文章编号:1672-6553-2025-23(3)-073-009　　DOI:10.6052/1672-6553-2025-021

基于 Noether 对称性方法的 Buck-Boost 变换器时间响应分析*

张成璞　李彦敏　赵纲领　陈向炜　谢煜†

(商丘师范学院 电子电气工程学院,商丘　476000)

摘要　根据 Buck-Boost 变换器的电路结构,采用能量的方法,得到了系统的 Lagrange 函数,建立了 Buck-Boost 变换器动力学方程. 引入时间和电荷广义坐标的无穷小变换,基于系统 Hamilton 作用量的不变性,给出了 Noether 恒等式、广义 Killing 方程和广义 Noether 定理. 研究了在开通或关断状态下 Buck-Boost 变换器的对称性,得到了相应的守恒量,在此基础上,构造了变换器动力学方程的精确解,将结果应用于 Buck-Boost 变换器时间响应分析中. 通过实验对比了分别由 Noether 对称性方法与 Runge-Kutta 四五阶方法(ode45)计算的时间响应,结果表明 Noether 对称性方法在保持高精度的同时可大幅提高系统时间响应的计算速度.

关键词　Buck-Boost 变换器,　Noether 对称性,　时间响应,　守恒量,　精确解

中图分类号:O316　　**文献标志码:**A

Time Response Analysis of Buck-Boost Converter Based on Noether Symmetry Method*

Zhang Chengpu　Li Yanmin　Zhao Gangling　Chen Xiangwei　Xie Yu†

(School of Electronic and Electrical Engineering, Shangqiu Normal University, Shangqiu　476000, China)

Abstract　Based on the circuit structure of Buck-Boost converter, the Lagrange function of the system is obtained using the energy method, and the dynamic equations of Buck-Boost converter are established. The infinitesimal transformations of time and charge generalized coordinates are introduced, and based on the invariance of the Hamiltonian action of the system, Noether identity, generalized Killing equation, and generalized Noether theorem of Buck-Boost converter are given. The symmetries of Buck-Boost converter in the on or off state are studied, and the corresponding conservation quantities are obtained. Based on this, the exact solutions of dynamic equations for the converter are constructed, and the results are applied to the time response analysis of Buck-Boost converter. Through experiments, the time responses calculated using the Noether symmetry method and the Runge-Kutta fourth-fifth order method (ode45) are compared. The results indicate that the Noether symmetry method not only maintains high accuracy but also significantly enhances the calculation speed of the system's time response.

Key words　Buck-Boost converter,　Noether symmetry,　time response,　conserved quantity,　exact solution

---

2024-12-01 收到第 1 稿,2025-01-26 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11372169), National Natural Science Foundation of China(11372169).

† 通信作者 E-mail:xieyu1682003@163.com

引言

Buck-Boost 变换器是一种直流到直流的电力变换电路，其输出电压可高于或小于输入电压，可实现升压或降压的电力变换. 近年来，随着电力电子技术的快速发展，Buck-Boost 变换器被广泛应用于可再生能源、电动汽车、便携式设备和功率因数校正等领域[1-5]. 为了实现正确的设计和控制，需要建立足够精确的 Buck-Boost 变换器模型，并在不同的模式下研究其瞬态和稳态的工作情况. 由于主电路中存在功率开关，这导致 Buck-Boost 变换器具有非线性的特点，需要进行非线性动力学方程的求解.

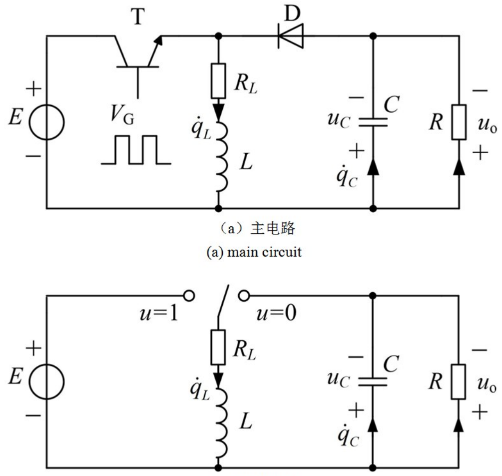
目前已经提出了几种不同的 Buck-Boost 变换器建模方法，包括小信号分析方法[6-7]、状态空间方法[8]、状态空间平均值方法[9,10]. 这些方法为电力变换器分析提供了有力工具，但是它们在提取模型时都存在一定程度近似，而且主要采用数值求解，因而用这些方法得到结果并不够准确. 从另一个角度来看，由于使用数值求解，在进行变换器参数优化和辨识等运算量非常大的场合，将需要耗费较长的计算时间，这对变换器的优化设计也会产生一定的影响. 文献[11, 12]提出了一种基于拉普拉斯变换和 Z 变换的新方法，并用于 Boost 和 Buck-Boost 变换器的分析中，得到变换器输出响应的解析表达，具有很高的计算精度，但是这种方法给出结果的形式非常复杂. 因此，研究 Buck-Boost 变换器的建模方法，提高动力学方程求解速度，是提升 Buck-Boost 变换器工作性能的有效手段.

在文献[13]中，采用能量的方法将分析力学中 Lagrange 方程应用于电力变换器动力学方程的建模中，是一种通用性和系统性的方法，并在变换器的无源控制中获得成功的应用. 从系统动力学行为分析的角度来看，得到系统精确解具有非常重要的意义. 目前，李群方法已经成功应用于约束力学系统，它为约束力学系统提供得到系统精确解的方法[14,15]，其中 Noether 对称性法是一种重要的研究方法[16-19]，并已经在一些实际工程问题中得到应用[20,21].

