

基于物理约束并行网络的非线性系统辨识方法研究^{*}

赵尚宇¹ 程长明^{1†} 彭志科^{1,2}

(1. 上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

(2. 宁夏大学 机械工程学院, 750021)

摘要 为解决非线性系统在带噪部分状态测量条件下的辨识问题,本文设计了一种新型物理约束并行网络.其核心思想是通过系统的隐式控制方程引导神经网络训练,以有效压缩网络求解空间,同时获得具备物理可解释性的动力学模型.首先,受稀疏回归方法启发,设计了具备函数库的稀疏回归网络层,用于捕捉系统的非线性特性;其次,构建了状态约束并行网络架构,通过状态变量之间的导数关系对三个并行子网络的输出进行约束,实现在带噪部分状态测量的基础上重构系统的全状态输出;最后,将稀疏回归网络层与状态约束并行网络相结合,形成物理约束并行网络,实现全状态输出预测与显式动力学方程辨识的双重功能.为提升网络的优化效率,开发了一种轮换优化算法,交替优化稀疏回归网络层和状态约束并行网络.“物理约束”在此特指状态约束损失函数以及基于隐式控制方程构建的残差损失函数.通过上述融合策略,该方法能够在带噪部分状态测量条件下生成具有物理可解释性的非线性动力学模型.其有效性、鲁棒性和适用性通过数值模拟和实验研究得到验证.

关键词 非线性动力系统, 系统辨识, 物理约束神经网络, 稀疏回归, 轮换优化

中图分类号: O313.3;N945.14;TP13

文献标志码: A

Physics-Constrained Parallel Networks for Nonlinear Dynamical System Identification^{*}

Zhao Shangyu¹ Cheng Changming^{1†} Peng Zhike^{1,2}

(1. The State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

(2. Ningxia University, School of Mechanical Engineering, Ningxia 750021, China)

Abstract This paper presents a novel physics-constrained parallel network for nonlinear dynamical system identification. The fundamental concept is to employ implicit governing equations to guide neural network training, constraining the solution space and inducing interpretable models. Firstly, inspired by sparse regression methods, a sparse regression layer equipped with a function library is developed to characterize system nonlinearity. Secondly, a state-constrained parallel network architecture is constructed to enforce derivative relationships among state variables, constraining the outputs of three parallel subnetworks and reconstructing the full-state outputs under partially noisy state measurements. Finally, the sparse regression network layer is integrated with the state-constrained parallel network to form the physics-constrained parallel network, yielding full-state outputs and explicit closed-form dynamical formulations simultaneously. An alternate optimization method is developed to optimize the sparse regression network layer and the state-constrained parallel network sequentially, enhancing optimization effi-

2024-12-26 收到第 1 稿,2025-01-26 收到修改稿.

^{*} 国家重点研发计划资助项目(2021YFB3400700),国家自然科学基金资助项目(12422201,12372017,12121002),National Key Research and Development Program of China (2021YFB3400700), National Natural Science Foundation of China (12422201, 12372017, 12121002).

[†] 通信作者 E-mail:ccming@sjtu.edu.cn

ciency. The term “physics-constrained” herein refers to the state dependency constraints and the residual loss derived from the learned governing equation via the sparse regression layer. Through this strategy, the proposed framework delivers a physically interpretable model for nonlinear dynamical systems from partial noisy measurements. Numerical simulations and experimental studies demonstrate the effectiveness, robustness, and applicability.

Key words nonlinear dynamical system, system identification, physics-constrained neural network, sparse regression, alternate optimization

引言

非线性动力系统广泛存在于机械工程、结构工程、土木工程以及控制工程等领域^[1]. 对这些系统进行辨识, 即从输入输出测量数据中获得系统的数学模型, 这对非线性动力学特性分析、先进控制系统设计、结构健康监测以及故障诊断等多种应用而言至关重要^[2].

由于缺乏先验知识, 动力系统中固有非线性特性通常是未知的. 利用非线性基函数库对系统非线性进行拟合是一种有效的方法. 稀疏回归作为一种成熟的机器学习技术, 因其能够选择真实的贡献项并消除冗余项的能力而受到广泛研究^[3]. Brunton 等人在 2016 年提出非线性动力系统稀疏辨识 (SINDy) 算法^[4], 极大地推动了该领域的发展^[5].

然而, SINDy 方法依赖于位移、速度和加速度状态的同步测量, 这对实验条件提出了较高要求, 特别是速度的测量通常较为困难. 在仅提供部分状态测量(如位移时间序列)时, 通过数值微分方法获得余下状态时会放大噪声的影响, 导致速度和加速度估计严重失真, 降低系统辨识精度. 所以, 开发从带噪部分状态测量中重构全状态输出的技术对于扩展稀疏回归在系统辨识中的应用至关重要.

