第 23 卷第 3 期
2025 年 3 月

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 23 No. 3
Mar. 2025

文章编号:1672-6553-2025-23(3)-048-008

DOI:10.6052/1672-6553-2025-018

# 变换理论求解非线性常微分方程的若干进展*

姜文安[1†] 王国夫[2] 宋禹含[2] 刘畅[2] 陈立群[3]

(1. 江苏大学 土木工程与力学学院,镇江 212013)

(2. 辽宁大学 物理学院,沈阳 110036)

(3. 上海大学 力学与工程科学学院 ,上海 200444)

**摘要** 自然界中涉及的问题大多数都是非线性的,而对非线性系统现有的近似解析理论无法准确解释其复杂现象的本质,因此非线性系统的精确解具有非常重要的研究意义.本文概述了利用变换理论求解非线性常微分方程解析解的研究进展.首先,综述了任意参数的非线性常微分方程的变换过程及其解析解.其次,评述了参数满足可积条件的非线性常微分方程的变换过程及其对应的解析解.最后,给出了开展非线性系统精确解析解研究的若干建议.

**关键词** 非线性, 变换理论, 解析解, 可积条件

**中图分类号:**O320;O175.1 **文献标志码:**A

# Some Advances in Solving Nonlinear Ordinary Differential Equations by Transformation Theory*

Jiang Wenan[1†] Wang Guofu[2] Song Yuhan[2] Liu Chang[2] Chen Liqun[3]

(1. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(2. College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

(3. School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444,China)

**Abstract** Most of the problems involved in nature are nonlinear, and the existing approximate analytic theory of nonlinear system can not accurately explain the nature of its complex phenomena, so the exact solution of nonlinear system has very important significance. In this paper, the research progress of analytical solutions of nonlinear ordinary differential equations by using transformation theory is summarized. Firstly, the transformation process of nonlinear ordinary differential equations with arbitrary parameters and their analytical solutions are reviewed. Secondly, the transformation process of nonlinear ordinary differential equations with integrable parameters and their corresponding analytic solutions are reviewed. Finally, some suggestions for the study of exact analytical solutions for nonlinear systems are given.

**Key words** nonlinear, transformation theory, exact solution, integrability condition

2024-12-12 收到第 1 稿,2025-02-10 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(12232009,12372001,12472001),江苏大学高级人才启动基金(21JDG057),National Natural Science Foundation of China(12232009,12372001,12472001),Senior Talent Start-up Fund of Jiangsu University (21JDG057).

† 通信作者 E-mail:wajiang@ujs.edu.cn

## 引言

在实际工程结构中，我们遇到的现象及问题多数都是非线性的，求解非线性微分方程的解析解一直是分析力学[1-4]、数学[5]和非线性动力学[6,7]的重要研究课题. 尤其是分析力学学科带头人梅凤翔先生的专著《高等分析力学》[1]的出版，详细介绍了约束力学系统运动微分方程的积分方法，诸如降阶法、Hamilton-Jacobi 方法、Noether 对称性、积分不变量和场方法等，推动了分析力学积分方法的快速发展. 另外，梅凤翔先生把 Lagrange 力学逆问题的提法、解法和方程封闭的方法，发展到各类动力学系统的不同积分理论，创立了动力学逆问题的理论体系[8].

但大多数非线性微分方程的精确解难以直接获得，因此研究人员通过不懈的努力寻找许多方法求得非线性常微分方程的近似解析解. 其中近似求解方法主要包括 Adomian 分解法[9,10]、摄动法[11]、变分迭代法[12-14]、同伦分析法[15-18]、能量平衡法[19-21]、Hamilton 方法[22,23]等. 尽管近似解可以解决一些系统无法精确求解问题，但近似解不能准确解释其复杂现象的本质，更无法判断数值算法及数值解的有效性. 因此，精确解析解的研究很有必要.