本文将 Noether 对称性方法应用于 Buck-Boost 变换器的分析中，通过研究 Buck-Boost 变换器的对称性和守恒量，给出 Buck-Boost 变换器的精确解，并应用于变换器时间响应分析中，给出变换器瞬态和稳态响应，并通过实验验证 Noether 对称性方法的有效性，在提高变换器求解速度的同时还能保持很高的计算精度.

1 Buck-Boost 变换器的动力学方程

Buck-Boost 变换器的主电路如图 1(a)所示，变换器包括电感 L、电容 C、开关器件 T 和二极管 D.



(a) 主电路
(a) main circuit
(b) 等效电路
(b) equivalent circuit

图 1 Buck-Boost 变换器的电路图
Fig. 1 Circuit diagram of Buck-Boost converter

为简化分析，假设 Buck-Boost 变换器处于电流连续模式(CCM). 开关器件 T 和二极管 D 可以用一个理想的开关 u 来表示，其值被指定为 0 或 1，相应的等效电路如图 1(b)所示. 值得指出的是，如果开关器件 T 和二极管 D 分别用两个理想开关 u_1 和 u_2 表示，则所提出的方法也适用于电流断续模式(DCM).

选择电荷 q_L 和 q_C 为广义坐标，用矢量表示为 $\boldsymbol{q}=(q_L, q_C)^{\mathrm{T}}$，相应的独立电流为 $\dot{q}_L$ 和 $\dot{q}_C$(见图 1)，用矢量表示 $\dot{\boldsymbol{q}}=(\dot{q}_L, \dot{q}_C)^{\mathrm{T}}$. Buck-Boost 变换器的磁共能为

$$W'_{\mathrm{mag}}(\dot{q}_L)=\frac{1}{2}L\dot{q}_L^2$$

变换器的电场能量为

$$W_{\mathrm{e}}(q_C)=\frac{1}{2C}q_C^2$$

因此，Buck-Boost 变换器的 Lagrange 函数为

$$\mathscr{L}=W'_{\mathrm{mag}}(\dot{q}_L)-W_{\mathrm{e}}(q_C)=\frac{1}{2}L\dot{q}_L^2-\frac{1}{2C}q_C^2 \tag{1}$$

Buck-Boost 变换器的瑞利耗散函数是通过电阻 R_L 和 R 耗散能量，即

$$D=\frac{1}{2}R_L(\dot{q}_L)^2+\frac{1}{2}R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C]^2 \quad (2)$$

与广义坐标相对应的电压源为

$$U_{q_L}=uE,\ U_{q_C}=0 \quad (3)$$

根据开关电路的 Lagrange 方程[13]，可以得到 Buck-Boost 变换器的动力学方程为

$$\begin{cases} L\ddot{q}_L=-R_L\dot{q}_L-(1-u)R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C]+uE \\ \dfrac{q_C}{C}=R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C] \end{cases} \quad (4)$$

2　Buck-Boost 变换器的 Noether 对称性

2.1　Buck-Boost 变换器的广义准对称变换和 Noether 定理

对于图 1 中的 Buck-Boost 变换器，其 Hamilton 作用量定义为

$$S(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t \quad (5)$$

其中 α 为任意曲线. 引入广义电荷坐标和时间的无穷小群变换

$$t^*=t+\Delta t,\ q_L^*(t^*)=q_L(t)+\Delta q_L,\ q_C^*(t^*)=q_C(t)+\Delta q_C \quad (6)$$

它们的展开形式是

$$\begin{cases} t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_L^*(t^*)=q_L(t)+\varepsilon\xi_1(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_C^*(t^*)=q_C(t)+\varepsilon\xi_2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \quad (7)$$

其中 ε 为无限小参数，ξ_0、ξ_1 和 ξ_2 是无穷小变换的生成元或生成函数，在变换(7)下，曲线 α 被变换为临近曲线 α^*，相应的哈密顿作用量变为

$$S(\alpha^*)=\int_{t_1^*}^{t_2^*}L(t^*,\boldsymbol{q}^*,\dot{\boldsymbol{q}}^*)\mathrm{d}t^* \quad (8)$$

变分 ΔS 是 $S(\gamma^*)-S(\gamma)$ 中相对于 ε 的主要线性部分. 根据等时变分和全变分之间的关系[22]，可以得到

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\Delta t+L\dot{q}_L\delta q_L)-L\ddot{q}_L\delta q_L-\frac{q_C}{C}\delta q_C\right\}\mathrm{d}t \quad (9)$$

由于

$$\begin{cases} \Delta t=\varepsilon\xi_0 \\ \delta q_L=\Delta q_L-\dot{q}_L\Delta t=\varepsilon(\xi_L-\dot{q}_L\xi_0) \\ \delta q_C=\Delta q_C-\dot{q}_C\Delta t=\varepsilon(\xi_C-\dot{q}_C\xi_0) \end{cases} \quad (10)$$

则方程式(9)可以表示为

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[L\xi_0+L\dot{q}_L(\xi_L-\dot{q}_L\xi_0)]-L\ddot{q}_L(\xi_L-\dot{q}_L\xi_0)-\frac{q_C}{C}(\xi_C-\dot{q}_C\xi_0)\right\}\mathrm{d}t \quad (11)$$

Buck-Boost 变换器电路中存在耗散电阻和电压源，是典型的非保守系统，因此 Buck-Boost 变换器的 Noether 对称性实际上是广义 Noether 准对称变换，定义如下：

定义　无穷小群变换(7)是广义 Noether 准对称变换，当且仅当 Buck-Boost 变换器的哈密顿作用量是无穷小群变换(7)的广义准不变量，即

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)+R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C]\delta q_C+\{-R_L\dot{q}_L-(1-u)R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C]+uE\}\delta q_L\Big)\mathrm{d}t \quad (12)$$

始终成立，其中 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为规范函数，则称变换(7)是 Buck-Boost 变换器的广义准对称变换.