近年来, 深度学习技术逐渐成为辨识非线性系统的有力工具. 深度神经网络具备强大的非线性输入输出映射能力, 非常适合用于建立复杂非线性动力系统的替代模型. 通过合理设计网络架构和训练策略, 基于深度神经网络的系统辨识方法在性能上相较于传统方法更优. 多种神经网络架构已被应用于系统辨识, 包括卷积神经网络^[6]、循环神经网络^[7]和自编码器^[8]等. 例如, Wu 和 Jahanshahi 利用卷积神经网络构建钢架的替代模型以预测动态响应, 充分发挥卷积核的局部特征提取能力^[6]. 然

而, 卷积核难以捕捉复杂的时间演化特性. 相较之下, 循环神经网络擅长对长期时序依赖性进行建模, 长短期记忆网络作为其代表性架构应用广泛^[9]. Zhang 等人成功应用长短期记忆网络预测强非线性、大变形结构系统的地震响应^[10]. 此外, 融合两种架构优势的卷积-循环神经网络模型在构建替代模型等多种应用场景中表现出色^[11]. 例如, Zhao 等人利用卷积-长短期记忆网络模型建立呼吸梁的替代模型, 并成功实现裂纹梁的损伤检测^[11].

尽管深度神经网络在建立输入输出映射方面表现出色, 但其缺乏可解释性和物理意义, 被视为黑箱模型. 与传统系统辨识方法不同, 深度神经网络的参数并不对应于系统的物理量, 这限制了其在需要进行系统动力学分析等场景下的应用. 此外, 深度学习模型在训练数据分布范围外的泛化能力有限, 无法在仅提供部分测量标签的情况下实现全状态输出. 因此, 亟须改进或补充相关技术以提升深度学习在复杂动力系统中的应用. 此外, 深度学习模型在训练数据分布范围外的泛化能力有限, 无法在仅提供部分测量标签的情况下实现全状态输出. 因此, 亟须改进或补充相关技术以提升深度学习在复杂动力系统中的应用.

为推进深度学习模型在系统辨识中的应用, 将守恒定律、对称性和不变性等物理知识融入模型, 以构建可解释且鲁棒的模型是一条可行的路径. 物理约束神经网络就是一种常用的方法^[12], 通过将偏微分方程嵌入为损失函数, 在训练过程中强制网络遵守相关物理规律, 从而生成更准确且具有物理意义的输出预测. 物理约束神经网络广泛应用于求解各类微分方程^[12,13], 尤其是时空偏微分方程^[14], 还可用于识别微分方程中参数的逆问题^[15]. 然而, 这些应用均假设微分方程形式已知, 而在系统辨识时未知动力系统往往缺乏显式表达式. 因此, 开发具有隐式物理约束的神经网络成为一个极具重要潜力的研究方向.

本文提出了一种创新的物理约束并行网络, 用

于在带噪部分状态测量下实现非线性动力系统的辨识. 该方法通过引入非线性动力系统的隐式控制方程, 引导神经网络训练, 有效约束了网络求解空间, 并生成具有物理可解释性的动力学模型. 该方法不仅能够重构系统的全状态输出, 还能推导出系统的显式动力学方程, 为非线性动力系统辨识提供了一种兼具预测能力与物理可解释性的解决方案.

1 基于物理约束并行网络的非线性动力系统辨识方法

1.1 问题描述

在本文中, 采用如下常微分方程 (ODEs) 对含阻尼时不变非线性动力系统描述:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \quad (1)$$

式中, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}^T \in \mathbb{R}^n$ 表示系统的状态变量, n 表示系统状态变量的数量, $\mathbf{u}(t)$ 是系统的强迫激励, \mathbf{F} 表示控制系统非线性动力特性的向量函数, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 表示状态变量关于时间的导数. 本文的目标为在给定系统输入及带噪部分状态测量时, 辨识控制系统非线性动力特性的向量函数 \mathbf{F} .

1.2 稀疏回归网络层

在假设 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 可以直接测量或通过数值微分方法估计的前提下, 稀疏回归方法旨在从测量数据 $\mathbf{x}(t)$ 中发现函数 \mathbf{F} 的具体表达形式. 将收集到的状态 $\mathbf{x}(t)$ 和其导数 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 表示为矩阵形式:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t_1) \\ \mathbf{x}^T(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \dots & x_n(t_1) \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & \dots & x_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(t_N) & x_2(t_N) & \dots & x_n(t_N) \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^T(t_1) \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_2) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}^T(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t_1) & \dot{x}_2(t_1) & \dots & \dot{x}_n(t_1) \\ \dot{x}_1(t_2) & \dot{x}_2(t_2) & \dots & \dot{x}_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_1(t_N) & \dot{x}_2(t_N) & \dots & \dot{x}_n(t_N) \end{bmatrix},$$

其中, N 表示状态测量时间序列的长度.

