

超细长弹性杆分析力学及应用^{*}

王鹏¹ 薛纭^{2†}

(1. 济南大学 土木建筑学院, 济南 250022)

(2. 上海应用技术大学 机械工程学院, 上海 201418)

摘要 超细长弹性杆是描述 DNA 分子超螺旋构型、生物系统的生长位形等方面的重要模型. 由于 DNA 分子的超大变形、复杂接触及生长等因素的存在对其建模和计算带来困难. 基于 Kirchhoff 动力学比拟建立的超细长弹性杆分析力学方法为其建模和分析开辟了新途径. 本文综述细长弹性杆的分析力学方法及在生长弹性杆和稳定性方面的拓展与应用, 并展望未来发展.

关键词 分析力学, Kirchhoff 动力学比拟, 弹性细杆, 稳定性, 生长力学

中图分类号: O316; O343

文献标志码: A

The Analytical Dynamics and Applications of Super Thin Long Elastic Rod^{*}

Wang Peng¹ Xue Yun^{2†}

(1. School of Civil Engineering and Architecture, University of Jinan, Jinan 250022, China)

(2. School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China)

Abstract Ultra-slender elastic rods are important models for describing the supercoiled configuration of DNA molecules, the growth configuration of biological systems, etc. Due to the existence of factors such as the super-large deformation, complex contact and growth of DNA molecules, it brings difficulties to their modeling and calculation. The analytical mechanics method of ultra-slender elastic rods established based on the Kirchhoff dynamics analogy has opened up a new way for their modeling and analysis. This paper reviews the analytical mechanics methods of slender elastic rods and their extensions and applications in growing elastic rods and stability, and looks forward to future developments.

Key words analytical mechanics, Kirchhoff kinetic analogy, thin elastic rod, stability, growth mechanics

引言

超细长弹性杆模型具有广阔的应用背景, 从自然界中微观的细菌丝、DNA 到宏观的轴突、肌肉纤维、植物的藤蔓、植物卷须, 以及工程中的心脏支架的导丝、软体机器人手臂、绳系卫星的系绳、海底电

缆、石油钻柱等, 虽然尺度不同, 但是几何上细长的相似性使得它们都可用超细长弹性杆模型模拟它们的几何位形. 弹性细杆力学在力学和工程领域的研究具有悠久的历史^[1,2], 而其在 DNA 分子几何位形描述的成功应用促使形成力学与生物学交叉研究的新领域^[3,4]. 考虑生长因素, 近些年弹性细杆

2024-12-07 收到第 1 稿, 2025-01-21 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12272141, 1172148), National Natural Science Foundation of China(12272141, 1172148).

[†] 通信作者 E-mail: xy@sit.edu.cn

被应用于生物生长问题的模型形成生长弹性细杆力学理论^[5].

DNA 作为重要的生物分子之一,不仅仅是因为其携带并传递生物系统基因的功能,还因为其力学弹性能帮助其完成相应生物功能,因此 DNA 的弹性在其生物功能中扮演着重要角色^[6]. 解释 DNA 弹性行为的最重要的模型之一即弹性细杆模型^[7,8]. 实验上已测得 DNA 的力学参数^[9]. 基于弹性细杆模型模拟 DNA 位形的研究取得重要进展^[10-15]. 随着研究的深入弹性杆力学也面临新的问题:极端细长导致小应变累积成大位移,形成极其复杂的几何位形;全新的约束方式,如自接触等对组蛋白缠绕方式的限制形成单面、非定常、非完整等特征^[16-20]. 鉴于分析力学建模方法在约束处理及数值计算的优势^[21],发展超细长弹性杆分析力学理论^[22,23]将为弹性细杆的研究提供一个新的途径.

由于极端细长及复杂约束导致建立的超细长弹性杆的运动微分方程具有强非线性,而对称性与守恒量理论在微分方程约化、降价甚至求精确解等方面具有固有优势^[24,25],开展超细长弹性杆分析力学的对称性与守恒量理论的研究为超细长弹性杆力学注入新方法^[26],特别对于含有双自变量的超细长弹性杆动力学的守恒量的研究也为经典分析力学带来新的问题^[27].

