

# 摆动 Atwood 机混沌行为的几何分析\*

薛雷<sup>1,2</sup> 王本亮<sup>1,2†</sup>

(1. 北京理工大学 数学与统计学院, 北京 100081)

(2. 复杂信息数学表征分析与应用北京市重点实验室, 北京 100081)

**摘要** 利用几何方法研究了一种具有附加库仑相互作用的三维摆动 Atwood 机系统的混沌行为. 通过描述测地线分布的 Jacobi-Levi-Civita(JLC)方程研究与位形空间流形曲率特性相关的动力学稳定性. 计算了 Atwood 机系统在给定的 Jacobi 度量下的数量曲率. 同时比较了 Poincaré 截面提供的定性信息与几何研究结果,二者完全一致. 数值计算的结果表明,在具有附加库仑相互作用的摆动 Atwood 机系统中,其混沌区域中的点沿位形空间流形测地线的曲率为正值波动.

**关键词** Riemann 几何, Hamilton 系统, 混沌, 曲率

中图分类号:O302

文献标志码:A

## Geometric Analysis of Chaotic Behavior of the Swinging Atwood's Machine\*

Xue Lei<sup>1,2</sup> Wang Benliang<sup>1,2†</sup>

(1. School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(2. Beijing Key Lab on Mathematical Characterization, Analysis, and Applications of Complex Information, Beijing 100081, China)

**Abstract** The chaotic behavior of a three-dimensional swinging Atwood's machine system with additional Coulomb interactions is studied using geometric methods. The stability of dynamics, related to curvature properties of the configuration space manifold, is investigated through the Jacobi-Levi-Civita (JLC) equation for geodesic spread. The scalar curvature of the Atwood's machine system under the given Jacobi metric is calculated. Meanwhile, the qualitative information provided by the Poincaré sections are compared with the results of the geometric investigation, and they are completely consistent. The results of numerical calculations indicate that in the swinging Atwood's machine system with additional Coulomb interactions, the curvature along geodesics on the configuration space manifold fluctuates with positive values in chaotic regions.

**Key words** Riemann geometry, Hamiltonian system, chaos, curvature

### 引言

混沌现象的发现与研究为理解复杂系统的行为提供了新的视角. 大多数有关混沌的研究需要通过数值计算进行, Poincaré 截面和 Lyapunov 指数

是混沌数值分析中两种重要的方法. 在混沌研究领域,大量的研究聚焦于二自由度 Hamilton 系统. 由于 Hamilton 系统能量守恒的特性,其 Poincaré 截面在二自由度的情况下是一个直观的二维平面. 当系统的运动轨迹呈周期性时,其 Poincaré 截面是有

2024-12-03 收到第 1 稿, 2025-02-12 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目 (12272037, 12232009, 11872107), National Natural Science Foundation of China (12272037, 12232009, 11872107).

† 通信作者 E-mail: xinben4@gmail.com

限个离散的点;而轨迹为准周期时, Poincaré 截面将会是一条封闭曲线;对于混沌系统, 其 Poincaré 截面将是随机分布的且布满被规则区域划分出来的区域<sup>[1]</sup>. 而 Lyapunov 指数作为混沌的定量表述, 它是混沌运动对初值敏感性的主要特征量, 是系统稳定性的定量描述. 但 Lyapunov 指数是渐近量, 它与相空间局部性质的关系并不明显;此外, Lyapunov 指数虽然能够精确地测量混沌, 但其并未给出关于混沌行为起源的任何信息<sup>[2]</sup>.

除上述的经典方法外, 还有一种混沌研究的几何方法. 其与数值计算相结合, 已成功地应用于具有不同自由度的模型当中<sup>[3-7]</sup>, 包括具有非对角度量张量的低维动力学系统<sup>[8]</sup>. 该方法的基本思想是把 Hamilton 系统的轨迹看作是 Riemann 流形上的测地线, 从而将轨迹的不稳定性与流形的几何性质联系起来.

动力学稳定性的几何方法在揭示混沌的同时能够解释混沌的起源. 由 Jacobi-Levi-Civita (JLC) 方程给出的 Jacobi 场的演化包含了计算 Lyapunov 指数所需的所有信息, 并且通过位形流形的曲率性质能够解释动力学混沌的起源. 当然, 此方法也具有局限性. 例如, 目前只证明了在曲率处处为负的紧致流形中, 某些特定的曲率性质会导致测地流出现混沌. 在这种情况下, 流形的每个点都是双曲的, 某种意义上这是可积情况的相反极限. 在紧致负曲率流形的测地流中, 负曲率迫使附近的测地线以指数方式分离, 而紧致性确保了这种分离不会简化为系统的普通增长, 并迫使测地线折叠. 拉伸和折叠的共同作用是混沌的基本组成<sup>[2]</sup>.

