第 23 卷第 3 期
2025 年 3 月
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 23 No. 3
Mar. 2025

文章编号:1672-6553-2025-23(3)-032-008　　DOI:10.6052/1672-6553-2025-016

# 离散 Birkhoff 系统的 Noether 定理*

宋尹洁　刘亮亮　孔新雷†
(北方工业大学 理学院,北京　100144)

**摘要**　在非等时变分的框架下,由 Pfaff-Birkhoff 变分原理重新导出了 Birkhoff 方程和 Pfaff 1-形式,进一步研究了 Pfaff 1-形式在李群作用下的不变性并给出了经典 Noether 定理的一种几何表述. 仿照连续情形,利用变步长的求积公式近似 Pfaff 作用量,依次构建了离散 Pfaff-Birkhoff 原理、离散 Birkhoff 方程和离散 Pfaff 1-形式. 最后考虑由离散 Birkhoff 方程所描述的离散动力系统:如果系统的离散 Pfaff 作用量在李群作用下具有不变性,那么由无穷小生成元和离散 Pfaff 1-形式通过缩并定义的离散动量映射保持守恒,即 Noether 定理对离散 Birkhoff 系统而言依然成立.

**关键词**　非等时变分,　Birkhoff 系统,　Pfaff 1-形式,　动量映射,　Noether 定理

**中图分类号:**TP311　　**文献标志码:**A

# Noether Theorem for Discrete Birkhoffian Systems*

Song Yinjie　Liu Liangliang　Kong Xinlei†
(College of Science, North China University of Technology, Beijing　100144, China)

**Abstract**　In the framework of non-isochronous variations, the Pfaff-Birkhoff variational principle is first restructured and then the Birkhoffian equations and the Pfaffian 1-form are rederived from the reformed principle correspondingly. The classical Noether theorem for Birkhoffian systems is further reformulated in a geometric way, which reveals the relationship between the invariance of the Pfaffian 1-form under Lie group actions and associated conservation laws. In parallel with the continuous case, the discrete analogues of the Pfaff-Birkhoff variational principle, the Birkhoffian equations and the Pfaffian 1-form are constructed successively from the discretized Pfaffian action sum, which is an approximation of the Pfaffian action integral with adaptive time steps. For discrete Birkhoffian systems, i. e. , systems characterized by the discrete Birkhoffian equations particularly, the invariance of the discrete Pfaffian 1-form under Lie group actions also results in a conserved discrete momentum map, defined by the contraction of the corresponding infinitesimal generator and the discrete Pfaffian 1-form.

**Key words**　non-isochronous variation,　Birkhoffian dynamics,　Pfaffian 1-form,　momentum map,　Noether theorem

2024-12-18 收到第 1 稿,2025-02-08 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(12172003), National Natural Science Foundation of China(12172003).
† 通信作者 E-mail:kongxinlei@ncut.edu.cn.

## 引言

Birkhoff 系统是由 Birkhoff 方程

$$\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_i}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial a_i}\right)\dot{a}_i-\frac{\partial B}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial t}=0,\quad j=1,2,\cdots,2n \tag{1}$$

所描述的一类动力学系统，其中 $R_i=R_i(t,\boldsymbol{a})$ 被称作 Birkhoff 函数组,$B=B(t,\boldsymbol{a})$ 被称为 Birkhoff 函数,位形变量 $\boldsymbol{a}\in M$ 是关于时间 $t\in\mathbb{R}$ 的 $2n$ 维的向量值函数. 根据 $R_i$ 和 $B$ 是否显式地依赖于时间 $t$,Birkhoff 系统(方程)又可以进一步划分为自治、半自治和非自治三种情形. 事实上,方程(1)就对应于非自治 Birkhoff 方程的一般形式.

Birkhoff 方程具有良好的分析、代数和几何性质,特别地，它为变分原理、李代数结构和辛几何提供了一个理想的共栖环境. 这一共栖特性不仅为 Birkhoff 系统动力学的研究奠定了坚实的理论基石,而且也促使这一研究领域不断拓展并衍生新的成果. 自 20 世纪 90 年代初，我国知名学者梅凤翔先生及其合作者就 Birkhoff 系统动力学开展了广泛而深入的研究，在非完整系统的 Birkhoff 表示、Birkhoff 系统的对称性和守恒量、Birkhoff 系统的全局分析、Birkhoff 系统的逆问题、Birkhoff 系统的几何理论和保结构算法、广义 Birkhoff 系统等多个领域取得了一系列研究进展[1-3]. 其中，梅先生于文献[4]中通过引入变换群的无限小群变换的广义准对称性建立了 Birkhoff 系统的 Noether 理论,包括 Noether 定理和逆定理,为后续进一步研究 Birkhoff 系统的 Noether 定理和逆定理的解法[5]、带约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论[6,7]以及(时滞)广义 Birkhoff 系统分数阶 Noether 理论[8-10]等相关联动力学系统的对称性和守恒量[11,12]提供了具有指导性和一般性的研究方法.