超细长弹性杆的稳定性分析对于理解生物体的几何结构的形成及控制其力学行为具有重要意义. 对于自由弹性细杆稳定性的研究已有诸多结果^[28-34],而实际生物系统或者工程系统中往往存在约束,例如圆柱面对心脏支架手术中导丝的限制或对油井钻杆的限制,组蛋白八聚体对 DNA 缠绕方式的限制等^[13,19,35],发展约束超细长弹性杆分析力学的稳定性分析的研究从而为解释或者指导生物体的几何形态或者工程应用提供参考.

生物生长是自然界复杂而又普遍存在的现象,也是生物学家一直关注的基本科学问题之一. 随着科技的发展,人们可以定量讨论力学因素与生长过程中生物体几何结构变化的关系,从而出现生长弹性理论^[36]. 细杆状结构在生物世界中具有普遍的进化优势,例如细菌丝、DNA、植物藤蔓、神经轴突甚至海洋贝壳的尖刺等,而这来自简单的物理原理与外部约束的结合^[37]. 约束对生物体几何位形的形成起到重要作用,例如肠膜约束在鸡肠生长过程

中形态形成的作用等^[38]. 考虑生长、运动和变形耦合为超细长弹性杆的建模和计算带来挑战,有必要将经典超细长弹性杆分析力学理论拓展到考虑生长的情形,建立生长超细长弹性杆的分析力学,从而为生长问题的建模和分析提供新的思路.

本文将综述超细长弹性杆分析力学、对称性与守恒量、生长弹性细杆分析力学及稳定性的研究的若干进展并就未来待研究的问题进行展望.

1 超细长弹性杆模型

Kirchhoff 动力学比拟为弹性杆的离散提供了依据. 几何上弹性杆可看作中心线 $\mathbf{r}(s)$ 装备着两个附加的互相正交的单位矢量场 $[\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s)]$, 其中 s 为沿中心线的弧长. $[\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)]$ 构成截面主轴坐标系,满足 $\mathbf{e}_3(s) = \mathbf{e}_1(s) \times \mathbf{e}_2(s)$ 沿中心线的切向,主轴坐标系的沿弧坐标的运动满足

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为截面的弯扭度矢量^[4]. 根据 Kirchhoff 动力学比拟,为了描述杆截面的运动与弹性杆的变形关系,要求满足以下假定:

(1) 平面截面假定. 此时杆截面沿 $\mathbf{e}_1$ 或 $\mathbf{e}_2$ 轴的平移代表杆的剪切变形,而绕此两轴的转动表示杆的弯曲变形,杆截面沿 $\mathbf{e}_3$ 轴的平移代表杆的拉或压变形,而绕此轴的转动表示扭转变形.

(2) 超细长特性下满足:

- ① 不计非圆截面和剪切变形导致的截面翘曲;
- ② 不计非圆截面和原始弯曲导致弯曲时截面的中性轴不通过截面形心;
- ③ 直杆公式用于曲杆.

对于 Kirchhoff 弹性杆模型要求杆截面为刚性截面并且轴线不可伸长且不记截面的剪切变形,此时挠曲线方程满足非完整约束条件

$$\mathbf{e}_3(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \quad (2)$$

也称为内约束. 弹性杆的变形满足线弹性本构关系

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 B_i (\omega_i - \omega_i^0) \mathbf{e}_i \quad (3)$$

其中 B_1, B_2 分别为关于 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 轴的抗弯刚度, B_3 为关于 $\mathbf{e}_3$ 轴的抗扭刚度, ω_i, ω_i^0 分别为弯扭度分量和初始弯扭度分量.

Cosserat 弹性杆模型作为 Kirchhoff 弹性杆的

改进^[39],在弹性杆弯扭的基础上还考虑了轴向的拉/压和杆截面的剪切变形,也称为精确模型.此时杆的挠曲线方程满足非完整约束条件

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{e}_3(s) + \gamma \quad (4)$$

而满足的本构关系除了弯扭变形(3)还需补充变形关系

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 K_i \gamma_i \mathbf{e}_i \quad (5)$$

其中 K_1 、 K_2 分别为关于 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 轴的抗剪刚度和抗弯刚度, K_3 为关于 $\mathbf{e}_3$ 轴的抗拉/压刚度. γ_1 、 γ_2 为截面剪应变沿 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 轴的分量, γ_3 为沿 $\mathbf{e}_3$ 轴的拉/压应变.