目前求非线性系统精确解析解的方法主要有李对称性变换[24-27]、构造法[28-31]和 Prelle-Singer (PS)算法[32]. 其中动力学系统的可积性被广泛地报道，冯兆生等[33]利用李对称约化找到两个非平凡的无穷小生成元，并用它们构造了正则变量. 再通过逆变换，得到了给定参数条件下原系统的第一积分. Man[34]介绍了确定二维常微分方程自治系统初等第一积分的 PS 法，并讨论了如何将求解初等第一积分推广到更高的维度. Man 和 Maccallum[35]提出了一种计算 PS 算法所需的达布多项式的方法，避免了常数场的代数扩展. 最初的 PS 算法主要适用于一阶非线性常微分方程，随后 Duarte 等[36]将 PS 算法推广至二阶非线性常微分方程. Chandrasekar 等[37]讨论了利用推广的 PS 方法求解二阶非线性微分方程一般解的过程. Duarte 和 Mota[38]给出一种基于达布变换和 PS 方法的半演算法，求解了一类有理二阶常微分方程的初等第一积分. Pradeep 等[39]利用修正的 PS 方法，得到了一类非线性系统在不同参数条件下的 5 个第一积分. Gordoa 等[40]应用 PS 方法研究了耦合的二阶和三阶微分方程的第一积分. Maheswari 等[41]通过 Painleve 分析发现改进的 Hénon-Heiles 系统对于三个不同的参数限制具有 Painleve 性质，且对于每一种确定的情况，使用 PS 方法构造了两个独立的第一积分.

在分析力学研究领域，梅凤翔先生把一系列分析力学的积分方法用于抽象微分方程的求解，创立了微分方程的力学化方法[4]. 其中利用变换理论，将一般的运动微分方程 Hamilton 正则化，再利用 Hamilton 系统特殊的几何性质，求解系统的第一积分和解析解，得到了许多重要的成果. 另外，变换理论也被应用于不同的约束力学系统[42-44].

近年来，变换理论继续被发展用于求解非线性微分方程的解析解. Udwadia 和 Cho[45]通过引入时间的对数变换，推导了 Duffing-van der Pol 振子可积性的参数条件，将难以求解的非线性非保守微分方程转化为可积的非线性保守系统，进而解出方程的精确解析解. 刘畅等[46]基于以上时间对数变换，给出了一类更一般的 $n$ 阶非线性 Duffing-van der Pol 系统的可积性条件及其精确解，并数值验证了精确解的有效性. 尽管非线性常微分方程的解析解取得了一些进展，但由于非线性系统的复杂性，还有大量的非线性系统精确解没有被发现，相关研究依然面临较大挑战. 因此，本文综述了变换理论求解非线性常微分方程精确解的进展，对未来的发展提出一些展望，为工程领域的应用提供理论支撑.

## 1　任意参数的非线性常微分方程

### 1.1　Bernoulli 方程

Bernoulli 方程[47]是一类典型的非线性常微分方程，其表达式为

$$y_x + P(x)y = Q(x)y^n \tag{1}$$

当 $n=0,1$ 时，方程为一阶线性微分方程. 当 $n\neq 0,1$ 时，方程两边同时除以 $y^n$，再做变换 $z=y^{1-n}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \tag{2}$$

分离变量，再利用常数变易法，可得通解

$$y = \left[(1-n)\int Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right]^{\frac{1}{1-n}}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{3}$$

### 1.2 欧拉方程

欧拉方程[47]在研究热的传导、圆膜的振动、电磁波的传播等问题时经常涉及.欧拉方程是一类$n$阶变系数常微分方程,即

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x) \tag{4}$$

其中$p_1, p_2, \cdots, p_n$均为常数.做非线性变换$x=\mathrm{e}^t$变换则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \end{cases} \tag{5}$$

用微分算子$D$表示变量的求导运算$D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$,用$y^{(k)}$表示$\dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$,我们可以得到

$$\begin{cases} xy' = Dy, x^2 y'' = D(D-1)y \\ x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y \end{cases} \tag{6}$$

代入到欧拉方程的每一项可得到以$t$为变量的常系数微分方程,进而可以求出常系数微分方程的通解,再根据变换就得到欧拉方程的通解.

