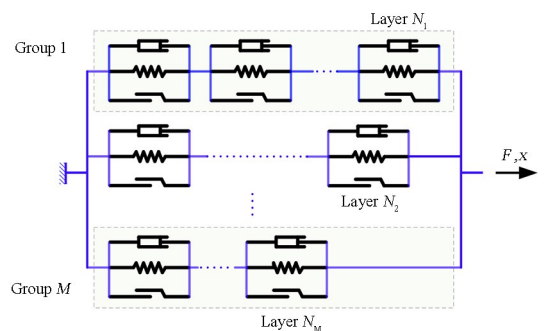


图1 力学元件网络通用架构

Fig.1 The general architecture of elementary mechanical network

为确保网络模型表达的唯一性,本文约定如下组网规则:

规则1: 元件排列规则.各模块中的力学元件由上至下按阻尼器、弹簧、滑块的顺序依次排列.

规则2: 模块排列规则.各组中的模块由左至右,首先按照滑块摩擦力阈值的升序排列;若存在摩擦力阈值相同的情形,则再按照阻尼器阻尼系数的升序排列;否则,按照弹簧刚度系数的升序排列.

规则3: 组排列规则.网络中各组由上至下,首先按照模块层数的升序排列;若模块层数相同,则再按照模块中滑块摩擦力阈值的升序排列;若滑块摩擦力阈值相同,则再按照模块中阻尼器阻尼系数的升序排列;否则,按照弹簧刚度系数的升序排列.

规则 4: 单滑块规则. 同一组模块中,最多只允许出现一个单滑块模块,制定该规则的原因在于,若某一组出现两个单滑块模块,不妨假设其摩擦阈值满足 $\mu_{i1} < \mu_{i2}$,则该组能产生的作用力最大仅可达 μ_{i1} ,第二个单滑块模块永远无法被激活,为无效模块.

假设第 i 组的第 j 个模块中的滑块摩擦力阈值为 μ_{ij} ,那么根据规则 2,一定满足

$$\mu_{i1} \leq \mu_{i2} \leq \dots \leq \mu_{iN_i}. \quad (1)$$

假设力学元件网络包含 M 组,其中第 i 组包含 N_i 个模块,那么根据规则 3,一定满足

$$N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_M. \quad (2)$$

假设第 i 组的第 S_i 个模块为单滑块模块,那么根据规则 2 和 4,该模块之后的模块永远无法被激活,即第 i 组的有效模块层数为 S_i .

1.2 力学元件网络建模

假设第 i 组的第 j 个模块的变形量为 x_{ij} ,模块中滑块摩擦力阈值为 μ_{ij} ,阻尼器阻尼系数为 c_{ij} ,弹簧刚度系数为 k_{ij} ,则该模块产生的作用力可以表示为

$$f_{ij} = \mu_{ij} \tanh(\alpha \dot{x}_{ij}) + c_{ij} \dot{x}_{ij} + k_{ij} x_{ij}, \quad (3)$$

式中 α 为光滑因子,值越小表示于摩擦的光滑化程度越高.

根据力学元件的串联范式,即“变形叠加,力相等”的原则,第 i 组各模块变形满足如下约束条件

$$\sum_{j=1}^{S_i} x_{ij} = x, \quad (4)$$

$$f_{ij} = f_{i1}, j = 2, 3, \dots, S_i. \quad (5)$$

式中, x 表示元件网络端部总位移.

特别地,若 $S_i = 1$,由式(4)可知 $x_{i1} = x$,此时网络第 i 组的作用力可由式(3)直接计算得到.若 $S_i \geq 2$,将式(3)、式(4)代入式(5)可得

$$\begin{aligned} & \mu_{ij} \tanh(\alpha \dot{x}_{ij}) + c_{ij} \dot{x}_{ij} + k_{ij} x_{ij} \\ &= \mu_{i1} \tanh(\alpha \dot{x}_{i1}) + c_{i1} (\dot{x} - \sum_{j=2}^{S_i} \dot{x}_{ij}) + \\ & \quad k_{i1} (x - \sum_{j=2}^{S_i} x_{ij}). \end{aligned} \quad (6)$$

进一步,根据网络的定义方式,第 1 层模块必然产生变形.由于网络不具备惯性,因此第 1 层模块的变形趋势与全局变形趋势相同.因此,式(6)可以改写为

$$\begin{aligned} & \mu_{ij} \tanh(\alpha \dot{x}_{ij}) + c_{ij} \dot{x}_{ij} + k_{ij} x_{ij} \\ &= \mu_{i1} \tanh(\beta \dot{x}) + c_{i1} (\dot{x} - \sum_{j=2}^{S_i} \dot{x}_{ij}) + \\ & \quad k_{i1} (x - \sum_{j=2}^{S_i} x_{ij}). \end{aligned} \quad (7)$$

式中, β 也表示光滑因子.考虑元件网络总位移 x 高于单个模块变形 x_{i1} ,为使滑块滑移率尽量保持一致,一般取 $\beta = \alpha$.

记

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}_i = \text{diag}(\boldsymbol{\mu}_i), \mathbf{C}_i = \text{diag}(\mathbf{c}_i), \mathbf{K}_i = \text{diag}(\mathbf{k}_i), \\ & \boldsymbol{\mu}_i = \begin{bmatrix} \mu_{i2} \\ \mu_{i3} \\ \vdots \\ \mu_{iS_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{S_i-1}, \mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} c_{i2} \\ c_{i3} \\ \vdots \\ c_{iS_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{S_i-1}, \\ & \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} k_{i2} \\ k_{i3} \\ \vdots \\ k_{iS_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{S_i-1}, \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i2} \\ x_{i3} \\ \vdots \\ x_{iS_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{S_i-1}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{S_i-1}, \end{aligned}$$

式(7)的矩阵形式可以写为

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}_i \tanh(\alpha \dot{\mathbf{x}}_i) + (\mathbf{C}_i + c_{i1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \dot{\mathbf{x}}_i + (\mathbf{K}_i + k_{i1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \mathbf{x}_i \\ &= [k_{i1} x + c_{i1} \dot{x} + \mu_{i1} \tanh(\beta \dot{x})] \mathbf{v} \end{aligned} \quad (8)$$

上式两端关于时间 t 求导,并令 $\mathbf{y}_i = \dot{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{R}^{S_i-1}$,可得

$$\begin{aligned} & [\mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i) + c_{i1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T] \dot{\mathbf{y}}_i \\ &= -(\mathbf{K}_i + k_{i1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \mathbf{y}_i + g(\dot{x}, \ddot{x}) \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$g(\dot{x}, \ddot{x}) = k_{i1} \dot{x} + c_{i1} \ddot{x} + \beta \mu_{i1} [1 - \tanh^2(\beta \dot{x})] \ddot{x},$$

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i) = \text{diag}[\mathbf{h}_i(\mathbf{y}_i)],$$

$$\mathbf{h}_i(\mathbf{y}_i) = \begin{bmatrix} h_{i2}(y_{i2}) \\ h_{i3}(y_{i3}) \\ \vdots \\ h_{iS_i}(y_{iS_i}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{i2} + \alpha \mu_{i2} [1 - \tanh^2(\alpha y_{i2})] \\ c_{i3} + \alpha \mu_{i3} [1 - \tanh^2(\alpha y_{i3})] \\ \vdots \\ c_{iS_i} + \alpha \mu_{iS_i} [1 - \tanh^2(\alpha y_{iS_i})] \end{bmatrix}.$$

式(9)即所示力学元件网络的通用模型,求解得到 \mathbf{y}_i 后,可按照适当的初始条件积分得到 \mathbf{x}_i .进一步,将 x_{i1} 代入式(3)即可计算得到网络第 i 组的作用力.