不计体积力和表面力,在主轴坐标系内弹性杆平衡的 Kirchhoff 方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

为了使上面方程封闭,我们引入本构关系(3).方程(6)在数学形式上与刚体定点转动的 Euler 方程类似,这种相似性称弹性杆平衡的 Kirchhoff 动力学比拟^[4].对于 Cosserat 弹性杆的平衡方程则需把方程(6)中的 $\mathbf{e}_3$ 由关系式(4)替换^[40].以上讨论了超细长弹性杆的平衡问题,对于其动力学需引入时间变量,超细长弹性杆的动力学模型是以弧坐标和时间为双自变量的离散系统^[4,5].

2 超细长弹性杆分析力学

分析力学方法在研究受约束弹性杆的力学问题时更具有优越性^[21].虽然已有直接利用 Hamilton 原理或者 Euler-Lagrange 方程讨论 DNA 弹性杆模型的文献^[41-43],但是对于分析力学中的一些基本概念和方法未有论述,特别对于受约束弹性杆未有严格的分析力学理论,基于文献[22]讨论了超细长弹性杆的分析力学建模,讨论了杆截面的虚位移、约束等概念,建立了弹性杆平衡的 D'Alembert-Lagrange 原理、Gauss 原理和 Jourdain 原理,导出 Hamilton 原理,并从变分原理导出 Lagrange 方程、Appell 方程、Nielsen 方程及 Hamilton 正则方程,对于受约束弹性杆导出带乘子的 Lagrange 方程,并讨论了其首次积分问题,形成超细长弹性杆的分析力学框架.

超细长弹性杆动力学由于含有弧坐标和时间

双自变量,为经典分析力学的研究带来新的问题.文献[44]以杆截面为研究对象讨论了弹性杆动力学的自由度、虚位移、变分微分运算交换关系,建立了受曲面约束的 D'Alembert-Lagrange 原理,并推导出 Hamilton 原理及分析力学的三类方程,构筑了 Kirchhoff 弹性杆动力学的分析力学框架—双自变量分析力学理论,又将结果推广到 Cosserat 弹性杆动力学,使得在分析力学框架下弹性杆动力学的方程具有统一形式^[45].文献[46]讨论了 Cosserat 弹性杆动力学的 Gauss 原理建模方法.虽然超细长弹性杆分析力学已取得重要进展,但是对于复杂约束问题的建模还有待进一步研究.而将动力学比拟理论推广到薄壳问题形成双自变量分析静力学和三自变量分析动力学的研究才刚开始^[47].

几何力学是近代分析力学的重要发展方向之一^[48],而基于 Kirchhoff 动力学比拟的弹性杆力学即建立在运动标架上的局部力学理论,利用微分流形的概念研究弹性细杆的几何分析力学理论还处于起始阶段^[49],超细长弹性杆的几何力学理论尚需进一步的探索.

对称性与守恒量是现代分析力学的重要内容之一.对称性与第一积分作为微分方程的两个基本结构在微分方程的降阶及精确求解中具有重要应用,对称性与守恒量之间存在联系,可利用对称性寻求守恒量^[50].考虑超细长弹性杆方程的非线性及复杂约束,将对称性与守恒量理论引入超细长弹性杆分析力学为其注入新的方法.基于 Lie 群变换理论,文献[51]研究了超细长弹性杆的 Noether 对称性,文献[52,53]讨论了超细长弹性杆的 Mei 对称性与守恒量及共形不变性问题,探讨了守恒量与 DNA 几何位形的关系. Jung 等^[54]研究了一种特殊的 Cosserat 弹性杆静力学的离散方法,并给出了相关的诺特定理.而对于超细长弹性杆动力学由于其含有双自变量,其守恒量的形式比较特殊,不同于以往经典守恒量的形式,研究还比较初步. Coleman 等^[55]为弹性杆动力学引入了首次积分和变分原理. Maddocks 等^[56]给出了杆动力学的矢量运动积分,并提到了相应的对称变换,但他们没有对对称性进行进一步的讨论.文献[27]讨论了弹性杆动力学普遍定理的守恒,文献[57]研究了 Cosserat 弹性杆动力学的 Noether 对称性与守恒量,得到积分形式的守恒量,为经典分析力学对称性与守恒量研究

带来新的问题.超细长弹性杆动力学的对称性与守恒量理论的研究还很不完善,有待进一步的研究.