### 1.3 贝塞尔半阶方程

贝塞尔方程是一类变系数常微分方程,Nayfeh[48]通过非线性变换得到贝塞尔半阶方程的通解.其方程为

$$t^2 \ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - \frac{1}{4})x = 0 \tag{7}$$

其中$\dot{x}$和$\ddot{x}$是关于时间$t$的一阶和二阶导数.引入坐标变换$x(t)=t^{-1/2}y(t)$,则通解为

$$x = t^{-n}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \tag{8}$$

### 1.4 Hopf分岔的一类非线性系统

Nayfeh[48]给出了具有Hopf分岔的一类非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (ax+by)(x^2+y^2) \\ \dot{y} = -x + (ay-bx)(x^2+y^2) \end{cases} \tag{9}$$

其中,$a$和$b$为常数.这个系统的精确解析解很难直接解出.引入非线性变换$x=r\cos\beta$和$y=-r\sin\beta$,可以得到

$$\dot{r} = ar^3, \quad \dot{\beta} = 1 + br^2 \tag{10}$$

进而易得方程的精确解析解.

### 1.5 非线性幅值相位方程[48]

主参数共振情况下参数激励线性振子的振幅和相位方程为

$$\begin{cases} \dot{a} = -\mu a - \dfrac{1}{2} a \sin 2\beta \\ a\dot{\beta} = -\dfrac{1}{2}\sigma a - \dfrac{1}{2} a \cos 2\beta \end{cases} \tag{11}$$

其中$a$是谐和运动幅值,$\beta$是谐和运动的相位,$\mu$和$\sigma$是常数.该系统是非线性的,其精确解析解很难直接解出.引入非线性变换$x=a\cos\beta$和$y=a\sin\beta$,可以将系统转换成以下线性形式

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + \dfrac{1}{2}(\sigma-1)y \\ \dot{y} = -\mu y - \dfrac{1}{2}(\sigma+1)x \end{cases} \tag{12}$$

进而易得方程精确解析解.

### 1.6 指数非线性的系统

Hermann和Saravi[49]给出了一类含指数的非线性系统,其表达式为

$$x\mathrm{e}^y y' - \mathrm{e}^y = \frac{2}{x^2}, y(1) = 0 \tag{13}$$

引入指数变换$z=\mathrm{e}^y$,可得$z'=\mathrm{e}^y y'$,代入式(13)得

$$z' - \frac{z}{x} = \frac{2}{x^2} \tag{14}$$

可得它的特解是

$$z = 2x - \frac{1}{x} \tag{15}$$

将(15)用$z'=\mathrm{e}^y y'$进行变换,我们得到

$$y = \ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) \tag{16}$$

此为方程的精确解析解.

### 1.7 三角函数非线性系统

Hermann和Saravi[49]给出了一类含三角函数的非线性系统,其表达式为

$$2y' = (x-y)\cot(x) - [(x-y)\cot(x)]^{-1} + 2 \tag{17}$$

令$z=x-y$,代入到上式,得到

$$z' + \frac{1}{2}\cot(x) z = \frac{1}{2}\cot(x) z^{-1} \tag{18}$$

这是一个伯努利方程,易得其解.

### 1.8 高次方非线性方程

Hermann 和 Saravi[49]给出了一类含四次非线性的方程,即

$$x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0 \tag{19}$$

先将方程改写为

$$y'' + \left(\frac{1}{x}\right)^4 (xy' - y)^3 = 0 \tag{20}$$

令 $u \equiv xy' - y$ 和 $v \equiv 1/x$,代入式(21)得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = -vu^3 \tag{21}$$

显然上式可积,再利用逆变换,得原方程的解为

$$y = x\left[c_2 + \ln\left(\frac{x}{c_1 + \sqrt{1 + c_1^2 x^2}}\right)\right] \tag{22}$$

## 2 参数满足可积条件的非线性微分方程

### 2.1 杜芬振子

Duffing 振子是一种典型的非线性系统,Velan 和 Lakshmanan[50]利用非线性变换,发现了系统可积的条件,得到了精确解. 其运动方程为

$$\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_2 x + x^3 = 0 \tag{23}$$