为了推断 \mathbf{F} 的具体形式, 构建一个由系统状态 \mathbf{X} 的各种函数 (如多项式函数、三角函数等) 组成的函数库 $\Phi(\mathbf{X})$. 基于该函数库, 方程 (1) 中的控制方程可以表示为函数库各项的线性组合:

$$\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})\mathbf{A} \quad (2)$$

式中, $\mathbf{A} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n]^T$ 表示权重向量. 因此, 方程 (2) 中控制方程的求解问题转化为如下的回归优化问题:

$$L_r(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^N \|\dot{\mathbf{X}} - \Phi(\mathbf{X})\|_2^2 \quad (3)$$

然而, 由于函数库中存在大量候选项, 导致库矩阵 $\Phi(\mathbf{X})$ 的条件数可能较大, 公式 (3) 中的优化问题无法直接求解. 此外, 解向量也是稠密的, 每个分量均存在非零贡献. 为了促进解的稀疏性, 引入 l_1 正则化以筛选函数库中的实际贡献项:

$$L_l(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^N \|\dot{\mathbf{X}} - \Phi(\mathbf{X})\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{A}\|_1 \quad (4)$$

式中, 参数 γ 表示稀疏性约束的权重. 该优化问题通常可以通过 Lasso 方法进行求解^[16].

受稀疏回归方法的启发, 我们设计了图 1 所示的具备函数库的稀疏回归网络层 (sparse regression layer, SRL), 用于捕捉系统的非线性特性. SRL 的参数结构与 \mathbf{A} 相同, 其损失函数包含残差项和 l_1 正则化项目 [如公式 (4) 所示]. 通过流行的深度学习框架, 稀疏解可以通过常用的网络训练方法获得. 此外, 由于 SRL 具有良好的可移植性, 可以轻松地集成到其他网络架构中.

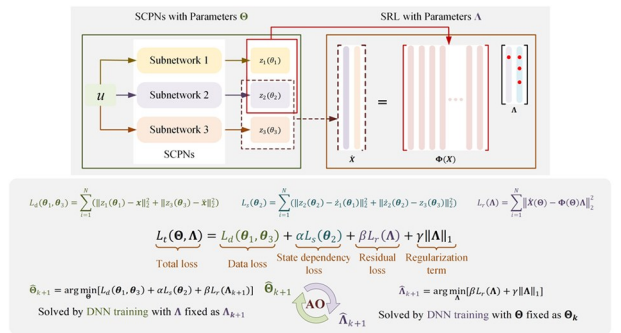


图 1 物理约束并行网络 (PCPNs)

Fig. 1 Physics-constrained parallel networks (PCPNs)

1.3 状态约束并行网络

在动力系统辨识中, 包括 SINDy 在内的许多方法通常需要对位移、速度和加速度的同步数据进行完整测量. 然而, 这种需求对实验条件提出了较高要求, 特别是速度测量通常较难获得. 当只有部分状态可测量时, 其他状态需要通过数值微分方式获得. 然而, 微分阶段会显著放大噪声的影响, 进而影响系统辨识的精度.

在我们的前期工作中^[17],我们设计了一种名为 Hybrid-LSTM 的神经网络,旨在利用带噪数据训练网络以进行准确的输出预测.虽然该方法在应用中有效,但其依赖于完整标签数据,无法在部分状态测量的条件下进行全状态输出预测.为解决这一限制并实现全状态输出,我们设计了状态约束并行网络 (state-constrained parallel networks, SCPNs),如图 1 所示.该方法将单一 Hybrid-LSTM 网络作为子网络,建立系统激励与响应之间的映射关系,随后基于状态之间的依赖性对三个并行子网络的输出进行约束.

将位移、速度和加速度状态表示为 $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}^T = \{\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}\}^T$. 三个并行子网络的输出可以表示为: $\mathbf{z}_i = NN_{\text{sub}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_i)$, 其中 $\boldsymbol{\theta}_i$ 表示每个子网络的可训练参数, $i = 1, 2, 3$. 给定部分测量数据 $\{\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\}^T$, 子网络 1 和子网络 3 的数据损失函数可以表示为:

$$L_d(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_3) = \sum_{i=1}^N [\|\mathbf{z}_1(\boldsymbol{\theta}_1) - \mathbf{x}\|_2^2 + \|\mathbf{z}_3(\boldsymbol{\theta}_3) - \ddot{\mathbf{x}}\|_2^2] \quad (5)$$

式中, N 表示测量数据的序列长度.