对于式(9)所示微分方程的求解问题,一方面,

考虑到元件网络存在摩擦阈值或阻尼系数为0的情形,状态量 $\dot{\mathbf{y}}_i$ 的系数矩阵 $\mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i) + c_{i1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T$ 极有可能不满秩,经典数值计算方法将会失效.另一方面,注意到 $\mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i)$ 是对角阵, $\mathbf{v} \mathbf{v}^T$ 为全一矩阵,其逆存在解析表达.因此,我们可以利用系数矩阵的特性构造式(9)的求解算法,从而实现元件网络的高精度仿真计算.

2 元件网络模型的数值计算方法

式(9)是力学元件网络模型的隐函数表达形式,尽管可以采用隐函数数值计算方法(如MATLAB的ode15i函数)对其响应进行计算,但在式(9)的微分系数矩阵 $\mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i) + c_{i1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T$ 不满秩时,隐式数值求解方法将面临发散问题.为此,需要将式(9)改写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_{i,a} = \boldsymbol{\varphi}_a[\mathbf{y}_{i,a}, g(\dot{x}, \ddot{x})], \\ \mathbf{y}_{i,b} = \boldsymbol{\varphi}_b[\mathbf{y}_{i,a}, g(\dot{x}, \ddot{x})], \end{cases} \quad (10)$$

的微分一代数显式求解形式.其中, $\mathbf{y}_{i,a} \in \mathbb{R}^{N_{i,a}}$ 表示存在微分变换关系的独立状态变量, $\mathbf{y}_{i,b} \in \mathbb{R}^{N_{i,b}}$ 表示与 $\mathbf{y}_{i,a}$ 线性相关的非独立状态变量,其维数满足 $N_{i,a} + N_{i,b} = S_i - 1$.注意, $N_{i,b}$ 可以为0,此时状态向量 $\mathbf{y}_{i,b}$ 为空向量.

2.1 微分方程的显式求解形式改造

要将式(9)改造为式(10)所示的显式求解形式,关键是分情况给出系数矩阵 $\mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i) + c_{i1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T$ 的逆.为此,我们分如下情况讨论:

Case A: $c_{i1} = 0$

假设向量 $\mathbf{h}_i(\mathbf{y}_i)$ 中非0元素的位置为 $p_r, r = 1, 2, \dots, N_{i,a}$,则可以构造初等变换矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}_{i,a} = (\mathbf{E}_{p_1}, \mathbf{E}_{p_2}, \dots, \mathbf{E}_{p_{N_{i,a}}}) \in \mathbb{R}^{(S_i-1) \times N_{i,a}}, \quad (11)$$

式中 \mathbf{E}_{p_r} 表示 $(S_i - 1) \times (S_i - 1)$ 单位阵的第 p_r 列.同时,假设向量 $\mathbf{h}_i(\mathbf{y}_i)$ 中0元素的位置为 $q_r, r = 1, 2, \dots, N_{i,b}$,则可以构造初等变换矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}_{i,b} = (\mathbf{E}_{q_1}, \mathbf{E}_{q_2}, \dots, \mathbf{E}_{q_{N_{i,b}}}) \in \mathbb{R}^{(S_i-1) \times N_{i,b}}, \quad (12)$$

式中 \mathbf{E}_{q_r} 表示 $(S_i - 1) \times (S_i - 1)$ 单位阵的第 q_r 列.注意, $N_{i,b}$ 可以为0,此时初等变换矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{i,b}$ 为空矩阵.

记 $\boldsymbol{\Phi}_i = (\boldsymbol{\Phi}_{i,a}, \boldsymbol{\Phi}_{i,b})$,则有

$$\boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{i,a}^T \\ \boldsymbol{\Phi}_{i,b}^T \end{pmatrix} \mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{i,a} \\ \mathbf{y}_{i,b} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

且

$$\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\Phi}_i \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{i,a} \\ \mathbf{y}_{i,b} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\Phi}_{i,a}, \boldsymbol{\Phi}_{i,b}) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{i,a} \\ \mathbf{y}_{i,b} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

将式(14)代入式(9),两端同时左乘 $\boldsymbol{\Phi}_i^T$ 可得

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{i,a}(\mathbf{y}_{i,a}) \dot{\mathbf{y}}_{i,a} = -(\mathbf{K}_{i,a} + k_{i1} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^T) \mathbf{y}_{i,a} - k_{i1} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b^T \mathbf{y}_{i,b} + g(\dot{x}, \ddot{x}) \mathbf{v}_a, \\ (\mathbf{K}_{i,b} + k_{i1} \mathbf{v}_b \mathbf{v}_b^T) \mathbf{y}_{i,b} = -k_{i1} \mathbf{v}_b \mathbf{v}_a^T \mathbf{y}_{i,a} + g(\dot{x}, \ddot{x}) \mathbf{v}_b, \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{H}_{i,a}(\mathbf{y}_{i,a}) = \boldsymbol{\Phi}_{i,a}^T \mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i) \boldsymbol{\Phi}_{i,a}$$

$$\mathbf{K}_{i,a} = \boldsymbol{\Phi}_{i,a}^T \mathbf{K}_i \boldsymbol{\Phi}_{i,a},$$

$$\mathbf{K}_{i,b} = \boldsymbol{\Phi}_{i,b}^T \mathbf{K}_i \boldsymbol{\Phi}_{i,b},$$