3 超细长弹性杆的稳定性

基于 Kirchhoff 动力学比拟方法,将动力学方法和概念注入弹性细杆力学的同时,也为经典力学的稳定性理论带来新问题.李雅普诺夫稳定性理论移植到弹性杆静力学,拓展了平衡稳定性的概念,引起了讨论^[58,59].由于弹性细杆静力学是将时间 t 替换为弧坐标 s ,直接将经典力学的稳定性理论移植到弹性杆力学时需注意实际情况.以 DNA 分子模型为背景文献研究了超细长弹性杆稳定的研究已有很多工作^[28-32,58-60].然而在弹性杆静力学范畴内讨论其稳定性无法预测其实际的动力学行为,虽然关于弹性细杆动力学的稳定性研究已有一些结果^[61-63],但是都属于平衡稳定性的分析,对失稳后的后屈曲行为未做进一步的研究,而通常情况下以欧拉角表示的方程在摄动分析时会出现边界不连续的情况^[64].文献[65]基于坐标基摄动给出了细长杆的一类新振幅方程,克服了周期性边界条件不连续的问题,从而无需借助欧拉角或者 Lagrange 方程,直接对弹性杆动力学方程进行摄动展开讨论其动力学不稳定性,此方法下保持了杆的弧长不变.文献[66]进一步将这一方法推广到黏性流体中超细长弹性杆模型的力学不稳定性.并以平面扭转 DNA 环为例,得到其失稳判据.对于超细长弹性杆的后屈曲行为的分析则需要对其进行非线性分析^[64],关于约束超细长弹性杆动力学的屈曲及后屈曲行为的研究仍然值得进一步探讨.

4 生长超细长弹性杆力学

运动、变形和生长的耦合是物体位形存在的一般形式.生物生长现象在生物系统中以各种不同的形式发生以满足其不同的需要.生长过程是生物体通过增加自身质量来增大尺寸的过程.生长会诱发物体内应力,而应力反之又会影响到生长过程,所以在生长过程中除了质量变化外,物体结构和材料特性也会随之变化.生长弹性细杆成功地解释了植物藤蔓的缠绕、黄瓜卷须的形态形成及细菌丝的生长、轴突的生长和修复等生物生长现象^[67-70].关于生长的力学建模有多种理论,我们主要采取形态弹性理论^[71],通过引入三种位形将生长和弹性变形

分解为生长拉伸和弹性拉伸的乘积.生长伴随物体体积和质量的变化,以及物理性质的改变,不同于经典力学的变质量问题,为经典分析力学的研究带来新的问题.运动、变形和生长的非线性耦合,为其动力学建模和数值计算带来困难,而超细长弹性杆的分析力学理论为其带来了建模和分析的新途径.文献[72]将弹性杆动力学建模的 Gauss 最小约束原理推广到考虑生长因素的情况,为生长超细长弹性杆建模引入了分析力学方法.文献[73]讨论了生长诱发的黏性流体中生长弹性杆的屈曲问题.近年来基于弹性细杆模型讨论不同约束下的生长问题^[74,75]以及多场耦合下的生长的多尺度建模^[76]给生长弹性杆分析力学建模提供新的应用背景的同时也带来了新的问题.

5 总结

超细长弹性杆力学的研究背景非常广泛,本文仅限于概述超细长弹性杆分析力学相关的成果,综述了超细长弹性杆的分析力学理论、对称性与守恒量、稳定性及生长超细长弹性杆力学.虽然超细长弹性杆分析力学的研究已取得一些进展,但仍面临诸多挑战,未来可在以下方面开展进一步的研究:

(1)随着研究的深入和应用背景的不断拓展,开展复杂接触问题的超细长弹性杆动力学的分析力学建模方法和分析.

(2)生物和工程领域中薄壳模型具有重要的应用,例如仿生可展开机翼、喉管,有必要进一步将 Kirchhoff 动力学比拟理论推广到二维曲面甚至三维情况.

(3)超细长弹性杆动力学的分析力学理论为双自变量分析力学,其守恒量形式为积分形式^[27],为经典对称性与守恒量理论研究带来新的问题.

(4)弹性细杆力学的几何理论才刚刚起步,而几何力学作为现代分析力学的重要方向之一,有必要将几何力学引入超细长弹性杆力学,开展超细长弹性杆的几何力学研究.

(5)超细长弹性杆新的应用背景的拓展.考虑生长、热、电等多场耦合、多尺度下超细长弹性杆分析力学的建模和分析.超细长弹性杆力学在工程中应用的拓展^[77,78]及神经元轴突力电行为的分析^[76,79-81]等.

(6)超细长弹性杆分析力学稳定性及新的数值

方法的研究.