通过公式(6)中定义的张量微分算子 (tensor differentiation operator, TDO), 对于批量输入, 可以用批量乘法计算预测状态的导数.

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_k \\ \vdots \\ \mathbf{D}_B \end{bmatrix}, \mathbf{D}_k = \frac{1}{2\Delta y} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, B 表示网络训练过程中的 batch 数, $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是针对第 k 个 batch 的中心差分矩阵. TDO 确保在前向传播和反向传播中保留计算图, 从而实现高效且准确的梯度计算. 子网络 2 的状态依赖损失可表示为:

$$L_s(\boldsymbol{\theta}_1) = \sum_{i=1}^N [\|\mathbf{z}_2(\boldsymbol{\theta}_2) - \dot{\mathbf{z}}_1(\boldsymbol{\theta}_1)\|_2^2 + \|\mathbf{z}_2(\boldsymbol{\theta}_2) - \mathbf{z}_3(\boldsymbol{\theta}_3)\|_2^2] \quad (7)$$

将 SCPNs 的参数表示为 $\boldsymbol{\Theta} = \{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\theta}_3\}$, 则其损失函数可表示为:

$$L(\boldsymbol{\Theta}) = L_d(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_3) + \alpha L_s(\boldsymbol{\theta}_2) \quad (8)$$

式中, α 表示状态依赖损失的相对权重系数. 通过

网络训练方法求解公式(8)定义的优化问题, 可以得到 SCPNs 的最优参数估计 $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$. 该优化目标表明, 三个子网络同时进行训练, 使得 SCPNs 能够在部分状态观测的情况下实现全状态输出预测.

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \underset{\boldsymbol{\Theta}}{\operatorname{argmin}} L(\boldsymbol{\Theta}) \quad (9)$$

1.4 物理约束并行网络

当系统状态变量关于时间的导数数据无法直接测量时, 稀疏回归方法需要通过数值微分等方式进行估计. 然而, 当测量数据存在噪声干扰时, 很难实现准确地估计. 为解决这一问题, 利用前述 SCPNs 中子网络的降噪能力实现状态变量导数的准确估计. 将 SRL 与 SCPNs 集成, 获得图 1 所示的物理约束并行网络 (physics-constrained parallel networks, PCPNs), 以实现同时进行全状态输出预测和辨识显式系统动力学方程, 其中函数库 $\Phi(\mathbf{X})$ 基于 SCPNs 获得的全状态输出预测构建.

训练 PCPNs 的总损失函数 L_t 包含四部分: 数据约束 L_d 、状态依赖约束 L_s 、物理残差约束 L_r 和 l_1 正则化项, 其公式如下:

$$L_t(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Lambda}) = L_d(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_3) + \alpha L_s(\boldsymbol{\theta}_2) + \beta L_r(\boldsymbol{\Lambda}) + \gamma \|\boldsymbol{\Lambda}\|_1 \quad (10)$$

式中, β 表示残差项的权重系数. PCPNs 的训练可以通过求解如下优化问题实现:

$$\{\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \hat{\boldsymbol{\Lambda}}\} := \underset{\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Lambda}}{\operatorname{argmin}} L_t(\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Lambda}) \quad (11)$$

其中, $\{\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \hat{\boldsymbol{\Lambda}}\}$ 表示网络最优参数集合. 然而, 总损失函数的隐式与复杂性给其直接求解带来挑战. 为应对这一挑战, 将整个优化问题分解为两个可处理的子问题, 如公式(12)和(13)所示. 随后, 通过轮换优化算法 (alternate optimization, AO) 迭代优化参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$, 迭代流程如图 1 所示.

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1} := \underset{\boldsymbol{\Lambda}}{\operatorname{argmin}} [\beta L_r(\boldsymbol{\Lambda}) + \gamma \|\boldsymbol{\Lambda}\|_1] \quad (12)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{k+1} = \underset{\boldsymbol{\Theta}}{\operatorname{argmin}} [L_d(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_3) + \alpha L_s(\boldsymbol{\theta}_2) + \beta L_r(\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{k+1})] \quad (13)$$

在初始化阶段, 通过公式(8)对 SCPNs 进行预训练, 获得初始解 $\boldsymbol{\Theta}_0$. 随后, 从初始解 $\boldsymbol{\Theta}_0$ 开始, 采用 AO 算法求解公式(11)中的整体优化问题. 在每次 AO 迭代中, 利用标准网络训练算法求解公式(12)中的最小化问题, 获得稀疏系数 $\boldsymbol{\Lambda}_{k+1}$. 在更新 $\boldsymbol{\Lambda}_{k+1}$ 后, 移除函数库中的冗余项. 基于更新的 $\boldsymbol{\Lambda}_{k+1}$ 和函数库, 利用物理残余约束 SCPNs 的输出. 最

终,通过求解公式(13)中的优化问题,更新 SCPNs 的最优参数 Θ_{k+1} .