\mathbf{v}_a 是维数为 $N_{i,a}$ 的1-向量, \mathbf{v}_b 是维数为 $N_{i,b}$ 的1-向量.显然, $\mathbf{H}_{i,a}(\mathbf{y}_{i,a})$ 是对角线元素全非0的对角阵.式(15)第二式状态量对应的模块均不含阻尼(阻尼系数为0),根据规则4及其推论, $\mathbf{K}_{i,b}$ 的对角元至多只有一个0元素.根据规则2,若存在0元素,则该0元素位于第 $p_{N_{i,b}}$ 个模块.注意到此时讨论的是 $c_{i1} = 0$ 且 $S_i \geq 2$ 的情形,根据规则4,必然 $k_{i1} \neq 0$.因此,系数矩阵 $\mathbf{K}_{i,b} + k_{i1} \mathbf{v}_b \mathbf{v}_b^T$ 也是可逆的.由此,式的微分一代数显式求解形式可以写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_{i,a} = -\mathbf{H}_{i,a}^{-1}(\mathbf{y}_{i,a}) (\mathbf{K}_{i,a} + k_{i1} \eta_i \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^T) \mathbf{y}_{i,a} + \eta_i g(\dot{x}, \ddot{x}) \mathbf{H}_{i,a}^{-1}(\mathbf{y}_{i,a}) \mathbf{v}_a, \\ \mathbf{y}_{i,b} = -k_{i1} (\mathbf{K}_{i,b} + k_{i1} \mathbf{v}_b \mathbf{v}_b^T)^{-1} \mathbf{v}_b \mathbf{v}_a^T \mathbf{y}_{i,a} + g(\dot{x}, \ddot{x}) (\mathbf{K}_{i,b} + k_{i1} \mathbf{v}_b \mathbf{v}_b^T)^{-1} \mathbf{v}_b, \end{cases} \quad (16)$$

式中

$$\eta_i = 1 - k_{i1} \mathbf{v}_b^T (\mathbf{K}_{i,b} + k_{i1} \mathbf{v}_b \mathbf{v}_b^T)^{-1} \mathbf{v}_b$$

为常数.

Case B: $c_{i1} \neq 0$

同样,假设向量 $\mathbf{h}_i(\mathbf{y}_i)$ 中0元素的位置为 $q_r, r = 1, 2, \dots, N_{i,b}$,分别构造初等变换矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}'_{i,b} = (\mathbf{E}_{q_1}, \mathbf{E}_{q_2}, \dots, \mathbf{E}_{q_{N_{i,b}-1}}) \in \mathbb{R}^{(S_i-1) \times (N_{i,b}-1)}, \quad (17)$$

和

$$\boldsymbol{\Phi}_{i,c} = \mathbf{E}_{q_{N_{i,b}}} \in \mathbb{R}^{(S_i-1)}, \quad (18)$$

式中 \mathbf{E}_{q_r} 表示 $(S_i - 1) \times (S_i - 1)$ 单位阵的第 q_r 列.

记 $\boldsymbol{\Phi}_i = (\boldsymbol{\Phi}_{i,a}, \boldsymbol{\Phi}'_{i,b}, \boldsymbol{\Phi}_{i,c})$,代入式(9),两端同时左乘 $\boldsymbol{\Phi}_i^T$ 可得

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{i,a}(\mathbf{y}_{i,a}) + c_{i1} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^T & c_{i1} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b^T & c_{i1} \mathbf{v}_a \\ c_{i1} \mathbf{v}_b^T \mathbf{v}_a & c_{i1} \mathbf{v}_b^T \mathbf{v}_b^T & c_{i1} \mathbf{v}_b^T \\ c_{i1} \mathbf{v}_a^T & c_{i1} \mathbf{v}_b^T & c_{i1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_{i,a} \\ \dot{\mathbf{y}}'_{i,b} \\ \dot{y}_{iq_{Ni,b}} \end{pmatrix} \\
& = - \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{i,a} + k_{i1} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^T & k_{i1} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b^T & k_{i1} \mathbf{v}_a \\ k_{i1} \mathbf{v}_b^T \mathbf{v}_a & \mathbf{K}'_{i,b} + k_{i1} \mathbf{v}_b^T \mathbf{v}_b^T & k_{i1} \mathbf{v}_b^T \\ k_{i1} \mathbf{v}_a^T & k_{i1} \mathbf{v}_b^T & k_{iq_{Ni,b}} + k_{i1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{i,a} \\ \mathbf{y}'_{i,b} \\ y_{iq_{Ni,b}} \end{pmatrix} + g(\dot{x}, \ddot{x}) \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{v}'_b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (19)
\end{aligned}$$

其中,

$$\mathbf{y}'_{i,b} = (y_{iq_1}, y_{iq_2}, \dots, y_{iq_{i, N_{i,b}-1}})^T,$$

$$\mathbf{H}_{i,a}(\mathbf{y}_{i,a}) = \Phi_{i,a}^T \mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i) \Phi_{i,a},$$

$$\mathbf{K}_{i,a} = \Phi_{i,a}^T \mathbf{K}_i \Phi_{i,a}, \mathbf{K}'_{i,b} = \Phi_{i,b}^T \mathbf{K}_i \Phi'_{i,b},$$

\mathbf{v}_a 是维数为 $N_{i,a}$ 的 1-向量, \mathbf{v}'_b 是维数为 $N_{i,b}-1$ 的 1-向量. 显然, 由于 $c_{i1} \neq 0$, 式(19)比式(15)多了两项微分耦合项.

式(19)的第 3 分块行两端同时左乘 \mathbf{v}'_b , 并与式(19)的第 2 分块行相减可得

$$\mathbf{K}'_{i,b} \mathbf{y}'_{i,b} = k_{iq_{Ni,b}} y_{iq_{Ni,b}} \mathbf{v}'_b, \quad (20)$$

这表明状态变量 $\mathbf{y}'_{i,b}$ 与 $y_{iq_{Ni,b}}$ 完全线性相关. 进一步, 根据规则 4 及其推论, $\mathbf{K}'_{i,b}$ 对角元素不可能为 0. 因此, 由该式可知

$$\mathbf{y}'_{i,b} = k_{iq_{Ni,b}} y_{iq_{Ni,b}} \mathbf{K}'_{i,b}^{-1} \mathbf{v}'_b. \quad (21)$$

代入式(19)可得

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{H}'_{i,a}(\mathbf{y}'_{i,a}) + c_{i1} \mathbf{v}'_a \mathbf{v}'_a^T] \dot{\mathbf{y}}'_{i,a} \\
& = -(\mathbf{K}'_{i,a} + k_{i1} \mathbf{v}'_a \mathbf{v}'_a^T) \mathbf{y}'_{i,a} + g(\dot{x}, \ddot{x}) \mathbf{v}'_a, \quad (22)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{H}'_{i,a}(\mathbf{y}'_{i,a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}'_{i,a}(\mathbf{y}'_{i,a}) & k_{iq_{Ni,b}} c_{i1} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b^T \gamma'_{k,i,b} \\ \mathbf{0}_{1 \times N_{i,a}} & k_{iq_{Ni,b}} c_{i1} \mathbf{v}_b^T \gamma'_{k,i,b} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}'_{i,a} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}'_{i,a} & k_{iq_{Ni,b}} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b^T \gamma'_{k,i,b} \\ \mathbf{0}_{1 \times N_{i,a}} & k_{iq_{Ni,b}} k_{i1} \mathbf{v}_b^T \gamma'_{k,i,b} \end{pmatrix} \end{cases}$$

显然, 系数矩阵 $\mathbf{H}'_{i,a}(\mathbf{y}'_{i,a}) + c_{i1} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^T$ 是可逆矩阵.