参考文献

- [1] LOVE A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity [M]. 4th ed. New York: Dover, 1927.
- [2] ANTMAN S S. The theory of rods [M]. Truesdell C. Linear theories of elasticity and thermoelasticity. Berlin: Springer, 1972: 641—730.
- [3] BENHAM C J, MIELKE S P. DNA mechanics [J]. Annual Review of Biomedical Engineering, 2005, 7: 21—53.
- [4] 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学: DNA 力学模型的理论基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
LIU Y Z. Nonlinear mechanics of thin elastic rod [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. (in Chinese)
- [5] GORIELY A. The mathematics and mechanics of biological growth [M]. New York: Springer New York, 2017.
- [6] PEREZ A, LANKAS F, LUQUE F J, et al. Towards a molecular dynamics consensus view of B-DNA flexibility [J]. Nucleic Acids Research, 2008, 36(7): 2379—2394.
- [7] SCHLICK T. Modeling superhelical DNA: recent analytical and dynamic approaches [J]. Current Opinion in Structural Biology, 1995, 5(2): 245—262.
- [8] BENHAM C J. Elastic model of supercoiling [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1977, 74(6): 2397—2401.
- [9] BUSTAMANTE C, BRYANT Z, SMITH S B. Ten years of tension: single-molecule DNA mechanics [J]. Nature, 2003, 421(6921): 423—427.
- [10] TRAVERS A A, THOMPSON J M T. An introduction to the mechanics of DNA [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2004, 362(1820): 1265—1279.
- [11] 刘延柱. 弹性杆基因模型的力学问题[J]. 力学与实践, 2003, 25(1): 1—5.
LIU Y Z. Mechanical problems on elastic rod model of DNA [J]. Mechanics in Engineering, 2003, 25(1): 1—5. (in Chinese)
- [12] COLEMAN B D, SWIGON D. Theory of self-contact in Kirchhoff rods with applications to supercoiling of knotted and unknotted DNA plasmids [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2004, 362(1820): 1281—1299.
- [13] CHERSTVY A G. Looping charged elastic rods: applications to protein-induced DNA loop formation [J]. European Biophysics Journal, 2011, 40(1): 69—80.
- [14] 王炜, 张琪昌, 靳刚. 非对称截面 Kirchhoff 弹性细杆模型简化方法研究[J]. 物理学报, 2012, 61(6): 352—357.
WANG W, ZHANG Q C, JIN G. The analytical reduction of the Kirchhoff thin elastic rod model with asymmetric cross section [J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(6): 352—357. (in Chinese)
- [15] HUYNEN A, DETOURNAY E, DENOËL V. Surface constrained elastic rods with application to the sphere [J]. Journal of Elasticity, 2016, 123(2): 203—223.
- [16] ANNUNZIATO A. DNA packaging: nucleosomes and chromatin [J]. Nature Education, 2008, 1(1): 26.
- [17] LILLIAN T D, PERKINS N C. Electrostatics and self-contact in an elastic rod approximation for DNA [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2011, 6(1): 011008.
- [18] SINGH R, TIWARI J, KUMAR A. Self-contact in closed and open Kirchhoff rods [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2021, 137: 103786.
- [19] SHAH R, VAN DER HEIJDEN G H M. Static friction models for a rod deforming on a cylinder [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2023, 173: 105224.
- [20] WANG M, YI X. Equilibrium analysis of surface-constrained elastic rods: unveiling contact and internal forces through local geometry [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2024, 187: 105635.
- [21] 梅凤祥, 刘端, 罗勇. 高等分析力学 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1991.
MEI F X, LIU D, LUO Y. Advanced analytical mechanics [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991. (in Chinese)
- [22] 薛纭, 刘延柱, 陈立群. 超细长弹性杆的分析力学问题[J]. 力学学报, 2005, 37(4): 485—493.
XUE Y, LIU Y Z, CHEN L Q. On analytical mechanics for a super-thin elastic rod [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2005, 37(4): 485—493. (in Chinese)
- [23] FLOYD C, NI H R, GUNARATNE R S, et al. On