2 数值模拟与实验研究

2.1 二自由度立方非线性系统数值模拟

为验证 PCPNs 在非线性动力系统辨识中的有效性,以图 2 所示二自由度立方非线性系统为实例进行数值模拟,其动力学模型如下:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + \\ (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + k_c x_1^3 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = u \end{cases} \quad (14)$$

式中, u 表示外部激励力, x_1 和 x_2 分别表示两个振子的位移响应; m_1 和 m_2 对应两个自由度的质量, c_1 和 c_2 是阻尼系数;此外, k_1 和 k_2 代表两个自由度的线性刚度系数, k_c 表示第一个自由度的三次刚度系数. 具体的数值确定为: $m_1 = m_2 = 1.00 \text{ kg}$, $c_1 = c_2 = 5.00 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $k_1 = 2.00 \times 10^3 \text{ N/m}$, $k_2 = 5.00 \times 10^2 \text{ N/m}$, $k_c = 1.00 \times 10^9 \text{ N/m}^3$.

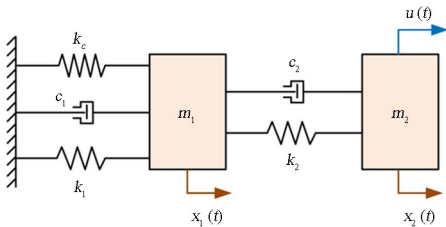


图 2 二自由度立方非线性系统物理模型
Fig. 2 Physical model of the two degrees of freedom system with cubic stiffness

在系统辨识领域,通常假设系统非线性形式未知. 在本研究中,进一步假设包括质量、阻尼、刚度及非线性项系数在内的所有系统参数均未知,需要辨识. SRL 中的非线性函数库由激励力、系统状态的多项式函数组成:

$$\Phi = \begin{bmatrix} u & x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & x_1^2 & x_2^2 & \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 & x_1 x_2 & x_1 \dot{x}_1 & x_1 \dot{x}_2 & x_2 \dot{x}_1 & x_2 \dot{x}_2 & \dot{x}_1 \dot{x}_2 & x_1^3 \\ x_2^3 & \dot{x}_1^3 & \dot{x}_2^3 & x_1^2 x_2 & x_1^2 \dot{x}_1 & x_1^2 \dot{x}_2 & \dots & \dot{x}_2^2 \dot{x}_1 \end{bmatrix}$$

式中共包含 29 项基函数.

为平衡多目标训练中各损失函数的影响,通过调整损失函数各项的权重系数 α 、 β 和 γ ,使所有任务的学习都得到充分关注. PCPNs 网络的超参数经过网格搜索优化,具体数值如表 1 所示. 使用 Adam 优化方法进行网络训练.

表 1 物理约束并行网络训练超参数
Table 1 Hyperparameters of PCPNs

Hyperparameters	Value
Batch size	2
Learning rate	0.001
α	1.0
β	2.0×10^{-3}
γ	4.0×10^{-5}

系统第二个自由度受到频率范围为 5 Hz 到 70 Hz、幅值为 20 N 的多正弦激励. 采用四阶龙格-库塔法,以 2000 Hz 采样频率、120 s 采样时间对系统响应进行数值计算. 图 3 展示系统的激励信号以及无噪声位移、速度、加速度响应时域波形. 为模拟实际测量,在位移和加速度响应中添加了信噪比为 20 dB 的高斯白噪声. 将激励信号和带噪声的位移、加速度响应截取为 2 s 片段,构建训练数据集,并进行归一化处理以提高模型鲁棒性.

图 3 展示 PCPNs 对系统全状态的预测结果:位移和加速度的预测误差分别为 1.42% 和 1.53% (误差为预测值与真实值均方根之比);无标签速度状态的预测误差为 1.40%. 结果表明,即使在带噪声部分观测条件下,PCPNs 仍能准确重构系统的全