参考式(10)所示形式, 可以将式(21)和(22)改写为微分一代数显式求解形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}'_{i,a} = -[\mathbf{H}'_{i,a}(\mathbf{y}'_{i,a}) + c_{i1} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^T]^{-1} (\mathbf{K}'_{i,a} + k_{i1} \mathbf{v}'_a \mathbf{v}'_a^T) \mathbf{y}'_{i,a} + g(\dot{x}, \ddot{x}) [\mathbf{H}'_{i,a}(\mathbf{y}'_{i,a}) + c_{i1} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^T]^{-1} \mathbf{v}'_a \\ \dot{\mathbf{y}}'_{i,b} = k_{iq_{Ni,b}} y_{iq_{Ni,b}} \mathbf{K}'_{i,b}^{-1} \mathbf{v}'_b \end{cases}$$

2.2 显式求解形式的数值求解算法

由 2.1 小节的推导可以看出, 在第 i 组的有效

模块层数 $S_i \geq 2$ 的条件下, 若 $c_{i1} = 0$, 则按照式(16)所示微分代数方程求解该组各模块的变形速率 \mathbf{y}_i ; 若 $c_{i1} \neq 0$, 则按照式(23)所示微分代数方程求解该组各模块的变形速率 \mathbf{y}_i . 为方便理解, 表 1 展示了力学元件网络数值求解过程的伪码.

表 1 力学元件网络模型数值求解伪码

Table 1 Pseudocode for numerical solution of EMN

Algorithm Numerical Solution of EMN

Input: EMN structure and initial parameters

Output: Resultant force f , node deformation \mathbf{x}_i and deformation rate \mathbf{y}_i

For $i=1:M$

If $S_i=1$

$y_{i1} = \dot{x}; \quad x_{i1} = x;$

Else

If $c_{i1}=1$

$\mathbf{H}_{i,a} = \Phi_{i,a}^T \mathbf{H}_i \Phi_{i,a}$

$\mathbf{K}_{i,a} = \Phi_{i,a}^T \mathbf{K}_i \Phi_{i,a}; \mathbf{K}_{i,b} = \Phi_{i,b}^T \mathbf{K}_i \Phi_{i,b}$

Substitute them into Eq. and employ numerical methods to get $\mathbf{y}_{i,a}$ and $\mathbf{y}_{i,b}$;

Substitute $\mathbf{y}_{i,a}$ and $\mathbf{y}_{i,b}$ into Eq. to get \mathbf{y}_i ;

Else

$\mathbf{H}_{i,a} = \Phi_{i,a}^T \mathbf{H}_i \Phi_{i,a}$

$\mathbf{K}_{i,a} = \Phi_{i,a}^T \mathbf{K}_i \Phi_{i,a}; \mathbf{K}_{i,b} = \Phi_{i,b}^T \mathbf{K}_i \Phi_{i,b}$

Reconstruct $\mathbf{H}'_{i,a}$ and $\mathbf{K}'_{i,a}$ by referring to Eq. (22). Substitute $\mathbf{H}'_{i,a}$ and $\mathbf{K}'_{i,a}$ into Eq. (23) and employ numerical methods to get $\mathbf{y}'_{i,a}$ and $\mathbf{y}'_{i,b}$. Then, use $\mathbf{y}'_{i,a}$ and $\mathbf{y}'_{i,b}$ to reconstruct \mathbf{y}_i ;

End if

End if

$f_i = \mu_{i1} \tanh(ay_{i1}) + c_{i1} y_{i1} + k_{i1} x_{i1}; f = f + f_i;$

End for

3 数值计算性能分析

根据表 1, \mathbf{y}_i 的计算方法对力学元件网络的计算精度有着重要意义. 为此, 我们设计了欧拉法、二阶龙格-库塔法(second-order Runge-Kutta method, RK2)和四阶龙格-库塔法(fourth-order Runge-Kutta method, RK4)这三种不同的求解方

式,以满足实际应用过程中对网络精度和训练时间的不同需求.为了评估计算方法对算法性能的影响,我们设计了四个数值算例,并在 MATLAB R2023a 中进行仿真实验,硬件环境为 Intel(R) Xeon(R) Platinum 8124 M CPU @3.00 GHz.

3.1 固定步长下的精度与速度分析

在计算方法的精度与速度分析上,我们首先构造了一个符合 $\mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i) + c_{i1}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ 满秩的数值算例,由此可以调用 MATLAB 数值计算函数 ode15i,并根据其计算结果验证数值求解算法的有效性.为此,我们建立了一个 1 组 4 层的串联模型,其中各模块均由一个弹性元件和一个阻尼元件组成,模型的数学表示如下:

$$\begin{cases} F = F_i = k_i x_i + c_i \dot{x}_i, \\ F_1 = F_2 = F_3 = F_4, \\ x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \end{cases} \quad (24)$$

其中, k_i 和 c_i 为各模块的弹簧刚度系数和黏性阻尼系数.

由于该算例中不存在滑块元件(干摩擦),如式(24)所示,在 c_i 大于 0 矩阵 $\mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i) + c_{i1}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ 必然满秩,此时隐函数数值计算方法 ode15i 可用于力学元件网络的求解.我们定义作用力信号为

$$F = \frac{1}{2} \sin(\pi t) \left[1 - \cos\left(\frac{\pi t}{15}\right) \right] \quad (25)$$

由式(24)和式(25)仿真可得变形量 x_1 至 x_4 ,再将它们作为力学元件网络的输入,计算得到网络的响应力 F_{pred} .最终通过对比 F_{pred} 和 F 来获得不同方法对数值求解算法性能的影响.仿真中我们取时间步长 dt 为 0.001 s,仿真时间长度 t 为 30 s,模型参数如下表所示.本文中设计的数值算例均无量纲,以避免单位尺度不统一产生的影响.

表 2 数值算例 1 参数表

Table 2 Parameters of numerical example 1

k_1	k_2	k_3	k_4	c_1	c_2	c_3	c_4	α	β
1	2	5	4	0.1	0.9	2	4	100	100

由图 2 可知,由于该数值算例复杂度不高,求解较为简单,我们设计的三种求解算法和 ode15i 求解器均能有效预测外力,仿真过程中的最大均方根误差(root mean square error, RMSE)仅为 $1.22\text{e}-03$,从而验证了本文所提数值求解算法(表

1)的可行性.在该算例仿真中,Euler 法的求解精度甚至优于 RK2 算法.因此,在网络中无滑块元件的情况下,我们优先选择 Euler 法进行求解,其计算成本远低于 RK2 和 RK4 算法,求解精度却相差不大.