其中,$c_1$、$c_2$ 是常数,$x$ 是关于时间 $t$ 的函数,$\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 是关于时间 $t$ 的微分. 为得到方程的可积性条件,引入(24) 式的变换

$$z = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{-c_1 t}{3}}, x = -\frac{wc_1 z}{3} \tag{24}$$

从而原方程(23)可化为

$$-\frac{{c_1}^2 z^3}{27} w_{zz} + \left(\frac{2c_1^2}{27} - \frac{c_1 c_2}{3}\right) w_z - \left(-\frac{wc_1 z}{3}\right)^3 = 0 \tag{25}$$

为得到系统的精确解,参数需满足可积性条件

$$\frac{2c_1^2}{27} = \frac{c_1 c_2}{3} \tag{26}$$

从而可得原系统(23)满足可积条件(26)的解析解为

$$x(t) = \left(\frac{\sqrt{2}\,c_1}{3}\right)\gamma \exp\left(\frac{-c_1 t}{3}\right)\mathrm{cn}(\gamma v; k) \tag{27}$$

其中,$v = \sqrt{2}\exp\left(\frac{-c_1 t}{3}\right) - z_0$.

### 2.2 亥姆霍兹振子

亥姆霍兹振子是一种谐振系统,在无摩擦力和外力的情况下,解析解存在且完全可积. 在有摩擦力时,Almendral 和 Sanjuán[51]利用指数变换推导了系统的可积条件. 带摩擦力的亥姆霍兹振子的运动方程为

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x - \beta x^2 = 0 \tag{28}$$

其中,$\delta$、$\alpha$ 和 $\beta$ 是参数,$x$、$\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 是关于时间 $t$ 的函数,分别代表位移、速度和加速度. 为得到可积性条件,引入变换

$$w = -\frac{25\beta}{12\delta^2}\mathrm{e}^{\frac{2\delta t}{5}} x, \quad z = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{-\delta t}{5}} \tag{29}$$

则 $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 与新变量之间的关系为

$$\begin{cases} \dot{x} = x_z\left(\dfrac{-\delta z}{5}\right) \\ \ddot{x} = \dfrac{\delta^2 z^2}{25} x_{zz} + \dfrac{\delta^2 z}{25} x_z \end{cases} \tag{30}$$

将变换式(29)和式(30)代入式(28),再化简易得

$$-6\delta^4 z^4 w_{zz} + wz^2(36\delta^4 - 150\delta^2\alpha) - 36w^2\delta^4 z^4 = 0 \tag{31}$$

为得到系统的精确解析解,参数需满足如下的可积性条件

$$\alpha = \frac{6\delta^2}{25} \tag{32}$$

则方程(31)是可积的系统

$$w_{zz} + 6w^2 = 0 \tag{33}$$

该方程的解为魏尔斯特斯拉函数. 再利用逆变换可以得到原系统满足可积性条件的精确解.

### 2.3 Liénard 型非线性方程

Chandrasekar 等[52]研究了 Liénard 型非线性振子的可积性. 其运动方程为

$$\ddot{x} + kx\dot{x} + \frac{k^2}{9}x^3 + \lambda_1 x = 0 \tag{34}$$

引入变换

$$U = x\,\mathrm{e}^{\left(\frac{k}{3}\right)\int x(t')\mathrm{d}t'} \tag{35}$$

原式变为

$$\ddot{U} + \lambda_1 U = 0 \tag{36}$$

进而求得解为

$$x = \frac{U}{1 - \dfrac{k}{3\lambda_1}P} \tag{37}$$

详细的推导见文献[52].