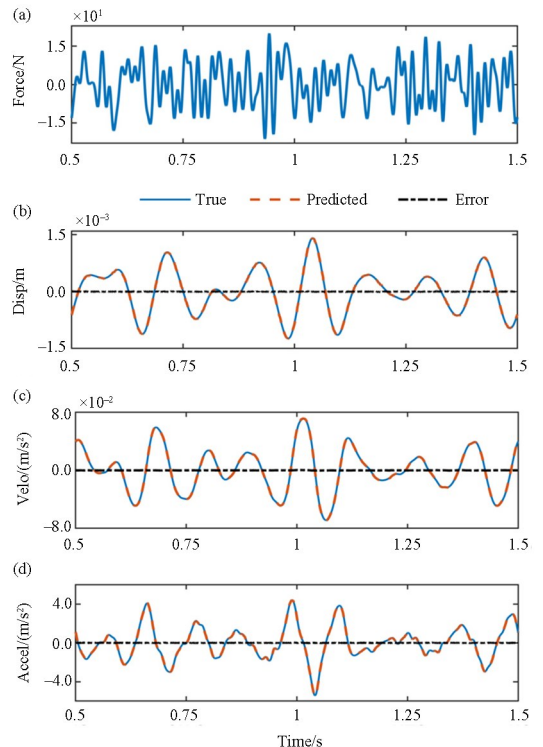


图 3 20 dB 噪声下第一个自由度响应和预测的时域波形:
(a) 激励力; (b) 位移; (c) 速度; (d) 加速度
Fig. 3 Time domain waveform of the first degree of freedom response and prediction under 20 dB noise scenario: (a) Excitation force; (b) Displacement; (c) Velocity; (d) Acceleration

状态输出预测。

表2和表3展示了从SRL中提取的辨识参数与SINDy方法的对比结果。为确保实验公平性，SINDy方法同样使用了带噪位移和加速度的测量数据，而额外所需的速度数据则通过数值微分计算获得。表中符号√表示正确消除非贡献项，×表示错误消除贡献项或未消除非贡献项。结果表明，所提出的PCPNs方法能够准确识别两个自由度中所有贡献项及其对应系数。相比之下，SINDy方法未能识别两个自由度的阻尼系数，并误检了多个非贡献项，包括第一个自由度中的 x_1^3 、 x_2^2 和 x_2^3 及第二个自由度的 x_1^3 和 x_2^3 。此外，SINDy方法对其他贡献项的系数识别也表现出明显的误差，其辨识精度降低了一个数量级。值得说明的是，SINDy方法在辨识过程中依赖位移、速度和加速度的全状态同步测量。当仅提供位移和加速度的带噪测量数据时，速度数据需通过数值微分估计，而这一过程不可避免地放大噪声，显著影响了辨识结果的精度。综上，PCPNs方法在处理带噪多自由度非线性动力系统的辨识任务时，表现出更强的鲁棒性和更高的辨识准确性。

表2 20 dB噪声场景下第一自由度参数辨识结果

Table 2 Identification results of the first degree of freedom parameters in the 20 dB noise scenario

Coefficient	Method	Value	Error(%)
$\ddot{x}_1(t), m_1$	PCPNs	0.9830	1.70
	SINDy	1.0979	9.79
$\dot{x}_1(t), c_1$	PCPNs	4.8799	2.40
	SINDy	0	×
$x_1(t), k_1$	PCPNs	1.9596×10^3	2.02
	SINDy	2.2743×10^3	13.72
$x_1^3(t), k_c$	PCPNs	9.8472×10^8	1.53
	SINDy	7.7487×10^8	22.51

表3 20 dB噪声场景下第二自由度参数辨识结果

Table 3 Identification results of the second degree of freedom parameters in the 20 dB noise scenario

Coefficient	Method	Value	Error (%)
$\ddot{x}_2(t), m_2$	PCPNs	1.0018	0.18
	SINDy	1.0031	0.31
$\dot{x}_2(t), c_2$	PCPNs	4.8276	3.45
	SINDy	0	×
$x_2(t), k_2$	PCPNs	4.8698×10^2	2.06
	SINDy	5.7831×10^2	15.60
Other terms	PCPNs	0	√
	SINDy	—	—

2.2 呼吸梁实验研究

为验证PCPNs在实际场景下的适用性，以图4所示的呼吸梁为实例进行实验研究。呼吸梁的受迫振动可以描述为如下双线性振荡^[18]：

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x = u, & x \geq 0 \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + k_2x = u, & x < 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中， k_1 和 k_2 分别表示呼吸裂纹张开和闭合时梁的刚度。在故障初始阶段，由于裂纹深度很小， k_1 接近 k_2 。然而，随着裂纹加深， k_1 随之减小。因此，方程(16)中定义的刚度比例系数 r 可以作为衡量梁损伤程度的指标。

$$r = \frac{k_1}{k_2}, \quad 0 < r \leq 1 \quad (16)$$

通常，通过测量所有状态 $\{x, \dot{x}, \ddot{x}\}$ ，可利用系统辨识方法确定指标 r 。本研究采用PCPNs识别呼吸梁的动力学模型，仅依赖位移和加速度响应计算 r 。为便于构建物理约束损失，公式(15)被重写为如下形式：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \frac{k_1 + k_2}{2}x + \frac{k_1 - k_2}{2}|x| = u \quad (17)$$