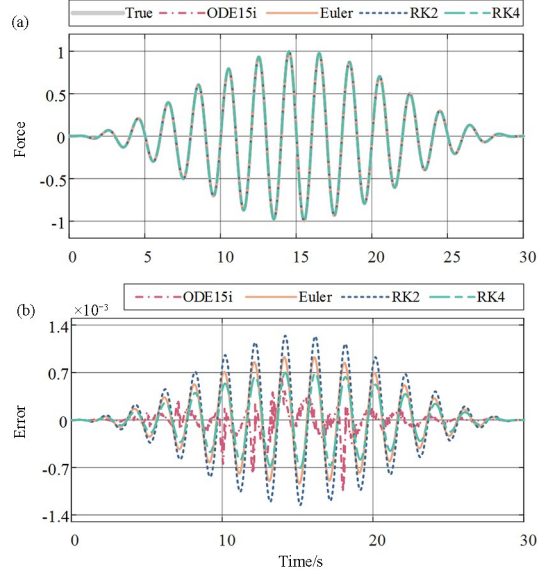


图 2 数值算例 1 仿真实验结果:(a) 四种计算方法的网络响应力对比;(b) 各响应力与施加外力的误差对比

Fig. 2 The simulation results of numerical example 1: (a) Comparison of response forces obtained from four calculation methods; (b) Comparison of errors between each response force and the applied force signal

在算例 1 的基础上,我们加入了滑块元件,进一步提高模型的复杂度.数值算例 2 的模型为

$$\begin{cases} F_i = c_i v_i + \text{sign}(F_i)\mu_i + k_i x_i, |F_i| > \mu_i, \\ F_1 = F_2 = F_3 = F_4, \\ x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \end{cases} \quad (26)$$

其中, μ_i 为滑动阈值(干摩擦系数),只有响应力大于阈值时该单元才开始变形.同样,我们定义如式(25)所示的外力信号,模型的弹簧刚度系数和黏性阻尼系数与数值算例 1 保持一致,滑动阈值如表 3 所示.

表 3 数值算例 2 滑动阈值参数表

Table 3 Sliding threshold parameters for numerical example 2

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0.001	0.1	0.3	0.6

由于 ode15i 在该条件下失效,所以我们仅使用 Euler、RK2、RK4 等数值求解算法进行网络性能的验证,计算结果如图 3 所示.

对于有滑动摩擦阈值的复杂模型,基于 Euler 法的数值求解算法精度不理想,特别是在仿真后期存在较大的误差. 相较而言,基于 RK2 和 RK4 的求解算法在仿真过程中能够始终逼近预设外力,因此是 EMN 训练和求解中的更优选择. 仿真实验结果汇总于表 4 中以供参考.

表 4 数值算例 1 与数值算例 2 计算耗时与仿真误差
Table 4 Simulation time and errors for numerical example 1 and numerical example 2

Method	Numerical example 1		Numerical example 2	
	Time/s	RMSE	Time/s	RMSE
ode15i	0.272	1.650e-04	Invalid	Invalid
Euler	0.229	4.058e-04	0.246	0.053
RK2	0.446	5.430e-04	0.462	0.042
RK4	1.113	3.061e-04	1.130	0.029

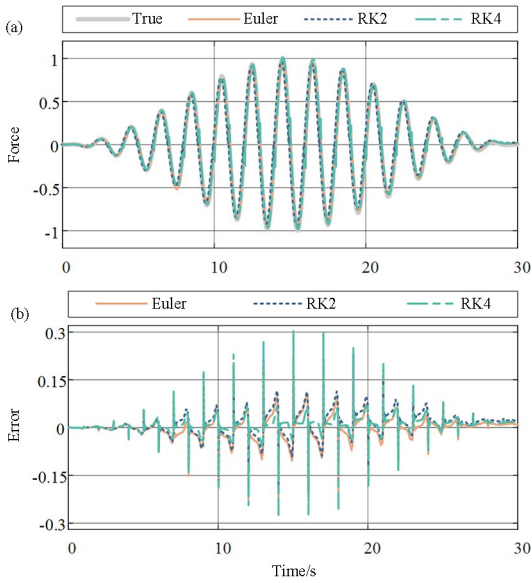


图 3 数值算例 2 仿真实验结果:(a) 三种计算方法的网络响应力对比;(b) 各响应力与施加外力的误差对比
Fig. 3 The simulation results of numerical example 2: (a) Comparison of response forces obtained from three calculation methods; (b) Comparison of errors between each response force and the applied force signal

3.2 状态变量初值敏感性分析

在足地接触这类真实场景中,由于接触前已经有一定的运动状态,力学元件网络的输入初值并不一定为 0. 因此,我们需要探讨状态变量初值不确定性对网络的影响. 在数值算例 2 的基础上,我们设计数值算例 3,其中模型参数保持一致,而作用力信号设置为

$$F = \frac{1}{2} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \left\{1 - \cos\left[\frac{\pi t}{15}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}. \quad (27)$$

由于作用力初值不为零,根据式(26)仿真出的初始速度也不为零. 相较于数值算例 2,我们可视为力学元件网络的状态变量初值仅存在微小扰动. 力学元件网络预测如图 4 所示,误差和耗时记于表 5.

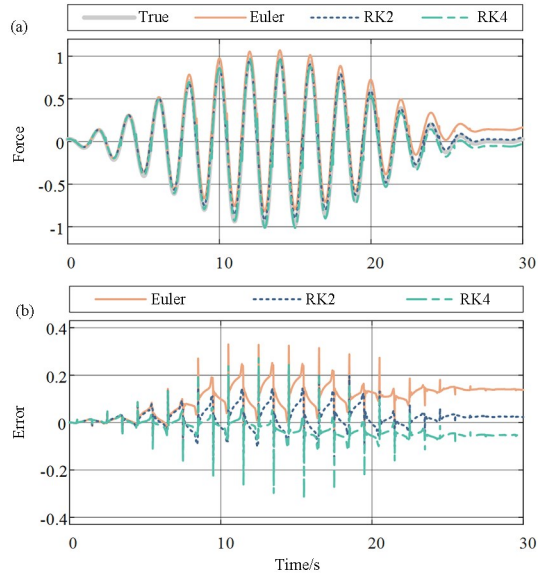


图 4 数值算例 3 仿真实验结果:(a) 三种计算方法的网络响应力对比;(b) 各响应力与施加外力的误差对比
Fig. 4 The simulation results of numerical example 3: (a) Comparison of response forces obtained from three calculation methods; (b) Comparison of errors between each response force and the applied force signal

表 5 数值算例 3 与数值算例 4 计算耗时与仿真误差
Table 5 Simulation time and errors for numerical example 3 and numerical example 4

Method	Numerical example 3		Numerical example 4	
	Time/s	RMSE	Time/s	RMSE
Euler	0.249	0.115	0.229	0.146
RK2	0.428	0.043	0.420	0.120
RK4	1.055	0.040	1.037	0.100

与前两个算例的仿真结果相比, Euler 法在 EMN 输入存在初值时误差进一步增大,几乎完全偏离预设外力. 而 RK2 和 RK4 则依然可以逼近预设外力,且二者的 RMSE 相差不大. 然而, RK2 的计算速度远高于 RK4.