### 2.4 Riccati 方程

Riccati 方程[25]是一种非线性微分方程,直接

无法求得其解. 其表达式为

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0 \tag{38}$$

取 $r=r(x)$ 做非线性变换 $r=\ln|x|$ 和 $s=xy$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}(xy)}{\mathrm{d}(\ln|x|)} = x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy \tag{39}$$

代回等式(38)可得可积的一阶方程为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = -(s-2)(s+1) \tag{40}$$

根据 $s$ 与 $y$ 的关系,可解得

$$y = \frac{2x^3 + C}{x(x^3 - C)} \tag{41}$$

## 2.5 广义亥姆霍兹振子

基于亥姆霍兹振子[51]的变换推导,可以给出广义亥姆霍兹振子的可积性的条件. 广义亥姆霍兹振子的表达式为

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x - \beta x^n = 0 \tag{42}$$

其中,$\delta$、$\alpha$、$\beta$ 为常数. 设 $w$ 和 $z$ 为一对规范变量,引入时空变换

$$\begin{cases} w = -\dfrac{c}{A^q}\delta^{-p}\mathrm{e}^{qd\delta t}x \\ z = A\mathrm{e}^{-d\delta t} \end{cases} \tag{43}$$

其中,$c$、$A$、$p$、$q$、$d$ 均为常数. 根据变量关系,原方程可变换为

$$d^2\delta^2 z^2 x_{zz} - d(1-d)\delta^2 z x_z + \alpha x - \beta x^n = 0 \tag{44}$$

将方程(44)通过变换从 $x(z)$ 变为 $w(z)$,并令变换(43)中的常数满足一定的关系,使得其中的 $w(z)$ 对 $z$ 的二阶导项与 $w(z)$ 项的系数为常数,从而可得到方程(42)的可积条件为

$$\frac{2n+2}{(n+3)^2}\delta^2 = \alpha \tag{45}$$

将变换后的 $w(z)$ 方程代入可积条件可得

$$w_{zz} - \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^2 \frac{\beta w^n}{c^{n-1}} = 0 \tag{46}$$

令 $m = -\left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^2 \dfrac{\beta}{c^{n-1}}$,等式(46)变为式(47)

$$w_{zz} + m w^n = 0 \tag{47}$$

则 $c = \left[-\left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^2 \dfrac{\beta}{m}\right]^{\frac{1}{n-1}}$,由于在方程从 $x(z)$ 变为 $w(z)$ 时常数满足了一定关系,$p$、$q$、$c$、$d$ 都可以用 $n$ 来表示,则 $w$、$z$ 变为

$$\begin{cases} w = \dfrac{-\left[-\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^2 \dfrac{\beta}{m}\right]^{\frac{1}{n-1}}}{A^{\frac{2}{n-1}}}\delta^{-\frac{2}{n-1}}\mathrm{e}^{\frac{2}{n+3}\delta t}x \\ z = A\mathrm{e}^{-\frac{n-1}{n+3}\delta t} \end{cases} \tag{48}$$

$c$ 的取值根据 $n$ 取不同值的变化而变化,从而得到广义亥姆霍兹振子的可积条件式(48).

## 2.6 杜芬一范德波尔方程

针对杜芬一范德波尔型方程,Udwadia 和 Cho[45]提出一种对数变换,求解了系统完全可积的条件. 其对应的运动方程为

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - \lambda)\dot{x} + \gamma x + \alpha x^3 = 0 \tag{49}$$

其中,$x(t)$ 是一个广义位移,$\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 表示对时间 $t$ 的一次导数和二次导数,$\beta$、$\lambda$、$\gamma$、$\alpha$ 都是常数. 对时间 $t$ 变量进行对数变换

$$t = v\ln\tau \tag{50}$$

其中,$v$ 为非零常数. 将上式变换代入方程(49),当系统的参数满足如下关系

$$\gamma = -\frac{m^2\alpha^2}{\beta^2}\left(1 + \frac{\beta^2\lambda}{3\alpha}\right) \tag{51}$$

则原方程有第一积分

$$\left(\dot{x} - \frac{3\alpha + \beta^2\lambda}{\beta}x + \frac{\beta}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{\frac{3\alpha t}{\beta}} = I \tag{52}$$

在初始时间 $t=0$ 时,等式(52)变成了

$$\dot{x}_0 - \frac{3\alpha + \beta^2\lambda}{\beta}x_0 + \frac{\beta}{3}x_0^3 = I \tag{53}$$

当 $I=0$ 时,可以得到一类精确的显式解

$$x = \left(\frac{\beta^2}{9\alpha + 3\beta^2\lambda} + Q\mathrm{e}^{\frac{-6\alpha - 2\beta^2\lambda}{\beta}t}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{54}$$

其中,$Q$ 是一个积分常数.