进一步，将公式(17)转化为公式(18)所示的待辨识状态空间方程：

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{1}{m}u - \frac{k_1 + k_2}{2}z_1 - \frac{k_1 - k_2}{2}|z_1| - \frac{c}{m}z_2 \end{cases} \quad (18)$$

为模拟“呼吸”现象，在梁上加工裂纹，并在每个裂纹中插入厚度为0.2 mm的钢片。实验装置如图4所示，梁的尺寸为350 mm×25 mm×5 mm，左端通过固定装置支撑。为评估PCPNs在不同损伤程度下的识别能力，实验测试了三根尺寸相同的梁：

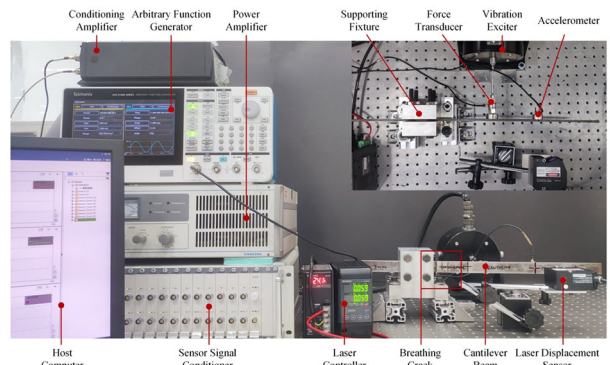


图4 呼吸梁实验装置图

Fig. 4 Experimental setup of breathing beam

一根无裂纹,另外两根的裂纹深度分别为 1 mm 和 2 mm.

系统采用频率范围为[20, 60] Hz 的多正弦信号进行激励. 激励信号由任意波形发生器生成,经功率放大器放大后传递到激励器以产生激励力. 在每次测试中,通过动态信号分析仪记录激励力、位移响应和加速度响应. 激励力通过力传感器监测,位移响应由激光位移传感器测量,加速度响应由加速度计捕获. 实验采样频率为 2000 Hz,单次测试持续 120 s. 按照数值仿真中数据裁剪与归一化步骤,对采集信号进行预处理以构建训练数据集,训练策略保持不变,函数库如公式(19)所示:

$$\Phi = \begin{bmatrix} u & x & \dot{x} & |x| & |\dot{x}| & \sin(x) \\ \sin(\dot{x}) & \cos(x) & \cos(\dot{x}) & x^2 & x\dot{x} & \dot{x}|\dot{x}| \\ x^3 & x\dot{x}^2 & \dot{x}^3 & x^4 & \dots & \dot{x}^5 \end{bmatrix} \quad (19)$$

图 5 展示了含 1 mm 裂纹呼吸梁的预测响应. 表 4 展示了从 SRL 中提取的辨识参数. 质量和阻尼的估计值在不同裂纹深度下相近;随着裂纹的加深,裂纹闭合时梁的刚度 k_2 下降. 更重要的是,刚度比例系数 r 随损伤加剧而降低,揭示了呼吸裂纹

表 4 呼吸梁辨识结果

Table 4 Identification results of the breathing beam

Crack depth /mm	m/kg	$c \times 10^2 / (\text{N} \cdot \text{s}/\text{m})$	$k_2 \times 10^4 / (\text{N}/\text{m})$	r
0	0.7330	2.4189	4.7748	1.0000
1	0.7196	2.5082	4.4153	0.9047
2	0.7323	2.5640	3.9780	0.7504

的损伤情况.

为验证辨识模型的准确性,对含 1 mm 裂纹呼吸梁进行实测位移与辨识模型预测位移对比,激励信号选用 30 Hz 的正弦信号,结果如图 6 所示. 辨识模型根据公式(14)和表 4 中辨识的参数建立,预测位移通过四阶龙格-库塔方法计算得到. 预测误差定义为误差信号与实测信号均方根之比,其值为 2.86%. 预测响应与实测响应的高度一致性验证了 PCPNs 网络的实用性.

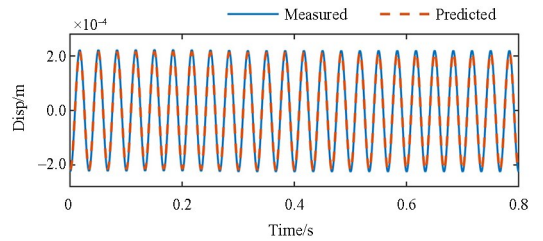


图 6 预测响应与实测响应的时域波形
Fig. 6 The time-domain waveforms of the predicted response and the measured response

3 结论

本文提出了一种基于物理约束并行网络的非线性动力系统辨识方法,该方法的核心是利用非线性动力系统的隐式控制方程指导神经网络训练,从而有效压缩网络求解空间,同时获得具有物理可解释性的动力学方程. 通过二自由度立方非线性系统的数值模拟以及单自由度呼吸梁实验研究,验证了该方法在带噪部分状态测量下进行全状态输出预测和显式动力学方程辨识的能力. 结果表明,该方法具有良好的适用性与鲁棒性,能够用于动力系统故障诊断和结构健康监测,展示了在更广泛的工业与科研领域应用的潜力.