在数值算例 4 中,我们继续增大预设外力的初值,以进一步分析力学元件网络对状态变量初值的敏感性. 在模型参数不变的条件下,我们设置外力信号为

$$F = \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left[\frac{\pi}{15}\left(t + \pi\right)\right]. \quad (28)$$

通过表 5 中的可以看出,该算例下力学元件网络的计算误差明显高于前述数值算例. 对图 5 所示

的实验结果进行分析后发现,在仿真前半段,受初始状态的影响,三种方法的计算结果均与实际值存在较大偏差.然而,随着时间的推移,RK2和RK4方法逐渐收敛,而Euler法始终未能有效减小误差.因此,我们仅在对网络计算速度有非常高的要求时才会使用欧拉法进行力学元件网络的数值求解.此外,由于RK4在速度上的巨大劣势,综合考虑后我们选择RK2作为力学元件网络的常规计算方法.

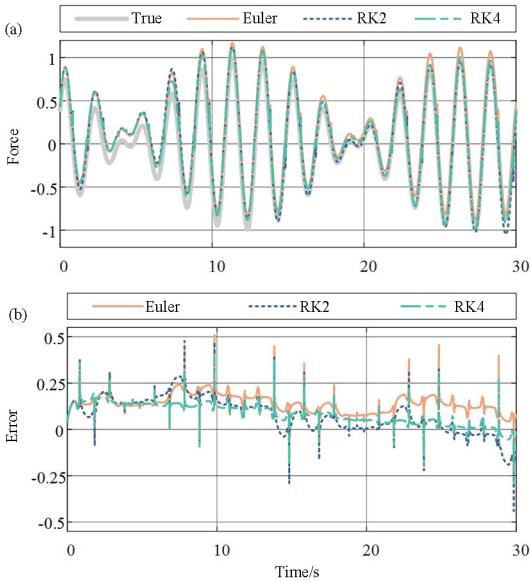


图5 数值算例4仿真实验结果:(a)三种计算方法的网络响应力对比;(b)各响应力与施加外力的误差对比
Fig. 5 The simulation results of numerical example 4:
(a) Comparison of response forces obtained from three calculation methods; (b) Comparison of errors between each response force and the applied force signal

4 力学元件网络应用验证

力学元件网络在实际应用过程中,需要通过特定的算法进行训练,使其能够根据输入的运动信息预测出接触力.网络的训练分为元件参数训练和结构拓扑优化两部分,前者通过粒子类启发式优化算法辨识网络中各元件的最优参数,后者根据对响应力的贡献率删除冗余的元件组、层和元件.两者交替进行,每进行一次循环称为一次迭代,直至收敛到最简结构.上述力学元件网络的具体训练算法及其流程图可参考本文前期研究^[35,36].

需要说明的是,此前工作^[35,36]中我们已对深度为两层的力学元件网络进行了详细分析,特别是对预滑移等接触特征的表征.由于网络整体力学行为由各个元件之间的相互作用决定,网络规模成为制约其精度和可解释性的主要因素.得益于本文提

出的新计算框架,力学元件网络的深度得以进一步扩展.因此,我们希望将其应用在复杂模型上,对系统中的力学行为进行建模与解释,以提升对模型机理的理解和准确性.

4.1 验证模型设计

LuGre模型是一种用于描述动力系统中摩擦现象的经典模型^[37].通过引入内部状态变量,其在非线性摩擦、静摩擦和黏滑现象等复杂摩擦行为方面有较好的表现.该内部状态变量可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{z} = v - \frac{|v|}{g(v)}z, \\ g(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^\delta}, \end{cases} \quad (29)$$

其中, F_c 代表动摩擦力, F_s 为静摩擦力, v_s 用于表征从静摩擦到动摩擦过渡的特征速度, δ 表示摩擦力过渡的陡峭程度.根据内部状态变量 z ,LuGre摩擦力定义为:

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v, \quad (30)$$

其中, σ_0 代表微观黏滑的刚性, σ_1 为内部阻尼, σ_2 表示黏性摩擦系数.仿真过程中模型参数如表6所示.

表6 LuGre摩擦模型参数表
Table 6 Parameters of LuGre friction model

F_c	F_s	v_s	δ	σ_0	σ_1	σ_2
10	15	0.1	2	100	3	5

在两层的力学元件网络中,内部状态量难以还原,网络拟合效果差,训练损失大.因此,我们希望通过更深的力学元件网络来解释LuGre模型的内在机理.我们设置仿真实验的变形过程为:

$$x = \begin{cases} \frac{at^2}{2} & t \in \left[0, \frac{T}{3}\right) \\ \frac{aTt}{3} - \frac{aT^2}{18} & t \in \left[\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\right) \\ -\frac{at^2}{2} + aTt - \frac{5aT^2}{18} & t \in \left[\frac{2T}{3}, T\right) \end{cases} \quad (31)$$

为了提高力学元件网络的泛化性,我们设置三组幅值不同的变形过程,如表7所示.

表7 LuGre摩擦模型仿真实验参数表
Table 7 Parameters of LuGre friction model simulation experiment

a_1	a_2	a_3	T	dt	α	β
1	2	3	6	0.001	100	100

4.2 力学元件网络训练结果与分析

EMN 的初始化为 4 组 4 层的网络结构, 元件参数初始化为随机值, 且边界条件为 $[0, 100]$. 实验过程中 EMN 采用 RK2 方法进行数值求解.

经过四轮迭代训练, 力学元件网络最终收敛为仅包含 9 个元件的 3 组 3 层的结构. 由于第四轮训练后的网络结构和元件参数与第三轮完全一致, 因此图 6 仅展示前三轮训练过程中均方误差 (mean square error, MSE) 损失和网络结构的变化.