根据 Buck-Boost 变换器的广义准对称变换的定义，利用式(11)、式(12)和 $\Delta G=\varepsilon G$ 可以得到 Buck-Boost 变换器的 Noether 恒等式

$$-\frac{q_C}{C}\xi_2+L\dot{q}_L\dot{\xi}_1+\left(\frac{1}{2}L\dot{q}_L^2-\frac{1}{2C}q_C^2-L\dot{q}_L^2\right)\dot{\xi}_0+\{-R_L\dot{q}_L-(1-u)R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C]+uE\}(\xi_2-\dot{q}_L\xi_0)+R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C](\xi_2-\dot{q}_C\xi_0)=-\dot{G} \quad (13)$$

利用 Noether 恒等式(13)，可以得到 Killing 方程

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}L\dot{q}_L^2-\frac{1}{2C}q_C^2-L\dot{q}_L^2\right)\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0}{\partial q_L}\dot{q}_L+\frac{\partial\xi_0}{\partial q_C}\dot{q}_C\right)+L\dot{q}_L\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial t}+\frac{\partial\xi_1}{\partial q_L}\dot{q}_L+\frac{\partial\xi_1}{\partial q_C}\dot{q}_C\right)-\frac{q_C}{C}\xi_2+R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C](\xi_2-\dot{q}_C\xi_0)+\{uE-R_L\dot{q}_L-(1-u)R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C]\}\times(\xi_1-\dot{q}_L\xi_0)=-\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial q_L}\dot{q}_L-\frac{\partial G}{\partial q_C}\dot{q}_C \\ \left(\frac{1}{2}L\dot{q}_L^2-\frac{1}{2C}q_C^2-L\dot{q}_L^2\right)\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_L}+L\dot{q}_L\frac{\partial\xi_1}{\partial\dot{q}_L}=-\frac{\partial G}{\partial\dot{q}_L} \\ \left(\frac{1}{2}L\dot{q}_L^2-\frac{1}{2C}q_C^2-L\dot{q}_L^2\right)\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_C}+L\dot{q}_L\frac{\partial\xi_1}{\partial\dot{q}_C}=-\frac{\partial G}{\partial\dot{q}_C} \end{cases} \quad (14)$$

显然，当给定 Lagrange 函数 L、电压源 u_k 和规范函数 G 时，就有可能通过方程(13)或(14)找到 Buck-Boost 变换器的广义准对称变换的生成函

数 ξ_0、ξ_1 和 ξ_2.

根据上述讨论，可以给出 Buck-Boost 变换器的广义 Noether 定理.

定理 如果无限小变换(7)是 Buck-Boost 变换器的广义准对称变换，即存在规范函数 $G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$和生成函数 ξ_0、ξ_1、ξ_2 满足 Noether 恒等式(13)或 Killing 方程(14)，则 Buck-Boost 变换器具有 Noether 型守恒量

$$L\xi_0+L\dot{q}_L(\xi_1-\dot{q}_L\xi_0)+G=\text{const.} \tag{15}$$

证明 如果无穷小变换(7)是 Buck-Boost 变换器的广义准对称变换，则利用式(11)和式(12)，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[L\xi_0+L\dot{q}_L(\xi_L-\dot{q}_L\xi_0)-G]+\Big\{-\frac{q_C}{C}+R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C]\Big\}(\xi_C-\dot{q}_C\xi_0)+\{-R_L\dot{q}_L-(1-u)R[(1-u)\dot{q}_L-\dot{q}_C]+uE-L\ddot{q}_L\}(\xi_L-\dot{q}_L\xi_0)\Big)\mathrm{d}t=0$$

将 Buck-Boost 变换器的动力学方程(4)代入上述方程，考虑 ε 的独立性和积分区间$[t_1,t_2]$的任意性，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[L\xi_0+L\dot{q}_L(\xi_1-\dot{q}_L\xi_0)+G]=0$$

对上式积分，可得式(15).

显然，对于 Buck-Boost 变换器，如果能够找到变换器的广义准对称变换，则根据 Noether 定理可找到与其相应守恒量.

2.2 Buck-Boost 变换器的 Noether 对称性和守恒量

从图 1 和动力学方程式(4)中可以看出，改变开关位置(1 或 0)，Buck-Boost 变换器的工作过程也会发生变化. 因此，以下将按照开关的状态分别进行讨论.