摆动 Atwood 机 (SAM) 是一种经典的物理装置, 它由两个质量分别为  $m$  和  $M$  的物块通过不可伸长、无质量的绳子悬挂在两个半径为零的无摩擦滑轮上组成, 物块  $m$  可绕其滑轮自由摆动而不会与物块  $M$  碰撞. 这种装置不仅用于研究力学原理, 还因其展示的混沌和规律而成为研究非线性动力学和可积性的重要模型. 该模型是个二自由度系统, 由 Tufillaro 等进行了深入的研究<sup>[9,10]</sup>. 他们通过 Poincaré 截面进行数值分析, 结果表明, 对于大多数质量比值  $M/m > 1$  的 SAM 系统是不可积的并表现出高度混沌现象. 然而, 当质量比  $M/m = 4n^2 - 1$  时, 其中  $n \in \mathbb{Z}$ , 系统则表现得没那么混乱, 运动看起来很规律.

近期, Szumiński 和 Maciejewski<sup>[11]</sup> 研究了一种具有附加库仑相互作用的三维摆动 Atwood 机的动力学特性. 本文以该模型为例, 利用 Riemann 几何方法来研究动力系统混沌现象, 并尝试通过流形的曲率来解释模型中混沌产生的原因.

## 1 Hamilton 动力学与 Riemann 几何

Hamilton 原理表明, Lagrange 系统的自然运动对应于泛函 (Hamilton 作用量) 的极值. 而 Riemann 流形的测地线对应于弧长泛函的极值<sup>[2]</sup>. 一旦通过选择适当度量的方式, 建立起长度和作用量之间的联系, 就可能将测地线与物理轨迹对应起来, 即 Hamilton 流的轨迹可以看作是具有 Jacobi 度量的 Riemann 流形的测地线. 通过测地线和牛顿运动的变分公式, 建立动力学和 Riemann 几何之间的关系.

对于由 Lagrange 函数描述的动力系统

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}^i \dot{q}^j - V(\mathbf{q}) \quad (1)$$

经过 Legendre 变换, 得到 Hamilton 函数<sup>[12]</sup>

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_i p_i \dot{q}^i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$ 、 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ 、 $a_{ij}$  为动能矩阵 ( $1 \leq i, j \leq N$ ),  $p_i$  为动量,  $V$  为势能,  $N$  为系统自由度这里使用了 Einstein 求和约定.

Riemann 流形的测地线对应于弧长函数的极值

$$l = \int_A^B ds \quad (3)$$

根据 Hamilton 原理, 力学系统的轨迹由作用量的极值给出, 即

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}^i, \dot{\mathbf{q}}^i) dt = 0 \quad (4)$$

其可表示成 Maupertuis 形式

$$\delta \int_{\gamma} 2W dt = 0 \quad (5)$$

其中  $\gamma$  为连接点  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$  和  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$  的等能路径,  $W = E - V$ ,  $E$  为系统的总能量<sup>[13]</sup>.

选择一个能够将等式 (5) 重写为等式 (3) 形式的度量, 使系统的轨迹满足 Riemann 流形上测地线的条件. 在标准 Hamilton 系统的位形流形中, 定义 Jacobi 度量  $g_j$  为

$$g_{ij}(\mathbf{q}) = 2[E - V(\mathbf{q})] a_{ij} \quad (6)$$

使得

$$ds = 2W dt \quad (7)$$

该 Jacobi 度量在  $E > V$  的位形空间区域内定义,用  $(M, g_J)$  来表示这样的流形. 具有  $N$  个自由度的系统的位形空间  $M$  是一个  $N$  维可微流形, Lagrange 坐标  $(q_1, \dots, q_N)$  可以作为  $M$  的局部坐标.