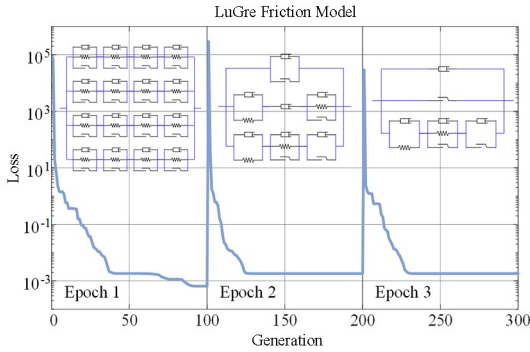


图 6 LuGre 摩擦模型仿真实验中训练损失及结构变化
Fig. 6 The change of training losses and structure in the simulation experiment of the LuGre friction model

相较于此前的双层网络^[35], MSE 降低了 99.94%, 训练损失最终仅为 0.0018. 分析模型元件参数, 如表 8 所示, 我们发现式 (30) 中的黏性摩擦系数 σ_2 可视为阻尼器元件 c_{11} , 二者都与变形速度线性相关, 参数取值也近似. 此外, 第三组网络的第一层元件模块为线性弹簧和阻尼器的并联结构, 其输入同样为变形速度和变形量, 与式 (30) 中的 $\sigma_0 \dot{z} + \sigma_1 z$ 类似. 至于第二组中的滑块元件, 由于其参数较小, 仅为 0.18, 我们推测其主要作用为补偿网络的误差, 并无具体实际含义. 为了验证上述猜想, 我们将元件 c_{11} 、 c_{31} 和 k_{31} 的响应力与 LuGre 摩擦力中的各项分别进行比较, 如图 7 所示.

表 8 EMN 元件参数表

Table 8 Parameters of elements in EMN

c_{11}	μ_{21}	c_{31}	k_{31}	c_{32}	k_{32}	μ_{32}	c_{33}	μ_{33}
4.45	0.18	3.55	69.38	3.09	21.86	5.96	0.52	9.83

对比结果表明, 尽管阻尼器元件 c_{31} 的响应力与 $\sigma_1 \dot{z}$ 在数值上存在差别, 但整体趋势基本一致, 优化后的元件参数也与 σ_1 相差不大. 因此这 3 个元件的响应力可以被视作与 LuGre 摩擦模型中的

每一项相对应. 因此, 模型的内部状态量可视为通过 3 层的元件组模拟获得, 并最终表现在第一层元件的变形量上.

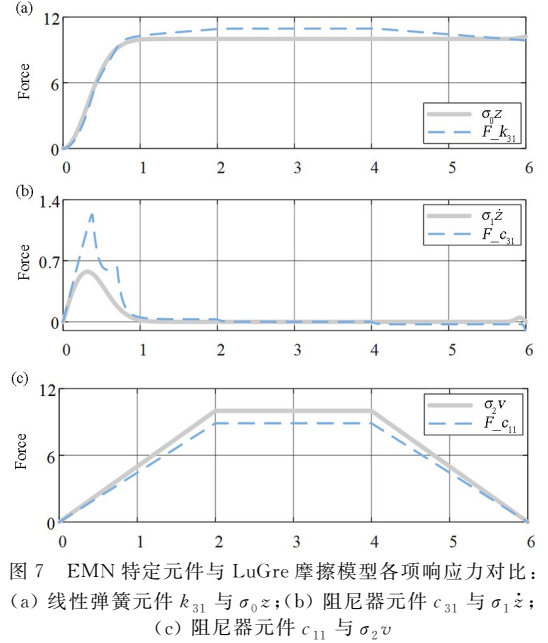


图 7 EMN 特定元件与 LuGre 摩擦模型各项响应力对比:
(a) 线性弹簧元件 k_{31} 与 $\sigma_0 z$; (b) 阻尼器元件 c_{31} 与 $\sigma_1 \dot{z}$;
(c) 阻尼器元件 c_{11} 与 $\sigma_2 v$

Fig. 7 Comparison of each response force between EMN specific elements and LuGre friction model:

(a) Linear spring element k_{31} with $\sigma_0 z$; (b) Damper element c_{31} with $\sigma_1 \dot{z}$; (c) Damper element c_{11} with $\sigma_2 v$

尽管元件取值与模型参数之间存在差异, 网络对 LuGre 摩擦模型的仿真误差很小, 如图 8 所示. 由此可见, 力学元件网络不仅可以对摩擦力进行高精度的拟合, 还能还原出模型的内在机理, 具有优秀的物理可解释性.

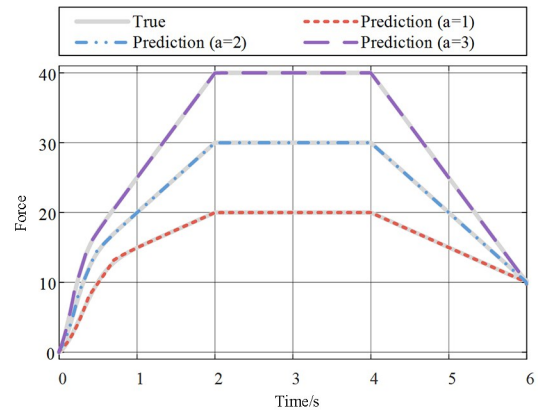


图 8 LuGre 摩擦力仿真与预测对比

Fig. 8 Comparisons of the simulation and the prediction of the LuGre friction model

5 结论与展望

本文针对力学元件网络求解精度不足、模型深度无法拓展的问题, 提出了一种新的 EMN 数值求解算法. 通过数值算例, 分析了模型精度及其初值

敏感性,确定 RK2 算法为兼顾计算精度和效率的最优选择. 随后基于 LuGre 摩擦模型的仿真实验,验证了力学元件网络在确保拟合精度的同时,具备对物理模型及背后机理的解释能力.

然而,由于力学元件网络目前使用数值求解算法计算网络的响应力,无法获取网络损失对每个元件的梯度,因此只能使用计算复杂度较高的启发式优化算法进行参数训练. 未来,我们将探索力学元件网络计算框架的进一步改进,期望将现有基于梯度下降的神经网络训练方法应用到力学元件网络的训练中. 此外,我们将扩充 EMN 的元件库,特别是增加惯性单元,以应用至其他类型的复杂物理系统. 例如在机械臂这类多体动力学系统中,EMN 可用于描述和分析系统中各部件之间的复杂关系和耦合效应,并基于模型设计控制策略. 我们还将进一步拓展力学元件网络的潜在应用场景,使其应用在人工肌肉纤维、热弹性材料等具有重要实际意义的研究领域.