- stretching, bending, shearing, and twisting of actin filaments I: variational models [J]. *Journal of Chemical Theory and Computation*, 2022, 18(8): 4865—4878.
- [24] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2004.
- MEI F X. Symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2004. (in Chinese)
- [25] 梅凤翔. 经典约束力学系统对称性与守恒量研究进展[J]. *力学进展*, 2009, 39(1): 37—43.
- MEI F X. Advances in the symmetries and conserved quantities of classical constrained systems [J]. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 37—43. (in Chinese)
- [26] WANG P, XUE Y, LIU Y L. Mei symmetry and conserved quantities in Kirchhoff thin elastic rod statics [J]. *Chinese Physics B*, 2012, 21(7): 070203.
- [27] 薛纭, 王鹏. Cosserat 弹性杆动力学普遍定理的守恒量问题 [J]. *物理学报*, 2011, 60(11): 451—456.
- XUE Y, WANG P. The conserved quantities in general theorems of the Cosserat elastic rod dynamics [J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(11): 451—456. (in Chinese)
- [28] TOBIAS I, SWIGON D, COLEMAN B D. Elastic stability of DNA configurations. I. General theory [J]. *Physical Review E*, 2000, 61(1): 747—758.
- [29] MANNING R S, BULMAN G B. Stability of an elastic rod buckling into a soft wall [J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2005, 461(2060): 2423—2450.
- [30] 刘延柱, 薛纭. 基于精确 Cosserat 模型的螺旋杆稳定性分析[J]. *应用数学和力学*, 2011, 32(5): 570—578.
- LIU Y Z, XUE Y. Stability analysis of a helical rod based on exact Cosserat's model [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, 32(5): 570—578. (in Chinese)
- [31] 刘延柱, 薛纭. 受圆柱面约束弹性杆的平衡与稳定性[J]. *应用力学学报*, 2005, 22(3): 391—394, 506.
- LIU Y Z, XUE Y. Equilibrium and stability of elastic rod constrained to cylinder [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2005, 22(3): 391—394, 506. (in Chinese)
- [32] 薛纭, 陈立群, 刘延柱. 受曲面约束弹性细杆的平衡问题[J]. *物理学报*, 2004, 53(7): 2040—2045.
- XUE Y, CHEN L Q, LIU Y Z. Problems on equilibrium of a thin elastic rod constrained on a surface [J]. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53(7): 2040—2045. (in Chinese)
- [33] SHI Y M, HEARST J E. The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrodinger equation, and DNA supercoiling [J]. *The Journal of Chemical Physics*, 1994, 101(6): 5186—5200.
- [34] XIAO J F, CHEN Y L, LU X, et al. Three dimensional buckling beam under cylindrical constraint [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 150: 348—355.
- [35] CHEN J S, FANG J. Vibration of a spatial elastica constrained inside a straight tube [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(9): 2504—2519.
- [36] GORIELY A, MOULTON D. Morphoelasticity—A theory of elastic growth [M]//Amar M B, Goriely A, Müller M M, et al. *New trends in the physics and mechanics of biological systems*. Oxford: Oxford University Press, 2010.
- [37] CHANG F, HUANG K C. How and why cells grow as rods [J]. *BMC Biology*, 2014, 12: 54.
- [38] SONG F, CHEN P, SUN D P, et al. Cryo-EM study of the chromatin fiber reveals a double helix twisted by tetranucleosomal units [J]. *Science*, 2014, 344(6182): 376—380.
- [39] CAO D Q, LIU D S, WANG C H T. Three-dimensional nonlinear dynamics of slender structures: Cosserat rod element approach [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(3/4): 760—783.
- [40] 薛纭, 翁德玮, 陈立群. 超细长弹性杆精确模型的运动学问题[J]. *力学季刊*, 2009, 30(1): 116—120.
- XUE Y, WENG D W, CHEN L Q. Kinematics of exact model for a super thin elastic rod [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2009, 30(1): 116—120. (in Chinese)
- [41] LANGER J, SINGER D A. Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod [J]. *SIAM Review*, 1996, 38(4): 605—618.
- [42] 薛纭, 王鹏. 弹性细杆弯扭度有突变时的 Lagrange 方程[J]. *动力学与控制学报*, 2019, 17(5): 473—477.
- XUE Y, WANG P. Lagrange equations of thin elas-