当 T 开通而 D 断开时，即 $u=1$. 广义 Noether 恒等式(13)变为

$$-\frac{q_C}{C}\xi_2+L\dot{q}_L\dot{\xi}_1+\Big(\frac{1}{2}L\dot{q}_L^2-\frac{1}{2C}q_C^2-L\dot{q}_L^2\Big)\dot{\xi}_0+(E-R_L\dot{q}_L)(\xi_1-\dot{q}_L\xi_0)-R\dot{q}_C(\xi_2-\dot{q}_C\xi_0)=-\dot{G} \tag{16}$$

求解方程(16)，发现以下 3 组无穷小生成元和规范函数

$$\begin{cases}\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=0,G=R_Lq_L-Et\\ \xi_0=0,\xi_1=\mathrm{e}^{\frac{R_L}{L}t},\xi_2=0,G=-(LE/R_L)\mathrm{e}^{\frac{R_L}{L}t}\\ \xi_0=0,\xi_1=0,\xi_2=\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}t},G=Rq_C\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}t}\end{cases}$$

将式(17)代入式(15)，可以得到 Buck-Boost 变换器相应的守恒量为

$$\begin{cases}I_1=L\dot{q}_L+R_Lq_L-Et\\ I_2=L\dot{q}_L\mathrm{e}^{\frac{R_L}{L}t}-(LE/R_L)\mathrm{e}^{\frac{R_L}{L}t}\\ I_3=Rq_C\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}t}\end{cases} \tag{18}$$

同样地，当 T 关闭而 D 开通时，即 $u=0$. Noether 恒等式(13)为

$$-\frac{q_C}{C}\xi_2+L\dot{q}_L\dot{\xi}_1+\Big(\frac{1}{2}L\dot{q}_L^2-\frac{1}{2C}q_C^2-L\dot{q}_L^2\Big)\dot{\xi}_0+[-R_L\dot{q}_L-R(\dot{q}_L-\dot{q}_C)](\xi_1-\dot{q}_L\xi_0)+R(\dot{q}_L-\dot{q}_C)(\xi_2-\dot{q}_C\xi_0)=-\dot{G} \tag{19}$$

可以找到 1 组无限小生成元和规范函数

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=0,G=(R_L+R)q_L-Rq_C \tag{20}$$

将式(20)代入式(15)，可以得到以下守恒量

$$I_4=L\dot{q}_L+(R_L+R)q_L-Rq_C \tag{21}$$

3 Buck-Boost 变换器的精确解

到目前为止，当 $u=0$ 或 $u=1$ 时，分别得到了四个守恒量. 这里基于这些守恒量，给出 Buck-Boost 变换器的动力学方程的精确解.

为了在指定的时间内进行变换器动力学行为的分析，需要确定理想开关函数 $u(t)$的值. 图 2 显示了理想开关函数 $u(t)$的波形，其中 T 为开关周期，则 Buck-Boost 变换器的占空比定义如下

$$D=\frac{t_1}{T} \tag{22}$$

从图 2 中可以看出，对于时间间隔$[nT,\ t_1+nT]$和$[t_1+nT,\ (n+1)T]$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$；函数 $u(t)$的值分别等于 1 和 0. 通过应用函数 $u(t)$的这些值，得到与开关 u 接通或断开的时间间隔相对应的输出电压和电感电流的方程. 因此，根据函数 $u(t)$的值，求解过程分为两种情况.

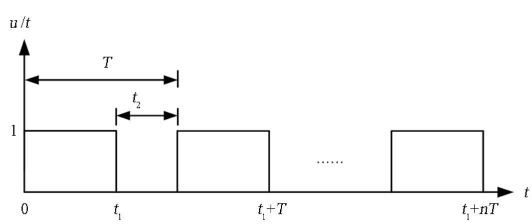


图 2 理想开关 $u(t)$的波形图

Fig. 2 Waveforms of the ideal switch function $u(t)$

(1)当 $t\in[nT,t_1+nT]$，即 $u=1$ 时. 考虑到函

数 $u(t)$的周期性,守恒量 I_1、I_2 和 I_3 可以表示为

$$\begin{cases} I_1 = L\dot{q}_L + R_L q_L - E(t-nT) \\ I_2 = L\dot{q}_L \mathrm{e}^{\frac{R_L}{L}(t-nT)} - (LE/R_L)\mathrm{e}^{\frac{R_L}{L}(t-nT)} \\ I_3 = Rq_C \mathrm{e}^{\frac{1}{RC}(t-nT)} \end{cases} \tag{23}$$

利用式(23),可以得到以下通解

$$\begin{cases} \dot{q}_L = \dfrac{I_2}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R_L}{L}(t-nT)} + \dfrac{E}{R_L} \\ q_L = \dfrac{I_1}{R_L} - \dfrac{I_2}{R_L}\mathrm{e}^{-\frac{R_L}{L}(t-nT)} - L\dfrac{E}{R_L} + \dfrac{E}{R_L}(t-nT) \\ \dfrac{q_C}{C} = \dfrac{I_3}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-nT)} \end{cases} \tag{24}$$

从通解(24)可以看出,守恒量 I_1、I_2、I_3 相当于通解中的待定常数,为了确定每个时刻的电感器电流[$i_L(t)=\dot{q}_L$]和电容器电压[$u_C(t)=q_C/C$]的值,应该确定守恒量 I_1、I_2 和 I_3 的值. 如果 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$的初始条件为

$$q_L\big|_{t=nT} = q_L(nT), \dot{q}_L\big|_{t=nT} = \dot{q}_L(nT), \quad \frac{q_C}{C}\bigg|_{t=nT} = \frac{q_C(nT)}{C} \tag{25}$$

可得 I_1,I_2 和 I_3 的值

$$\begin{cases} I_1 = L\dot{q}_L(nT) + Rq_L(nT) \\ I_2 = L\dot{q}_L(nT) - \dfrac{LE}{R} \\ I_3 = Rq_C(nT) \end{cases} \tag{26}$$