参考文献

- [1] VIANA F A C, GOGU C, GOEL T. Surrogate modeling: tricks that endured the test of time and some recent developments [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, 64(5): 2881–2908.
- [2] DAVIS A E L. The geometrical root of the area-measure of time (from Kepler's *Astronomia nova*) [J]. *Journal for the History of Astronomy*, 2015, 46(3): 297–324.
- [3] GHOSEZ P, JUNQUERA J. Modeling of ferroelectric oxide perovskites: from first to second principles [J]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2022, 13: 325–364.
- [4] BRAMICH D M, MENÉNDEZ M, AMBÜHL L. Fitting empirical fundamental diagrams of road traffic: a comprehensive review and comparison of models using an extensive data set [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2022, 23(9): 14104–14127.
- [5] 郑勇刚, 吴哲同, 张涵博, 等. 基于弹性力学第一性原理的数据驱动动力学建模[J]. *计算力学学报*, 2024, 41(1): 73–80.
ZHENG Y G, WU Z T, ZHANG H B, et al. Data-driven mechanical modeling based on the first principles of elasticity [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2024, 41(1): 73–80. (in Chinese)
- [6] NOËL J P, KERSCHEN G. Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 83: 2–35.
- [7] SCHMIDT M, LIPSON H. Distilling free-form natural laws from experimental data [J]. *Science*, 2009, 324(5923): 81–85.
- [8] BRUNTON S L, PROCTOR J L, NATHAN KUTZ J. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2016, 113(15): 3932–3937.
- [9] HUANG Z L, TIAN Y P, LI C J, et al. Data-driven automated discovery of variational laws hidden in physical systems [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, 137: 103871.
- [10] 刁斌斌, 徐鉴, 何健锋, 等. 一款仿蚯蚓机器人的纤维驱动特性建模与辨识[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(2): 1–11.
DIAO B B, XU J, HE J F, et al. Actuation feature modeling and identification of a fiber-driven earthworm-like robot [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(2): 1–11. (in Chinese)
- [11] ZHANG W, LV Y, ZHANG X X, et al. Dynamic model refining and identification for accurate gait control of a powered knee-ankle prosthesis [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(19): 16871–16889.
- [12] GEELEN R, WRIGHT S, WILLCOX K. Operator inference for non-intrusive model reduction with quadratic manifolds [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 403: 115717.
- [13] LV Y, XU J, FANG H B, et al. Data-mined continuous hip-knee coordination mapping with motion lag for lower-limb prosthesis control [J]. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 2022, 30: 1557–1566.
- [14] MA X, XU J, FANG H B, et al. Adaptive neural control for gait coordination of a lower limb prosthesis [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, 215: 106942.
- [15] UDRESCU S M, TEGMARK M. AI Feynman: a physics-inspired method for symbolic regression [J]. *Science Advances*, 2020, 6(16): 2631.
- [16] GHOREYSHI M, JIRÁSEK A, CUMMINGS R M. Reduced order unsteady aerodynamic modeling

- for stability and control analysis using computational fluid dynamics [J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2014, 71: 167–217.
- [17] LI J M, DING F. Identification methods of nonlinear systems based on the kernel functions [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104(3): 2537–2552.
- [18] LIU H T, ONG Y S, SHEN X B, et al. When Gaussian process meets big data: a review of scalable GPs [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(11): 4405–4423.
- [19] WAOO A A, SONI B K. Performance analysis of sigmoid and relu activation functions in deep neural network [C]// *Intelligent Systems Proceedings of SCIS 2021*. Singapore: Springer Singapore, 2021: 39–52.
- [20] LI J L, LI X T, ZHANG H T, et al. Data-driven discovery of block-oriented nonlinear models using sparse null-subspace methods [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(5): 3794–3804.
- [21] ITEN R, METGER T, WILMING H, et al. Discovering physical concepts with neural networks [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(1): 010508.
- [22] MUTASA S, SUN S, HA R. Understanding artificial intelligence based radiology studies: What is overfitting? [J]. *Clinical Imaging*, 2020, 65: 96–99.
- [23] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks [J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440–442.
- [24] HE K M, ZHANG X Y, REN S Q, et al. Deep residual learning for image recognition [C]// *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. New York: IEEE, 2016: 770–778.
- [25] GUIDOTTI R, MONREALE A, RUGGIERI S, et al. A survey of methods for explaining black box models [J]. *ACM Computing Surveys*, 2019, 51(5): 1–42.
- [26] REICHSTEIN M, CAMPS-VALLS G, STEVENS B, et al. Deep learning and process understanding for data-driven Earth system science [J]. *Nature*, 2019, 566(7743): 195–204.
- [27] HUANG Z C, HUANG S H, LI J Y, et al. Extracting conservative equations from nonconservative state data [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2023, 170: 105127.
- [28] ZHOU Y Y, ZHOU B, PACHE L, et al. Metascape provides a biologist-oriented resource for the analysis of systems-level datasets [J]. *Nature Communications*, 2019, 10(1): 1523.
- [29] 王冬丽, 杨珊, 欧阳万里, 等. 人工智能可解释性: 发展与应用 [J]. *计算机科学*, 2023, 50(增刊 1): 19–25.
- WANG D L, YANG S, OUYANG W L, et al. Explainability of artificial intelligence: development and application [J]. *Computer Science*, 2023, 50(S1): 19–25. (in Chinese)
- [30] MIOTTO R, WANG F, WANG S, et al. Deep learning for healthcare: review, opportunities and challenges [J]. *Briefings in Bioinformatics*, 2018, 19(6): 1236–1246.
- [31] RODRIGUEZ-GALIANO V, SANCHEZ-CASTILLO M, CHICA-OLMO M, et al. Machine learning predictive models for mineral prospectivity: an evaluation of neural networks, random forest, regression trees and support vector machines [J]. *Ore Geology Reviews*, 2015, 71: 804–818.
- [32] CAI S Z, MAO Z P, WANG Z C, et al. Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: a review [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2021, 37(12): 1727–1738.
- [33] HUANG B, WANG J H. Applications of physics-informed neural networks in power systems-A review [J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2023, 38(1): 572–588.
- [34] CHEN Z, LIU Y, SUN H. Physics-informed learning of governing equations from scarce data [J]. *Nature Communications*, 2021, 12(1): 6136.
- [35] HE K P, ZHANG X X. Environmental contact modeling for the earthworm-like robot via the novel elementary mechanical network [J]. *Science China Technological Sciences*, 2022, 65(6): 1366–1382.
- [36] SUN H, HE K P, ZHANG X X. Using elementary mechanical networks to model and recognize multi-environment contacts for the earthworm-like robot [C]// *Proceedings of the 2nd International Conference on Mechanical System Dynamics*. Singapore: Springer Nature Singapore, 2024: 3419–3433.
- [37] 范纪华, 谷通顺, 王明强, 等. 基于 LuGre 摩擦模型的接触约束法旋转变柔性梁斜碰撞研究 [J]. *力学学报*, 2021, 53(4): 1156–1169.
- FAN J H, GU T S, WANG M Q, et al. Research on oblique impact of rotating of flexible beam based on contact constraint method of LuGre friction model [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(4): 1156–1169. (in Chinese)