近期,刘畅等[46]给出了广义杜芬一范德波尔型方程的精确解. 系统的动力学方程为

$$\ddot{x} + \beta(x^{m-1} - \lambda)\dot{x} + \gamma x + \alpha x^m = 0 \tag{55}$$

其中,$m$ 可以是任何实数,通过式(50)的变换后,得到参数满足式(56)时

$$\gamma = -\frac{m^2\alpha^2}{\beta^2}\left(1 + \frac{\beta^2\lambda}{m\alpha}\right) \tag{56}$$

则原方程有第一积分

$$\left(\dot{x} - \frac{m\alpha + \beta^2\lambda}{\beta}x + \frac{\beta}{m}x^m\right)\mathrm{e}^{\frac{m\alpha t}{\beta}} = I \tag{57}$$

当 $I=0$ 时,可以得到一类精确的显式解

$$x = \left[\frac{\beta^2}{m(m\alpha + \beta^2\lambda)} + Q\mathrm{e}^{\frac{(1-m)(m\alpha + \beta^2\lambda)}{\beta}}\right]^{\frac{1}{1-m}} \tag{58}$$

其中，$Q$ 是一个积分常数.

## 3 结论

本文综述了通过非线性变换理论求解非线性常微分方程精确解的变换方案. 总结了一些可以通过非线性变换得到精确解析解和参数满足可积条件的非线性动力学系统.

非线性常微分方程精确解和可积性的研究有助于弄清系统在非线性作用下的运动规律，对相应非线性现象的科学解释和工程应用将起到重要作用. 因此，寻找精确解仍然具有重要意义.

虽然非线性常微分方程的精确解已经取得了一定的成果，但由于非线性系统的复杂性，不同形式的非线性差异很大，还有许多非线性系统的解目前仍然无法精确求出，仍值得深入探讨，可以在以下几个方面继续开展研究：

(1)非线性系统理论的发展不仅丰富了系统科学的内容，还与其他学科等交叉融合，为理论研究带来了新的分析工具. 因此，开展学科交叉融合，寻求新的理论求解方法，是未来一个长期的方向.

(2)代数方法已经研究了多年，但是进展缓慢. 近年来微分几何方法快速发展，从几何的角度深入分析非线性系统的几何结构，成为非线性系统研究的主流. 因此，几何化方法，会开辟一个新视角.

(3)现代数学工具的应用，如对称性理论、对称性约化、大范围分析等，仍是非线性系统精确求解的一种有效方法.

(4)随着计算机技术的发展及符号计算的推广，开展基于符号计算的程序化自动推演求解，有助于快速发现和找到非线性系统的精确解.

## 参考文献

[1] 梅凤祥，刘瑞，罗勇. 高等分析力学[M]. 北京：北京理工大学出版社，1991.
MEI F X, LIU R, LUO Y. Advanced analytical mechanics [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991. (in Chinese)

[2] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京：科学出版社，1999.
MEI F X. Applications of Lie groups and Lie algebras to constrained mechanical systems [M]. Beijing: Science Press, 1999. (in Chinese)

[3] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京：北京理工大学出版社，2004.
MEI F X. Symmetry and conserved quantity of constrained mechanical systems [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2004. (in Chinese)

[4] 梅凤翔，吴惠彬. 微分方程的分析力学方法[M]. 北京：科学出版社，2012.
MEI F X, WU H B. Analytical mechanics methods of differential equations [M]. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese)

[5] 蒋耀林，陈诚. 微分方程的李群方法[M]. 北京：科学出版社，2021.
JIANG Y L, CHEN C. Lie group method for differential equations [M]. Beijing: Science Press, 2021. (in Chinese)

[6] 胡海岩. 应用非线性动力学[M]. 北京：航空工业出版社，2000.
HU H Y. Application of nonlinear dynamics [M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2000. (in Chinese)

[7] 刘延柱，陈立群. 非线性振动[M]. 北京：高等教育出版社，2001.
LIU Y Z, CHEN L Q. Nonlinear vibrations [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese)

[8] 梅凤翔. 动力学逆问题[M]. 北京：国防工业出版社，2009.
MEI F X. Inverse problems of dynamics [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2009. (in Chinese)

[9] ADOMIAN G. Solving frontier problems of physics: the decomposition method [M]. Cham, Switzerland: Springer, 2013.