参考文献

[1] CHENG C M, BAI E W. Testing if a nonlinear system is additive or not [J]. Automatica, 2019, 104: 134–140.
 [2] LJUNG L. Perspectives on system identification [J]. Annual Reviews in Control, 2010, 34(1): 1–12.
 [3] LIN M M, CHENG C M, PENG Z K, et al. Non-linear dynamical system identification using the sparse regression and separable least squares methods [J]. Journal of Sound and Vibration,

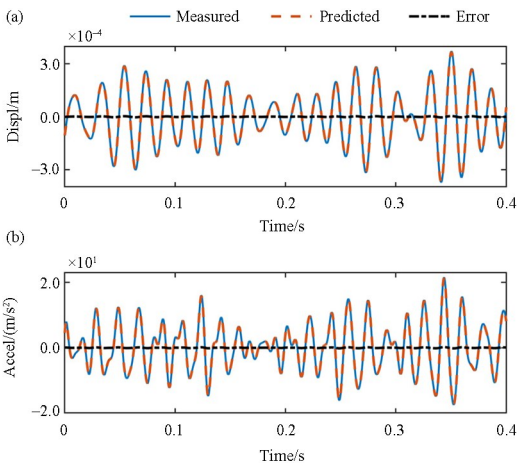


图 5 含 1 毫米裂纹呼吸梁的预测位移和加速度响应:
(a) 位移; (b) 加速度

Fig. 5 Predicted displacement and acceleration responses of the cantilever beam with a 1 mm crack: (a) Displacement; (b) Acceleration

- 2021, 505: 116141.
- [4] BRUNTON S L, PROCTOR J L, NATHAN KUTZ J. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2016, 113(15): 3932–3937.
- [5] 金煜, 孙煜, 于健博, 等. 基于改进型 PSO 的 SINDy 建模应用: 微动致动器[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(12): 18–28.
- JIN Y, SUN Y, YU J B, et al. SINDy modeling application based on improved PSO: micro-actuators [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(12): 18–28. (in Chinese)
- [6] WU R T, JAHANSHAHI M R. Deep convolutional neural network for structural dynamic response estimation and system identification [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2019, 145(1): 04018125.
- [7] COBAN R. A context layered locally recurrent neural network for dynamic system identification [J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2013, 26(1): 241–250.
- [8] WANG Y L, YANG H B, YUAN X F, et al. Deep learning for fault-relevant feature extraction and fault classification with stacked supervised auto-encoder [J]. *Journal of Process Control*, 2020, 92: 79–89.
- [9] GREFF K, SRIVASTAVA R K, KOUTNÍK J, et al. LSTM: a search space odyssey [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 28(10): 2222–2232.
- [10] ZHANG R Y, LIU Y, SUN H. Physics-informed multi-LSTM networks for metamodeling of nonlinear structures [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 369: 113226.
- [11] ZHAO B X, CHENG C M, PENG Z K, et al. Detecting the early damages in structures with nonlinear output frequency response functions and the CNN-LSTM model [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2020, 69(12): 9557–9567.
- [12] RAISSI M, PERDIKARIS P, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 378: 686–707.
- [13] MATTEY R, GHOSH S. A novel sequential method to train physics informed neural networks for Allen Cahn and Cahn Hilliard equations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 390: 114474.
- [14] ZHANG J C, ZHAO X W. Spatiotemporal wind field prediction based on physics-informed deep learning and LIDAR measurements [J]. *Applied Energy*, 2021, 288: 116641.
- [15] JAGTAP A D, KHARAZMI E, KARNIADAKIS G E. Conservative physics-informed neural networks on discrete domains for conservation laws: Applications to forward and inverse problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 365: 113028.
- [16] TIBSHIRANI R. Regression shrinkage and selection via the lasso [J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 1996, 58(1): 267–288.
- [17] ZHAO S Y, CHENG C M, ZHANG G Z, et al. A nonlinearity-sensitive approach for early damage detection using NOFRFs and the hybrid-LSTM model [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2023, 72: 3529312.
- [18] YAN G R, DE STEFANO A, MATTA E, et al. A novel approach to detecting breathing-fatigue cracks based on dynamic characteristics [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(2): 407–422.