在局部坐标下, Riemann 流形上的测地线方程由下式给出

$$\frac{d^2 q^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} = 0 \quad (8)$$

其中  $\Gamma_{jk}^i$  是与  $g_{ij}$  相关的 Levi-Civita 联络的 Christoffel 系数

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}) \quad (9)$$

## 2 混沌不稳定性的几何描述

测地流的稳定性可以通过描述测地线分布的 Jacobi-Levi-Civita (JLC) 方程研究. 它描述了一个向量场  $J$  的演化, 通过它可以测量相邻测地线之间的分离程度. 在局部坐标中, JLC 方程有形式

$$\frac{\nabla^2 J^k}{ds^2} + R_{ijl}^k \frac{dq^i}{ds} J^j \frac{dq^l}{ds} = 0 \quad (10)$$

其中, Riemann 曲率张量的分量

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jl}^r \Gamma_{kr}^i - \Gamma_{kl}^r \Gamma_{jr}^i \quad (11)$$

利用二阶协变导数和曲率张量的表达式, 可以得到方程一个更显式的形式<sup>[13]</sup>. 协变导数的局部坐标表达式为

$$(\nabla J / ds)^k = dJ^k / ds + \Gamma_{ij}^k (dq^i / ds) J^j \quad (12)$$

JLC 方程在局部坐标中可进一步表示为

$$\frac{d^2 J^k}{ds^2} + 2\Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{ds} \frac{dJ^j}{ds} + \left( \frac{\partial \Gamma_{ri}^k}{\partial q^j} \right) \frac{dq^r}{ds} \frac{dq^i}{ds} J^j = 0 \quad (13)$$

这是独立于位形流形度量的一般有效形式.

在二维流形的情况下, Riemann 曲率张量唯一的非零分量为  $R_{2121}$ , JLC 方程可进一步化简为

$$\frac{d^2 \Psi}{ds^2} + \frac{R(s)}{2} \Psi = 0, \quad \frac{d^2 \Phi}{ds^2} = 0 \quad (14)$$

$$R = \frac{2R_{2121}}{\det g} \quad (15)$$

其中  $\Psi$  和  $\Phi$  是  $J$  相对于  $\dot{\gamma}$  的垂直分量和平行分量,  $R(s)$  是流形在点  $P = \gamma(s)$  处的数量曲率. 测地线分布的平行分量不加速, 只有垂直分量  $\Psi$  能传达关于附近测地线行为的信息.  $R(s)$  通常不是周期性的, 若其处处或几乎处处为负, 或者  $R(s)$  产生参数共振, 可导致方程(14)的解呈现出指数增长,

即测地流不稳定<sup>[8]</sup>. 然而, 在具有物理意义的测地流的情况下, 数量曲率很少为负<sup>[5]</sup>.

为解方程(14), 将其转换成一个关于时间  $t$  的微分方程

$$\ddot{\Psi} - \frac{\dot{W}}{W} \dot{\Psi} + 2RW^2 \Psi = 0 \quad (16)$$

通过代换  $\Psi = Y \sqrt{W}$  方程变为

$$\ddot{Y} + \Omega(t)Y = 0, \quad \Omega(t) = \frac{1}{2} \frac{\ddot{W}}{W} - \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{W}}{W} \right)^2 + 2RW^2 \quad (17)$$

$\Omega(t)$  一般不是周期性的, 虽然它是时间  $t$  的函数, 但它并不显式依赖, 而取决于该系统的一个特定的运动轨迹.

## 3 具有库仑相互作用的摆动 Atwood 机

图 1 为 Szumiński 和 Maciejewski<sup>[11]</sup> 研究的重力势和库仑势作用下的三维摆动 Atwood 机模型, 同样由两个质量分别为  $m$  和  $M$  的物块组成. 物块  $m$  在空间中摆动, 而物块  $M$  起着配重的作用, 它只沿垂直方向移动. 此外, 在左滑轮的中心, 存在静电点电荷  $Q_1$ , 物块  $m$  带有电荷量  $Q_2$ , 物块  $M$  电中性. 根据约束条件引入球面坐标  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = -r \cos \theta$ .