[10] AWONUSIKA R O. Analytical solution of a class of Lane-Emden equations: adomian decomposition method [J]. The Journal of Analysis, 2024, 32(2): 1009－1056.

[11] NAYFEH A H. Perturbation methods [M]. Weinheim, Germany: Wiley-VCH, 2000.

[12] HE J H. Variational iteration method－a kind of non-linear analytical technique: some examples [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1999, 34(4): 699－708.

[13] HE J H. Variational iteration method: some recent results and new interpretations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 207(1): 3－17.

[14] AMIR M, ASHRAF A, HAIDER J A. The variational iteration method for a pendulum with a combined translational and rotational system [J]. Acta Mechanica et Automatica, 2024, 18(1): 48-54.

[15] HE J H. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique [J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 135(1): 73-79.

[16] LIAO S J. Notes on the Homotopy analysis method: some definitions and theorems [J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2009, 14(4): 983-997.

[17] LIAO S J. Homotopy analysis method in nonlinear differential equations [M]. Beijing: Higher Education Press, 2012.

[18] ARUNKUMAR M, JOSHI G, MURUGESAN K. Estimating a semi-analytical solution for fish farm model using Homotopy analysis method [J]. International Journal of Dynamics and Control, 2024, 12(7): 2264-2279.

[19] HE J H. Preliminary report on the energy balance for nonlinear oscillations [J]. Mechanics Research Communications, 2002, 29(2/3): 107-111.

[20] DURMAZ S, KAYA M O. High-order energy balance method to nonlinear oscillators [J]. Journal of Applied Mathematics, 2012, 2012(1): 518684.

[21] MEHDIPOUR I, GANJI D D, MOZAFFARI M. Application of the energy balance method to nonlinear vibrating equations [J]. Current Applied Physics, 2010, 10(1): 104-112.

[22] HE J H. Hamiltonian approach to nonlinear oscillators [J]. Physics Letters A, 2010, 374(23): 2312-2314.

[23] YILDIRIM A, SAADATNIA Z, ASKARI H. Application of the Hamiltonian approach to nonlinear oscillators with rational and irrational elastic terms [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 54(1/2): 697-703.

[24] OLVER P J. Applications of Lie groups to differential equations [M]. New York: Springer New York, 1993.

[25] BLUMAN G W, ANCO S C. Symmetry and integration methods for differential equations [M]. New York: Springer New York, 2002.

[26] IBRAGIMOV N K. A practical course in differential equations and mathematical modelling: classical and new methods, nonlinear mathematical models, symmetry and invariance principles [M]. Beijing: Higher Education Press, 2010.

[27] LUO A C J, GAZIZOV R K. Symmetries and applications of differential equations [M]. Singapore: Springer Singapore, 2021.

[28] JONES S E, BUTSON G J. On Abel's identity, part I: non-linear differential equations [J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 160(2): 243-249.

[29] JONES S E, BUTSON G J, LEMMERS P L. On Abel's identity, part II: the integration of A nonlinear, non-conservative system [J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 160(2): 251-257.

[30] JONES S E. Further results on the construction of general solutions to some non-linear, second order, non-conservative systems [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1995, 30(3): 381-390.

[31] JONES S E, WANG P, RULE W K. A Lagrangian structure for the general solution to autonomous second order systems [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1997, 119(3): 489-491.

[32] PRELLE M J, SINGER M F. Elementary first integrals of differential equations [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1983, 279(1): 215.

[33] FENG Z S, GAO G Y, CUI J. Duffing: van der Pol: type oscillator system and its first integrals [J]. Communications on Pure & Applied Analysis, 2011, 10(5): 1377-1391.