(2)同样地,当 $t\in[t_1+nT,(n+1)T]$,即 $u=0$ 时. 由于此时仅得到 1 个守恒量 I_4,不能直接构造系统的解,所以由式(21),有

$$q_C = \frac{L}{R}\dot{q}_L + \frac{R_L+R}{R}q_L - \frac{I_4}{R} \tag{27}$$

利用式(27)和动力学方程(4),并考虑到实际应用的系统都是处于弱阻尼状态,假设

$$\beta = R_L RC + L,\ \gamma = \sqrt{(R_L RC - L)^2 - 4LR^2C} \tag{28}$$

可以得到以下通解

$$\begin{cases} q_L = A_1\mathrm{e}^{\frac{-\beta+\gamma}{2LRC}(t-t_1-nT)} + A_2\mathrm{e}^{\frac{-\beta-\gamma}{2LRC}(t-t_1-nT)} + \dfrac{I_4}{R_L+R} \\ \dot{q}_L = A_1\dfrac{-\beta+\gamma}{2LRC}\mathrm{e}^{\frac{-\beta+\gamma}{2LRC}(t-t_1-nT)} + A_2\dfrac{-\beta-\gamma}{2LRC}\mathrm{e}^{\frac{-\beta-\gamma}{2LRC}(t-t_1-nT)} \\ \dfrac{q_C}{C} = A_1\dfrac{-\beta+\gamma}{2R^2C^2}\mathrm{e}^{\frac{-\beta+\gamma}{2LRC}(t-t_1-nT)} + A_2\dfrac{-\beta-\gamma}{2R^2C^2}\mathrm{e}^{\frac{-\beta-\gamma}{2LRC}(t-t_1-nT)} + \\ A_1\dfrac{R_L+R}{RC}\mathrm{e}^{\frac{-\beta+\gamma}{2LRC}(t-t_1-nT)} + A_2\dfrac{R_L+R}{RC}\mathrm{e}^{\frac{-\beta-\gamma}{2LRC}(t-t_1-nT)} \end{cases} \tag{29}$$

其中 A_1 和 A_2 是任意常数. 为了确定每个时刻的 $i_L(t)$和 $u_C(t)$的值,常数 A_1、A_2 和守恒量 I_4 也应通过初始条件确定. 如果初始条件为

$$\begin{cases} q_L\big|_{t=t_1+nT} = q_L(t_1+nT), \dot{q}_L\big|_{t=t_1+nT} = \dot{q}_L(t_1+nT) \\ \dfrac{q_C}{C}\bigg|_{t=t_1+nT} = \dfrac{q_C(t_1+nT)}{C} \end{cases} \tag{30}$$

那么有

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{RC}{R_L+R}\dfrac{-\beta-\gamma}{-2\gamma}\left[\dfrac{q_C(t_1+nT)}{C} - \right. \\ \left. \dfrac{L}{RC}\dot{q}_L(t_1+nT)\right] - \dfrac{LRC}{-\gamma}\dot{q}_L(t_1+nT) \\ A_2 = -\left[\dfrac{q_C(t_1+nT)}{C} - \dfrac{L}{RC}\dot{q}_L(t_1+nT)\right]\times \\ \dfrac{RC}{R_L+R}\dfrac{-\beta+\gamma}{-2\gamma} + \dfrac{LRC}{-\gamma}\dot{q}_L(t_1+nT) \end{cases} \tag{31}$$

且

$$I_4 = L\dot{q}_L(t_1+nT) + (R_L+R)q_L(t_1+nT) - RC\frac{q_C(t_1+nT)}{C} \tag{32}$$

显然,在通解(24)和(29)中得到的守恒量 I_1、I_2、I_3、I_4 和常数 A_1、A_2,就可以在每个时刻获得电感器电流 $i_L(t)$和输出电压 $u_o(t)$ [即 $u_C(t)$]的值.

4　Buck-Boost 变换器的时间响应分析

利用 Noether 对称性得到求解结果,可以进一步研究 Buck-Boost 变换器的时间响应. Buck-Boost 变换器的时间响应包括瞬态和稳态响应. 瞬态响应是电感器电流 $i_L(t)$和输出电压 $u_o(t)$尚未达到其稳定值的响应部分,这部分时间响应从零时刻开始,直到稳态时刻结束.

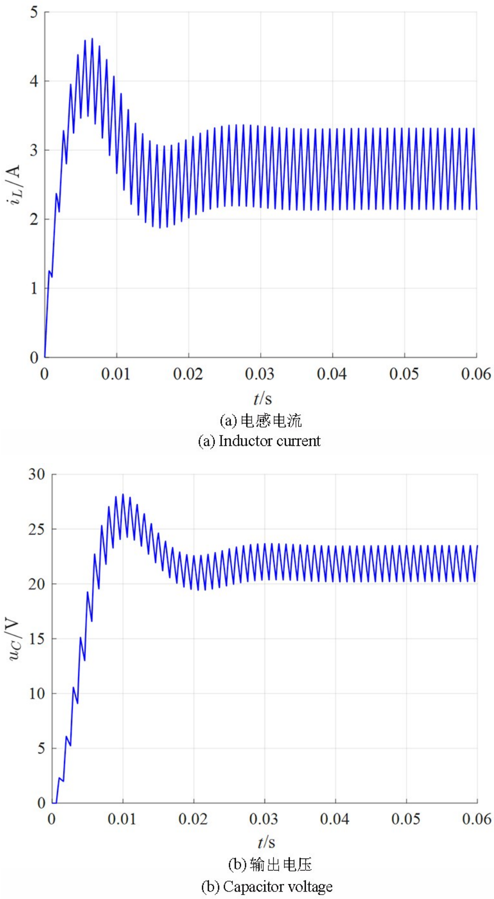
为了便于分析,Buck-Boost 变换器的主要参数考虑如下:$E=17$ V,$L=8$ mH,$C=0.2$ mF,$R=20$ Ω,$R_L=0.5$ Ω,$D=3/5$ 和 $f=1$ kHz. 开关 u 的控制按照图 2 进行,假设初始条件为