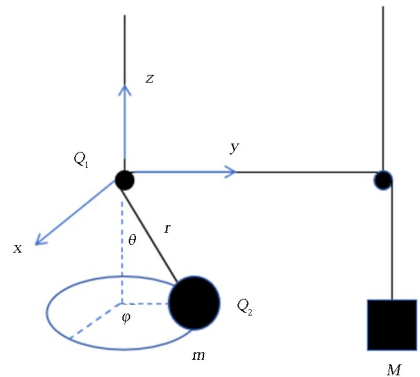


图 1 重力势和库仑势下的三维摆动 Atwood 机  
Fig. 1 Swinging Atwood's machine moving in the gravitational and Coulomb potentials

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \left( \frac{m+M}{2} \right) \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(r, \theta), \quad V(r, \theta) = gr(M - m \cos \theta) - \frac{\lambda}{r} \quad (18)$$

$\lambda$  是  $Q_1$  与  $Q_2$  和成正比的常系数, 经过 Legendre 变换

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m + M)\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad (19)$$

得到 Hamilton 函数

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{p_r^2}{m + M} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} \right) + \frac{\Pi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r, \theta) \quad (20)$$

其中

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \Pi = \text{const.} \quad (21)$$

该系统有两个自由度, 有效势能为

$$V_E(r, \theta, \Pi) = \frac{\Pi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r, \theta) \quad (22)$$

当  $\Pi=0$  时, 物块  $m$  在平面内摆动, 当  $\Pi \neq 0$  时, 物块  $m$  在三维空间中摆动.

根据公式(6), 定义具有库仑相互作用的摆动

Atwood 机的 Jacobi 度量

$$g_J = 2(E - V_E) \begin{pmatrix} m + M & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

利用公式(9)计算联络的 Christoffel 系数  $\Gamma_{jk}^i$

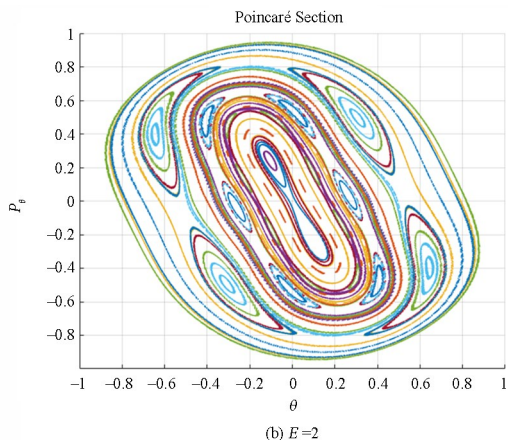
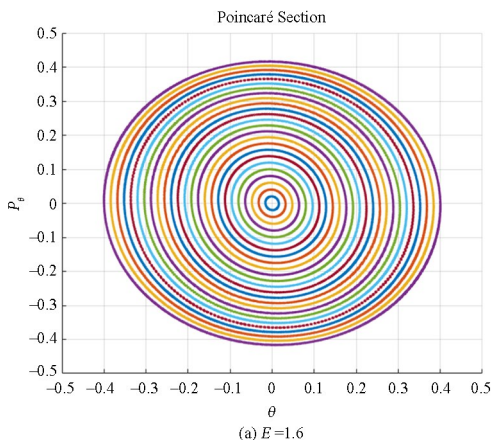
$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{-mr(gMr^2 + \lambda) + gm^2r^3 \cos(\theta) + \Pi^2 \csc(\theta)^2}{r[2mr(E - gMr^2 + \lambda) + 2gm^2r^3 \cos(\theta) - \Pi^2 \csc(\theta)^2]}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{-\Pi^2 \cot(\theta) \csc(\theta)^2 + gm^2r^3 \sin(\theta)}{2mr(-Er + gMr^2 - \lambda) - 2gm^2r^3 \cos(\theta) + \Pi^2 \csc(\theta)^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{m^2r^2[2Er - 3gMr^2 + \lambda + 3gmr^2 \cos(\theta)]}{(m + M)[2mr(Er - gMr^2 + \lambda) + 2gm^2r^3 \cos(\theta) - \Pi^2 \csc(\theta)^2]}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{(m + M) \left[ \frac{\Pi^2 \cot(\theta) \csc(\theta)^2}{mr^2} - gmr \sin(\theta) \right]}{2mr(Er - gMr^2 + \lambda) + 2gm^2r^3 \cos(\theta) - \Pi^2 \csc(\theta)^2}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{m[2Er - 3gMr^2 + \lambda + 3gmr^2 \cos(\theta)]}{2mr(Er - gMr^2 + \lambda) + 2gm^2r^3 \cos(\theta) - \Pi^2 \csc(\theta)^2}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{-\Pi^2 \cot(\theta) \csc(\theta)^2 + gm^2r^3 \sin(\theta)}{2mr(-Er + gMr^2 - \lambda) - 2gm^2r^3 \cos(\theta) + \Pi^2 \csc(\theta)^2}. \end{aligned}$$