- tic rod with mutation of curvature-twisting vector [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(5): 473—477. (in Chinese)
- [43] 萧业, 孔斌, 李春. 基于 DNA 弹性细杆模型的 Euler-Lagrange 方程[J]. *南京航空航天大学学报*, 2019, 51(4): 540—546.
- XIAO Y, KONG B, LI C. Euler-Lagrange equations for DNA chain by an elastic rod model [J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2019, 51(4): 540—546. (in Chinese)
- [44] 薛纭, 刘延柱, 陈立群. Kirchhoff 弹性杆动力学建模的分析力学方法[J]. *物理学报*, 2006, 55(8): 3845—3851.
- XUE Y, LIU Y Z, CHEN L Q. Methods of analytical mechanics for dynamics of the Kirchhoff elastic rod [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(8): 3845—3851. (in Chinese)
- [45] 薛纭, 翁德玮, 陈立群. 精确 Cosserat 弹性杆动力学的分析力学方法[J]. *物理学报*, 2013, 62(4): 320—326.
- XUE Y, WENG D W, CHEN L Q. Methods of analytical mechanics for exact Cosserat elastic rod dynamics [J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(4): 320—326. (in Chinese)
- [46] 刘延柱, 薛纭. 基于高斯原理的 Cosserat 弹性杆动力学模型[J]. *物理学报*, 2015, 64(4): 194—198.
- LIU Y Z, XUE Y. Dynamical model of Cosserat elastic rod based on Gauss principle [J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(4): 194—198. (in Chinese)
- [47] 薛纭, 陈立群. Kirchhoff 动力学比拟对弹性薄壳的推广[J]. *力学学报*, 2021, 53(1): 234—247.
- XUE Y, CHEN L Q. Generalization of Kirchhoff kinetic analogy to thin elastic shells [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(1): 234—247. (in Chinese)
- [48] 郭永新, 罗绍凯, 梅凤翔. 非完整约束系统几何动力学研究进展: Lagrange 理论及其它[J]. *力学进展*, 2004, 34(4): 477—492.
- GUO Y X, LUO S K, MEI F X. Progress of geometric dynamics of non-holonomic constrained mechanical systems: Lagrange theory and others [J]. *Advances in Mechanics*, 2004, 34(4): 477—492. (in Chinese)
- [49] ROMERO I, GEBHARDT C G. Variational principles for nonlinear Kirchhoff rods [J]. *Acta Mechanica*, 2020, 231(2): 625—647.
- [50] BLUMAN G W, ANCO S C. Symmetry and integration methods for differential equations [M]. New York: Springer New York, 2002.
- [51] FU J L, ZHAO W J, WENG Y Q. Structure properties and Noether symmetries for super-long elastic slender rod [J]. *Chinese Physics B*, 2008, 17(7): 2361—2365.
- [52] WANG P, FENG H R, LOU Z M. Conformal invariance and conserved quantities for Lagrange equation of thin elastic rod [J]. *Acta Physica Polonica A*, 2017, 131(1): 283—287.
- [53] WANG P, XUE Y. Conformal invariance of Mei symmetry and conserved quantities of Lagrange equation of thin elastic rod [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 83(4): 1815—1822.
- [54] JUNG P, LEYENDECKER S, LINN J, et al. A discrete mechanics approach to the Cosserat rod theory: Part 1: static equilibria [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 85(1): 31—60.
- [55] COLEMAN B D, DILL E H, SWIGON D. On the dynamics of flexure and stretch in the theory of elastic rods [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1995, 129(2): 147—174.
- [56] MADDOCKS J H, DICHMANN D J. Conservation laws in the dynamics of rods [J]. *Journal of Elasticity*, 1994, 34(1): 83—96.
- [57] WANG P, XUE Y, LIU Y L. Noether symmetry and conserved quantities of the analytical dynamics of a Cosserat thin elastic rod [J]. *Chinese Physics B*, 2013, 22(10): 104503.
- [58] 刘延柱. 压杆失稳与 Liapunov 稳定性[J]. *力学与实践*, 2002, 24(4): 56—59.
- LIU Y Z. Buckling of a compressed bar and Liapunov stability [J]. *Mechanics in Engineering*, 2002, 24(4): 56—59. (in Chinese)
- [59] 薛纭, 陈立群. 再论压杆失稳与 Lyapunov 稳定性[J]. *力学与实践*, 2004, 26(5): 71—72.
- XUE Y, CHEN L Q. Revisit buckling of compression rod and Lyapunov stability [J]. *Mechanics in Engineering*, 2004, 26(5): 71—72. (in Chinese)
- [60] LIU Y Z, XUE Y. Stability analysis of helical rod based on exact Cosserat model [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, 32(5): 603—612.
- [61] 刘延柱, 薛纭, 陈立群. 弹性细杆平衡的动态稳定性[J]. *物理学报*, 2004, 53(8): 2424—2428.
- LIU Y Z, XUE Y, CHEN L Q. Dynamical stability of equilibrium of a thin elastic rod [J]. *Acta Physica*