$$x_0 = [i_L, U_C]_{t=0} = [0\ \mathrm{A}, 0\ \mathrm{V}]$$

在每个开关时刻 nT,t_1+nT,($n=0,1,2,\cdots$),Buck-Boost 变换器的工作情况也会发生变化,因此应该重新计算初始条件 x_{nT},x_{t_1+nT},($n=0,1,2,\cdots$). 利用获得的精确解(24)和(29),结合守恒量 I_1 至 I_4 和任意常数 A_1 和 A_2 可以获得 Buck-Boost 变换器的时间响应. 根据以上分析,在 MATLAB 环

境下开发了计算程序，得到在 CCM 模式下 Buck-Boost 变换器 $i_L(t)$和 $u_o(t)$如图 3 所示.

从图 3 可以看出，$i_L(t)$和 $u_o(t)$的时间响应都包括瞬态和稳态部分. $i_L(t)$和 $u_o(t)$在经历了瞬态后最终达到稳态，变换器的稳态响应由在每个开关间隔中重复的瞬态形成. 电感 L 和电容 C 在最小值和最大值之间充电和放电，这导致在每个开关周期中产生瞬态. 图 3 中 Buck-Boost 变换器的瞬态响应是弱阻尼的，因为方程(28)中的 γ 值是虚值($=0.050\ 2\mathrm{i}$). 如果变换器的参数发生变化，应用同样的方法也可获得相应的结果.



(a) 电感电流
(a) Inductor current

(b) 输出电压
(b) Capacitor voltage

图 3 CCM 模式下 Buck-Boost 变换器的时间响应
Fig. 3 Time responses of the Buck-Boost converter in CCM

同样地，计算了 0.1 s 至 0.108 s 的结果，这时已经处于稳态，$u(t)$、$i_L(t)$和 $u_C(t)$的工作波形如图 4 所示. 可以看出，当 $u=1$ 时，电感 L 被充电并存储能量，然后电感电流 $i_L(t)$的值从其最小值增加到最大值. 在此期间，电容 C 放电，其电压值从最大值降低到最小值. 然而，当 $u=0$ 时，电感 L 放电并释放能量，电感电流 $i_L(t)$从其最大值减小到最小值，而电容 C 被充电并存储能量，电容电压 $u_C(t)$的值从其最小值增大到其最大值. 在整个开关周期内，输出电压 $u_o(t)$为带有纹波的直流.

从图 4 中还可以看到，输出电压 $u_o(t)$大于输入电压 E. 这是 Buck-boost 变换器的升压情况. 同样，如果 Buck-boost 变换器的主要参数变为：$E=17$ V，$L=8$ mH，$C=0.2$ mF，$R=20$ Ω，$R_L=0.5$ Ω，$D=2/5$ 和 $f=1$ kHz. Buck-Boost 变换器降压情况下稳态时相应的工作波形如图 5 所示.

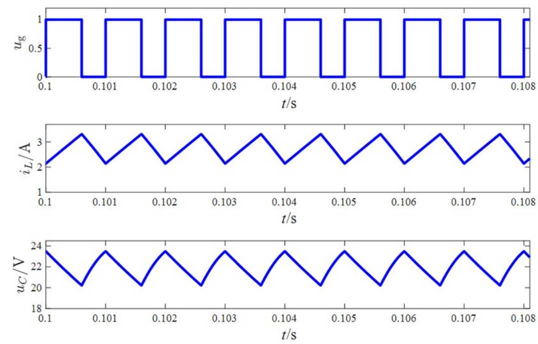


图 4 CCM 模式下 Buck-Boost 变换器稳态时的升压工作波形
Fig. 4 Boost operating waveforms on steady state of the Buck-Boost converter in CCM

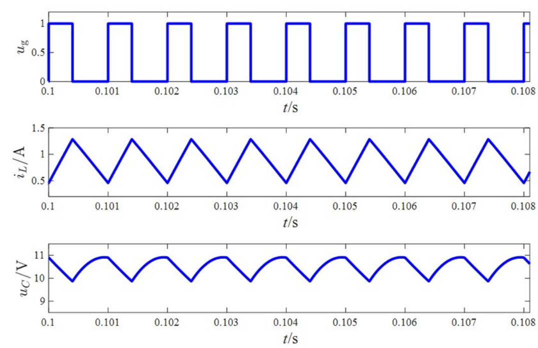


图 5 CCM 模式下 Buck-Boost 变换器稳态时的降压工作波形
Fig. 5 Buck operating waveforms on steady state of the Buck-Boost converter in CCM

5 Buck-Boost 变换器的 Noether 对称性方法与常用数值解法的结果比较

为了证明 Noether 对称性方法的有效性，这里分别采用 Noether 对称性方法和 Runge-kutta 四五阶方法(ode45)计算 Buck-Boost 变换器的稳态响应，并进行比较. Buck-Boost 变换器的主要参数如下：$E=17$V，$L=7$ mH，$C=0.25$ mF，$R=30$ Ω，$R_L=0.5$ Ω，$D=0.6$ 和 $f=1$ kHz.