进一步算出数量曲率

$$\begin{aligned} R &= (16m^3r^3 \{ E(gMr^2 - \lambda) + gr[gm(m + M)r^2 + 4M\lambda] \} - 16gm^3r^4[-EMr + gM(m + M)r^2 + \\ &(3m - M)\lambda] \cos(\theta) + 18gm^2M\Pi^2r^3 \cot(\theta)^3 \csc(\theta) + 8m\Pi^2r[E(m - 3M)r + 3gM(-2m + M)r^2 - \\ &(2m + 3M)\lambda] \csc(\theta)^2 + 8m(m + M)\Pi^2r(Er - gMr^2 + \lambda) \cot(\theta)^2 \csc(\theta)^2 + 3gm^2\Pi^2r^3[16m + \\ &M + 9M \cos(2\theta)] \cot(\theta) \csc(\theta)^3 + 40m(m + M)\Pi^2r(Er - gMr^2 + \lambda) \csc(\theta)^4 - 8[m + \\ &M]\Pi^4 \csc(\theta)^6] / \{ 4(m + M)[2mr(Er - gMr^2 + \lambda) + 2gm^2r^3 \cos(\theta) - \Pi^2 \csc(\theta)^2]^3 \} \quad (24) \end{aligned}$$

### 4 数值模拟

图 2、图 3 为 SAM 系统在不同参数条件下的 Poincaré 截面, 其直观地反映了系统运动的规则与混沌. 图 2(a)、(b)表明系统规则运动, 而图 2(c)和图 3 表明系统出现混沌.



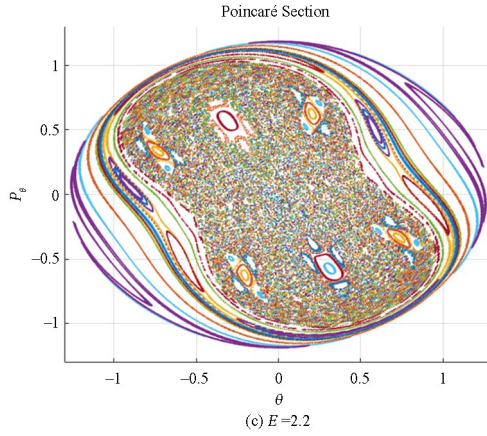


图2 系统(20)在不同能量下的 Poincaré 截面,取  $M=2, m=1, g=1, \lambda=0.5, \Pi=0$ , 截面为  $r=1, P_r > 0$ , 不同颜色对应不同的初始条件  
 Fig. 2 Poincaré sections of system (20) at different energy values, with  $M=2, m=1, g=1, \lambda=0.5, \Pi=0$ . The cross-section plane was specified as  $r=1, P_r > 0$ , and each colour corresponds to distinct initial condition

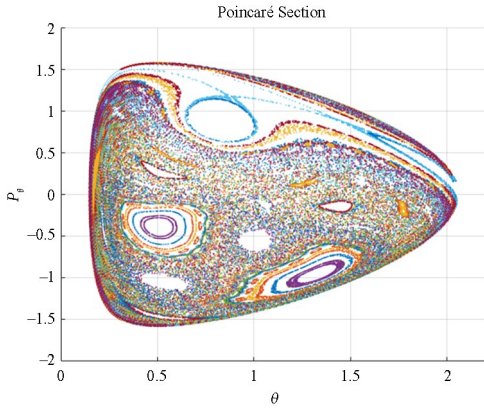


图3 系统(20)在  $\Pi=0.25, E=3$  时的 Poincaré 截面, 其他条件与图2中相同

Fig. 3 Poincaré sections of system (20) at  $\Pi=0.25, E=3$ , other conditions are the same as in Fig. 2

通过选择不同的代表点作为方程(17)的初始条件进行动力学模拟,绘制出  $Y$  随时间的演化图像,对 Poincaré 截面提供的定性信息和方程(17)的解进行比较.