[34] MAN Y K. First integrals of autonomous systems of differential equations and the Prelle-Singer procedure [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994, 27(10): 329-332.

[35] MAN Y K, MACCALLUM M A H. A rational approach to the Prelle-Singer algorithm [J]. Journal of Symbolic Computation, 1997, 24(1): 31-43.

[36] DUARTE L S, DUARTE S S, DA MOTA L P, et al. Solving second-order ordinary differential equations by extending the Prelle-Singer method [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001, 34(14): 3015-3024.

[37] CHANDRASEKAR V K, SENTHILVELAN M, LAKSHMANAN M. On the complete integrability and linearization of certain second-order nonlinear ordinary differential equations [J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2005, 461(2060): 2451-2477.

[38] DUARTE L G S, DA MOTA L A C P. Finding ele-

mentary first integrals for rational second order ordinary differential equations [J]. Journal of Mathematical Physics, 2009, 50(1): 013514.

[39] PRADEEP R G, CHANDRASEKAR V K, SENTHILVELAN M, et al. On certain new integrable second order nonlinear differential equations and their connection with two dimensional Lotka-Volterra system [J]. Journal of Mathematical Physics, 2010, 51(3): 033519.

[40] GORDOA P R, PICKERING A, SENTHILVELAN M. The Prelle-Singer method and Painlevé hierarchies [J]. Journal of Mathematical Physics, 2014, 55(5): 053510.

[41] UMA MAHESWARI C, MUTHUCHAMY N, CHANDRASEKAR V K, et al. Painlevé analysis, Prelle-Singer approach, symmetries and integrability of damped Hénon-Heiles system [J]. Journal of Mathematical Physics, 2024, 65(3): 032702.

[42] 尹明旭，陈向炜. Nielsen方程的三重组合梯度表示及其稳定性分析[J]. 动力学与控制学报，2023，21(2)：24－32.
YIN M X, CHEN X W. The triple combination gradient representation of Nielsen equation and its stability analysis [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(2): 24－32. (in Chinese)

[43] 薛冰，解加芳，张可心. 高阶Maggi方程的Birkhoff化及其辛算法[J]. 动力学与控制学报，2024，22(1)：22－26.
XUE B, XIE J F, ZHANG K X. Birkhoffization of higher-order Maggi equation and its symplectic algorithm [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(1): 22－26. (in Chinese)

[44] 朱琳，张毅. 一类二阶非标准广义力学的正则变换和第一积分 [J]. 动力学与控制学报，2024，22(4)：16－22.
ZHU L, ZHANG Y. Canonical transformations and first integrals of a class of second-order non-standard generalized mechanics [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(4): 16－22. (in Chinese)

[45] UDWADIA FIRDAUS E, HANCHEOL C. First integrals and solutions of Duffing-Van der Pol type equations [J]. Journal of Applied Mechanics, 2014, 81(3): 034501.

[46] LIU C, SONG Y H, JIANG W A, et al. First integrals and exact solutions of a class of nonlinear systems [J]. Acta Mechanica, 2023, 234(7): 2907－2917.

[47] 王高雄，周之铭，朱思铭，等. 常微分方程[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2006.
WANG G X, ZHOU Z M, ZHU S M, et al. Ordinary differential equation [M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)

[48] NAYFEH A H. The method of normal forms [M]. Weinheim, Germany: Wiley-VCH, 2011.

[49] HERMANN M, SARAVI M. Nonlinear ordinary differential equations: analytical approximation and numerical methods [M]..

[50] VELAN M S, LAKSHMANAN H. Lie symmetries and infinite-dimensional Lie algebras of certain nonlinear dissipative systems [J]. Journal of Physics A Mathematical General, 1995, 28(7): 1929－1942.

[51] ALMENDRAL J A, SANJU N M A F. Integrability and symmetries for the Helmholtz oscillator with friction [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2003, 36(3): 695－710.

[52] CHANDRASEKAR V K, SENTHILVELAN M, LAKSHMANAN M. Unusual Liénard-type nonlinear oscillator [J]. Physical Review E, 2005, 72(6): 066203.