首先，分别用 Noether 对称性方法和 Runge-kutta 四五阶方法(ode45)计算了 Buck-Boost 变换器的时间响应，计算周期为 120 个(0.12 s)，每个周期取 200 个点，除计算方法之外，两种方法的计算步骤完全一样. 图 6 给出了 Buck-Boost 变换器

达到稳态后从 0.1 s 到 0.108 s 内输出的波形．可以看出，两种方法计算结果得到的波形相互重合，通过放大细节后才能看到二者微小的差异，因此可以认为两种计算结果是吻合的，说明 Noether 对称性方法计算结果的正确性．

其次，比较了两种方法计算结果的误差．由于 Runge-kutta 四五阶方法（ode45）具有精度高的特点，是工程计算中常采用的计算方法，所以将它的计算结果作为基准．从 0.1 s 到 0.108 s 内，Noether 对称性方法相对于 Runge-kutta 四五阶方法（ode45）的输出波形计算误差如图 7 所示．可以看出不论是电感电流 $i_L(t)$ 还是输出电压 $u_o(t)$，两种方法计算差异都比较小，$i_L(t)$ 最大误差为 0.000 161 A，占此时实际电感电流的 0.013%，$u_o(t)$ 的最大误差不超过 0.000 548 V，是此时实际输出电压的 0.0023%．

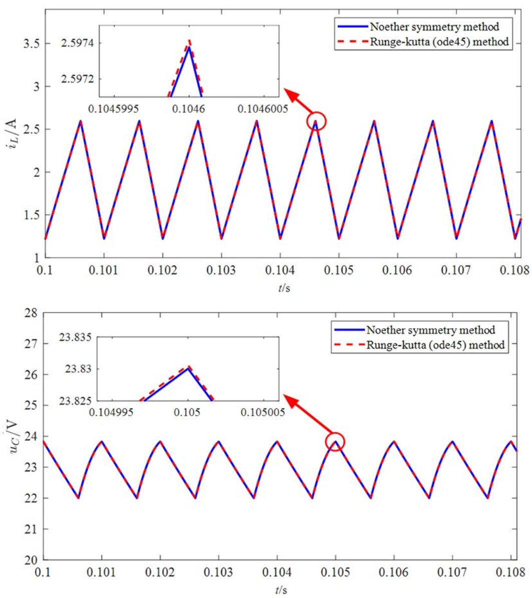


图 6　Buck-Boost 变换器稳态时降压工作波形的比较
Fig. 6　Comparison of Buck-Boost operating waveforms on steady state

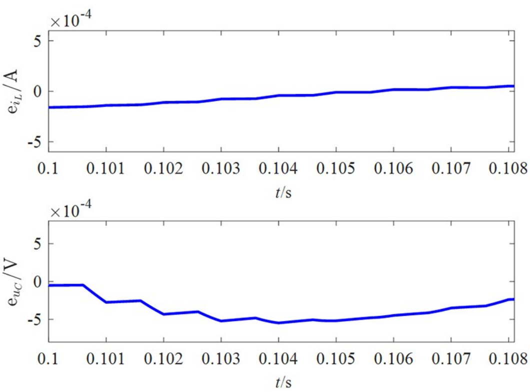


图 7　Buck-Boost 变换器稳态时降压工作波形的比较
Fig. 7　Comparison of Buck-Boost operating waveforms on steady state

从这些结果可以看出，Noether 对称性方法相对于 Runge-kutta 四五阶方法（ode45）的计算误差非常小接近于零，因此可以认为 Noether 对称性方法与 Runge-kutta 四五阶（ode45）方法在计算精度上接近，也具有高精度的特点．

最后，进行了大规模计算的实验．考虑到在进行 Buck-Boost 变换器的参数优化和控制器整定等涉及大规模计算场合时，Buck-Boost 变换器的动力学方程需要频繁的求解，所以反复计算 120 个周期内的时间响应 10 000 次来模拟大规模计算的场景．同样的计算规模，分别采用 Noether 对称性方法与 Runge-kutta 四五阶方法（ode45）进行计算，计算结果见表 1 所示．可以看出采用 Noether 对称性方法的运行时间为 286.15 s，仅为采用 Runge-kutta 四五阶方法（ode45）运行时间的五分之一，大幅提升了系统求解的计算速度．显然，对于有大规模计算需求时，采用 Noether 对称性方法具有更大的优势．

表 1　大规模计算的运行时间
Table 1　The running time of large-scale computing

求解方法	运行时间/s
Noether 对称性方法	286.15
Runge-kutta 四五阶方法（ode45）	1 437.18

6　结语

本文运用 Noether 对称性方法研究 Buck-Boost 变换器的对称性和守恒量，构造了变换器动力学方程的精确解，并应用于 Buck-Boost 变换器的时间响应分析中，通过实验验证了 Noether 对称性方法的有效性，从本文的研究中可以得到如下结论：

（1）研究 Buck-Boost 变换器的对称性时，求解 Noether 等式或 Killing 方程，需要尽可能多地求出系统的生成元和规范函数，以便得到足够多的守恒量，从而方便 Buck-Boost 变换器精确解的构建．

（2）通过 Noether 对称性方法与 Runge-kutta 四五阶方法（ode45）的结果对比，可以看出 Noether 对称性方法在保持高精度的同时可以大幅度地提高 Buck-Boost 变换器时间响应的计算速度，特别是在涉及大规模计算的场合具有明显的优势．

（3）Noether 对称性方法具有一定的通用性，对于一大类直流到直流电力变换器如 Buck、Boost 和 Cuk 等电力变换器动力学行为的研究也具有重要的参考价值．

参考文献

[1] HASANPOUR S, BAGHRAMIAN A, MOJALLALI H. Analysis and modeling of a new coupled-inductor buck-boost dc-dc converter for renewable energy applications [J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2020, 35(8): 8088−8101.