对微分方程(17)进行数值求解. 设定  $Y$  的初值为  $10^{-9}$ ,演化图像中对时间  $t$  以及  $Y$  的绝对值取对数. 图4中初值点(a)、(b)对应规则点,(c)、(d)对应混沌点. 根据 Pettini 等人的研究<sup>[5]</sup>,当选取点位于规则区域时, $Y$  沿测地线的演化应是有界

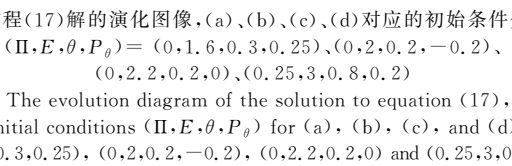
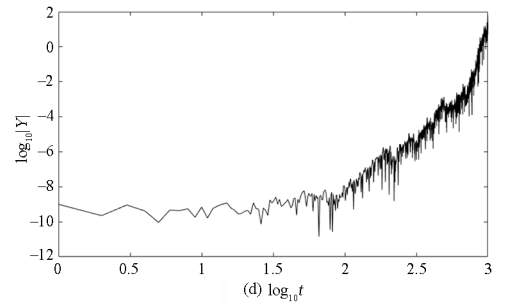
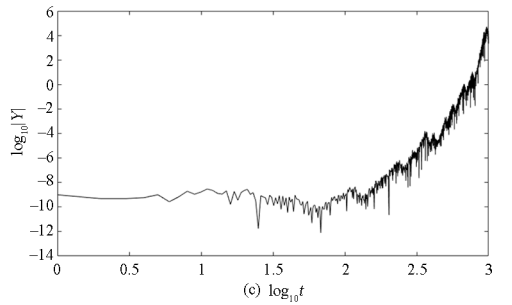
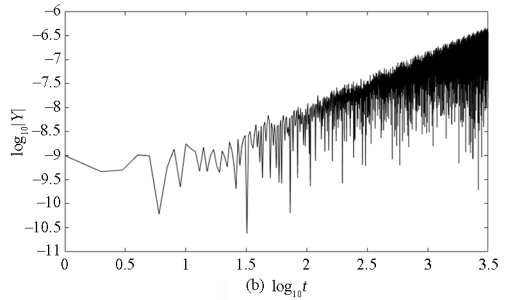
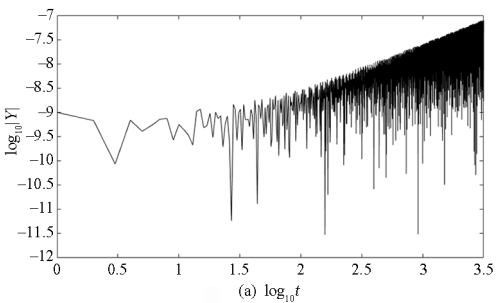


图4 方程(17)解的演化图像,(a)、(b)、(c)、(d)对应的初始条件分别为:  
 $(\Pi, E, \theta, P_\theta) = (0, 1.6, 0.3, 0.25), (0, 2, 0.2, -0.2), (0.2, 2, 0.2, 0), (0.25, 3, 0.8, 0.2)$

Fig. 4 The evolution diagram of the solution to equation (17), where the initial conditions  $(\Pi, E, \theta, P_\theta)$  for (a), (b), (c), and (d) are  $(0, 1.6, 0.3, 0.25), (0, 2, 0.2, -0.2), (0.2, 2, 0.2, 0)$  and  $(0.25, 3, 0.8, 0.2)$

或线性增长的,这与图4(a)、(b)的结果一致,但在该系统中暂未找到有界的情况. 相应的,选取点位



于混沌区域时,  $Y$  为呈指数增长的无界演化[图 4(c)、(d)], 这意味着初值相近的两条相邻的测地线彼此远离, 它们之间的距离呈指数增长.

同时, 系统的数量曲率总是为正值波动. 图 5 对  $R+1$  取对数, 展示了图 4(c)、(d) 中混沌点的数量曲率变化. 这种无规则的波动引起了 JLC 方程中的参数共振, 导致了方程(14)的解呈现出指数增长. 即在系统(20)定义的测地流中, 正曲率波动所诱导的相邻测地线的参数不稳定性会导致系统呈现出混沌现象. 目前已知某些系统的规则点的曲率能够呈现出周期变化, 如 Hénon-Heiles 系统, 但并非所有系统规则点的曲率都是周期变化的, 正曲率波动到什么程度系统将出现混沌需要进一步研究.