- Sinica, 2004, 53(8): 2424—2428. (in Chinese)
- [62] WOLGEMUTH C W, POWERS T R, GOLDSTEIN R E. Twirling and whirling: viscous dynamics of rotating elastic filaments [J]. *Physical Review Letters*, 2000, 84(7): 1623—1626.
- [63] LIM S, KIM Y, SWIGON D. Dynamics of an electrostatically charged elastic rod in fluid [J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2011, 467(2126): 569—590.
- [64] GORIELY A, TABOR M. The nonlinear dynamics of filaments [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2000, 21(1): 101—133.
- [65] GORIELY A, TABOR M. New amplitude equations for thin elastic rods [J]. *Physical Review Letters*, 1996, 77(17): 3537—3540.
- [66] 王鹏, 薛纭, 楼智美. 黏性流体中超细长弹性杆的动力学不稳定性[J]. *物理学报*, 2017, 66(9): 248—255.
- WANG P, XUE Y, LOU Z M. Dynamic instability of super-long elastic rod in viscous fluid [J]. *Acta Physica Sinica*, 2017, 66(9): 248—255. (in Chinese)
- [67] GOLDSTEIN R E, POWERS T R, WIGGINS C H. Viscous nonlinear dynamics of twist and writhe [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(23): 5232—5235.
- [68] GORIELY A, TABOR M. Spontaneous helix hand reversal and tendril perversion in climbing plants [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(7): 1564—1567.
- [69] OLIVERI H, MOULTON D E, HARRINGTON H A, et al. Active shape control by plants in dynamic environments [J]. *Physical Review E*, 2024, 110: 014405.
- [70] LANG G E, WATERS S L, VELLA D, et al. Axonal buckling following stretch injury [J]. *Journal of Elasticity*, 2017, 129(1): 239—256.
- [71] MOULTON D E, LESSINNES T, GORIELY A. Morphoelastic rods III: Differential growth and curvature generation in elastic filaments [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, 142: 104022.
- [72] 薛纭, 曲佳乐, 陈立群. Cosserat 生长弹性杆动力学的 Gauss 最小拘束原理[J]. *应用数学和力学*, 2015, 36(7): 700—709.
- XUE Y, QU J L, CHEN L Q. Gauss principle of least constraint for cosserat growing elastic rod dynamics [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 36(7): 700—709. (in Chinese)
- [73] ZHANG Y T, ZHANG S, WANG P. Growth induced buckling of morphoelastic rod in viscous medium [J]. *Chinese Physics B*, 2020, 29(5): 054501.
- [74] SHI C, ZOU G J, WU Z M, et al. Morphological transformations of vesicles with confined flexible filaments [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2023, 120(18): e2300380120.
- [75] RAJ A, PANDEY A, GUPTA A. Growth of an elastic rod perfectly bonded to a von Kármán elastic surface [J]. *Journal of Elasticity*, 2024, 156(3): 1015—1044.
- [76] WANG P. Fractional Noether theorem and fractional Lagrange equation of multi-scale mechano-electrophysiological coupling model of neuron membrane [J]. *Chinese Physics B*, 2023, 32(7): 074501.
- [77] 管永乐, 王鹏, 刘百强. 基于超细长弹性杆模型的斜拉索参数振动分析[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(9): 37—44.
- GUAN Y L, WANG P, LIU B Q. Parametric vibration analysis of stay cables using a super-thin elastic rod model [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(9): 37—44. (in Chinese)
- [78] 陆登科, 王鹏, 王小月, 等. 基于超细长弹性杆模型的斜拉索静力构形分析[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(7): 68—76.
- LU D K, WANG P, WANG X Y, et al. Static configuration analysis of stay cables based on super-thin elastic rod model [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(7): 68—76. (in Chinese)
- [79] WANG P, XU J W, ZHANG X W, et al. Free vibration of nanobeams with surface and dynamic flexoelectric effects [J]. *Scientific Reports*, 2024, 14(1): 30192.
- [80] XU J W, WANG P, LIU Z H. Electromechanical coupling in piezoelectric nanoplate due to the flexoelectric effect [J]. *Acta Mechanica*, 2024, 235(1): 479—492.
- [81] YADAV V K, GUPTA P. A strain-gradient elastic theory for special Cosserat rods [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2024, 291: 112696.