[2] RESTREPO C, BARRUETO B, MURILLO-YARCE D, et al. Improved model predictive current control of the versatile buck-boost converter for a photovoltaic application [J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2022, 37(3): 1505−1519.

[3] BLANES J M, GUTIÉRREZ R, GARRIGÓS A, et al. Electric vehicle battery life extension using ultracapacitors and an FPGA controlled interleaved buck-boost converter [J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2013, 28(12): 5940−5948.

[4] KRISHNAVENI M S, RASU M. Analysis of four switch positive buck boost converter based on mode selection circuit for portable battery applications [J]. International Journal of Applied Engineering Research, 2015, 10(20): 16571.

[5] 韩蒙，吴红飞，邢岩. 基于隔离升降压变换器的单级软开关功率因数校正变换器[J]. 中国电机工程学报，2017，37(8)：2361−2370.
HAN M, WU H F, XING Y. A single-stage soft-switching power factor correction converter based on an isolated buck-boost converter [J]. Proceedings of the CSEE, 2017, 37(8): 2361−2370. (in Chinese)

[6] WANG F Q, LI J, MA X K. Small-signal modeling and analysis of KY buck-boost converter [J]. Electric Power Components and Systems, 2016, 44(7): 783−793.

[7] LUO F L, YE H. Small signal analysis of energy factor and mathematical modeling for power dc-dc converters [J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2007, 22(1): 69−79.

[8] RIM C T, JOUNG G B, CHO G H. Practical switch based state-space modeling of DC-DC converters with all parasitics [J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 1991, 6(4): 611−617.

[9] DAVOUDI A, JATSKEVICH J, DE RYBEL T. Numerical state-space average-value modeling of PWM DC-DC converters operating in DCM and CCM [J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2006, 21(4): 1003−1012.

[10] WU C J, SI G Q, ZHANG Y B, et al. The fractional-order state-space averaging modeling of the Buck-Boost DC/DC converter in discontinuous conduction mode and the performance analysis [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 79(1): 689−703.

[11] TRICOLI P. Analytical closed-form solution for transient analysis of boost DC-DC converters [J]. COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 2011, 30(2): 706−725.

[12] MASHINCHI MAHERY H, BABAEI E. Mathematical modeling of buck-boost dc-dc converter and investigation of converter elements on transient and steady state responses [J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2013, 44(1): 949−963.

[13] SCHERPEN J M A, JELTSEMA D, BEN KLAASSENS J. Lagrangian modeling of switching electrical networks [J]. Systems & Control Letters, 2003, 48(5): 365−374.

[14] 梅凤翔. 李群和李代数约束力学系统的应用[M]. 北京：科学出版社，1999.
MEI F X. Appliications of Lie groups and Lie algebras to constrained mechanical systems [M]. Beijing: Science Press, 1999. (in Chinese)

[15] 黄子恒，陈菊，张志娟，等. 多刚体动力学仿真的李群变分积分算法[J]. 动力学与控制学报，2022，20(1)：8−17.
HUANG Z H, CHEN J, ZHANG Z J, et al. Lie group variational integratation for multirigid body system dynamic simulation [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(1): 8−17. (in Chinese)

[16] ZHANG Y, ZHAI X H. Noether symmetries and conserved quantities for fractional Birkhoffian systems [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81(1): 469−480.

[17] ZHANG Y, WANG X P. Mei symmetry and invariants of quasi-fractional dynamical systems with non-standard Lagrangians [J]. Symmetry, 2019, 11(8): 1061.

[18] 蔡铭俣，张毅. 变质量力学系统的 Herglotz 型 Lagrange 方程与 Noether 对称性和守恒量[J]. 动力学与控制学报，2022，20(6)：106−113.
CAI M Y, ZHANG Y. Herglotz type Lagrange equations and Noether symmetry and conserved quantity for mechanical systems with variable mass [J].

Journal of Dynamics and Control，2022，20(6)：106－113.（in Chinese）

[19] 董欣畅，张毅. 非保守非完整系统的 Herglotz 型 Noether 定理［J］. 动力学与控制学报，2024，22(5)：1－7.

DONG X C，ZHANG Y. Herglotz-type Noether theorem for nonconservative nonholonomic system［J］. Journal of Dynamics and Control，2024，22(5)：1－7.（in Chinese）

[20] 徐宏，傅景礼. 基于伺服电机驱动的进给传动系统扭转振动的 Lie 群分析方法［J］. 力学学报，2023，55(9)：2000－2009.

XU H，FU J L. Lie group analysis for torsibnal vibration of serve motor driven feeder drive system［J］. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2023，55(9)：2000－2009.（in Chinese）

[21] 傅景礼，陆晓丹，项春. 爬壁机器人系统的 Noether 对称性和守恒量［J］. 力学学报，2022，54(6)：1680－1693.

FU J L，LU X D，XIANG C. Noether symmetries and conserved quantities of wall climbing robot system［J］. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2022，54(6)：1680－1693.（in Chinese）

[22] 梅凤翔. 分析力学［M］. 北京：北京理工大学出版社，2013.

MEI F X. Analytical mechanics［M］. Beijing：Beijing Institute of Technology Press，2013.（in Chinese）