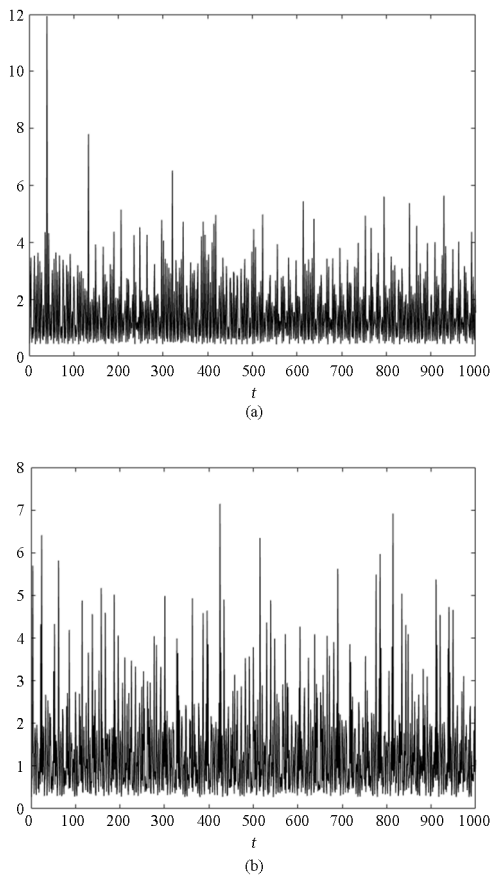


图5 图 4(c)、(d) 中混沌点的曲率对数变化图  
Fig. 5 Logarithmic variation of curvature of chaotic points in Fig. 4(c) and (d)

## 5 结论

本文利用 Riemann 几何方法来研究非线性动力系统混沌, 并将其应用于一种具有附加库仑相互作用的三维摆动 Atwood 机. 文中研究展示了基于 Riemann 几何的动力学混沌现象的几何描述是有效的, 其提供了与 Poincaré 截面相同的定性信

息. 此外, 数值计算的结果表明, 在具有附加库仑相互作用的 SAM 系统中, 混沌点沿其位形空间流形测地线的曲率为正值波动.

## 参考文献

- [1] 李江丹. 哈密顿系统中混沌的几何判据[D]. 太原: 山西大学, 2011: 13—15.  
LI J D. The geometric criteria for chaos in Hamiltonian systems [D]. Taiyuan: Shanxi University, 2011: 13—15 (in Chinese).
- [2] CASETTI L, PETTINI M, COHEN E G D. Geometric approach to Hamiltonian dynamics and statistical mechanics [J]. Physics Reports, 2000, 337 (3): 237—341.
- [3] CERRUTI-SOLA M, CIRAIOLO G, FRANZOSI R, et al. Riemannian geometry of Hamiltonian chaos: Hints for a general theory [J]. Physical Review E, 2008, 78(4): 046205.
- [4] CASETTI L, CLEMENTI C, PETTINI M. Riemannian theory of Hamiltonian chaos and Lyapunov exponents [J]. Physical Review E, 1996, 54(6): 5969—5984.
- [5] CERRUTI-SOLA M, PETTINI M. Geometric description of chaos in two-degrees-of-freedom Hamiltonian systems [J]. Physical Review E, 1996, 53 (1): 179—188.
- [6] DI CAIRANO L, GORI M, PETTINI G, et al. Hamiltonian chaos and differential geometry of configuration space-time [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2021, 422: 132909.
- [7] CERRUTI-SOLA M, CLEMENTI C, PETTINI M. Hamiltonian dynamics and geometry of phase transitions in classical XY models [J]. Physical Review E, 2000, 61(5): 5171—5190.
- [8] AWREJCIEWICZ J. Ordinary differential equations and mechanical systems [M]. Cham, Switzerland: Springer Cham, 2014, 138—148.
- [9] CASASAYAS J, NUNES A, TUFILLARO N. Swinging Atwood's machine: integrability and dynamics [J]. Journal de Physique, 1990, 51(16): 1693—1702.
- [10] NUNES A, CASASAYAS J, TUFILLARO N. Periodic orbits of the integrable swinging Atwood's machine [J]. American Journal of Physics, 1995,

- 63(2): 121–126.
- [11] SZUMIŃSKI W, MACIEJEWSKI A J. Dynamics and integrability of the swinging Atwood machine generalisations [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 110(3): 2101–2128.
- [12] 李媛媛, 张绍成, 花巍, 等. 幂律 Hamilton 方程及其在非线性动力学中的应用[J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(1): 1–7.
- LI Y Y, ZHANG S C, HUA W, et al. Power-law Hamiltonian equations and its application in nonlinear dynamics [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(1): 1–7. (in Chinese)
- [13] CIRAOLO G, PETTINI M. Geometry of chaos in models of stellar dynamics [J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2002, 83: 171–190.