在梅先生已经构建的经典理论基石上,本文将给出 Birkhoff 系统的 Noether 定理的一种几何表述. 事实上,此前已有学者运用现代微分几何方法对 Birkhoff 系统的 Noether 理论[13]展开研究,然而该研究是从切空间的角度借用向量场来描述 Birkhoff 系统的对称性,本文则从余切空间的角度利用微分形式在李群作用下的不变性来刻画系统的对称性. 为了构建连续 Birkhoff 系统的 Noether 定理，本文还将参照连续情形进一步建立离散 Birkhoff 系统的 Noether 定理,显式地给出由李群作用不变性所确定的离散守恒量. 在这所谓的离散 Birkhoff 系统是指对连续 Birkhoff 系统(方程)进行合理地离散后得到的差分方程,值得一提的是该差分格式可以自动作为用来模拟连续系统动力学行为的数值算法. 在动力系统理论中,对称性与守恒律紧密相连,而守恒律意味着系统方程可以实现约化降维. 因此，离散 Birkhoff 系统的 Noether 定理不仅能够为设计性能更加优越的数值差分格式提供有益指导,而且能够为离散动力系统的约化和求解奠定前期基础.

## 1　Birkhoff 系统及其 Noether 定理

如引言中所述，Birkhoff 方程与变分原理密切相关,它可以由 Pfaff-Birkhoff 变分原理推导得来. 该原理指出 Birkhoff 方程的解恰好对应于 Pfaff 作用泛函

$$A(t,\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{a}})=\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{2n}R_i(t,\boldsymbol{a})\dot{a}_i-B(t,\boldsymbol{a})\right]\mathrm{d}t$$

的驻点. 这一事实由

$$\delta A=\int_0^T\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_i}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial a_i}\right)\dot{a}_i-\frac{\partial B}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial t}\right]\delta a_j\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{2n}R_i\cdot\delta a_i\Big|_0^T=0$$

不难得到. 显然,经典的 Pfaff-Birkhoff 变分原理只是考虑了对位形 $\boldsymbol{a}$ 的变分,并没有考虑对时间 $t$ 的变分. 事实上,如果将时间变量 $t$ 也看作独立的动力学变量,并将 $t$ 和 $\boldsymbol{a}$ 都视为关于参变量 $t$ 的函数,那么,在非等时变分的意义下可以重建 Pfaff-Birkhoff 变分原理并进一步推演得到 Birkhoff 方程.

具体来说,不妨假设

$$t=\gamma_0(\tau),\quad a_i=\gamma_i(\tau),\quad \tau\in[0,\tau_f],$$

其中 $\gamma_0(\tau)$ 在 $[0,\tau_f]$ 上单调递增，那么

$$\dot{a}_i(t)=\frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\gamma_i'(\tau)}{\gamma_0'(\tau)},$$

进而

$$A[\gamma(\tau)]=\int_0^{\tau_f}\left\{\sum_{i=1}^{2n}R_i[\gamma(\tau)]\gamma_i'(\tau)-B[\gamma(\tau)]\gamma_0'(\tau)\right\}\mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

此处及以后,“$'$”始终代表对参变量 $\tau$ 求导. 考虑作用泛函(2)的变分

$$\delta A[\gamma(\tau)]=\delta\int_0^{\tau_f}\left\{\sum_{i=1}^{2n}R_i[\gamma(\tau)]\gamma_i'(\tau)-B[\gamma(\tau)]\gamma_0'(\tau)\right\}\mathrm{d}\tau=\int_0^{\tau_f}\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_i}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial a_i}\right)\cdot\gamma_i'-\frac{\partial B}{\partial a_j}\cdot\gamma_0'-\right.$$

$$\left.\frac{\partial R_j}{\partial t}\cdot\gamma_0'\right]\cdot\delta\gamma_j\,\mathrm{d}\tau+\int_0^{\tau_f}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i}{\partial t}\cdot\gamma_i'+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial B}{\partial a_i}\cdot\gamma_i'\right]\cdot\delta\gamma_0\,\mathrm{d}\tau+\sum_{i=1}^{2n}R_i\cdot\delta\gamma_i\Big|_0^{\tau_f}-B\cdot\delta\gamma_0\Big|_0^{\tau_f},\quad(3)$$

那么,由 $\delta A=0$ 以及固定端点条件

$$\delta\gamma(0)=\delta\gamma(\tau_f)=0$$

可得

$$\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_i}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial a_i}\right)\cdot\gamma_i'-\frac{\partial B}{\partial a_j}\cdot\gamma_0'-\frac{\partial R_j}{\partial t}\cdot\gamma_0'=0,$$

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i}{\partial t}\cdot\gamma_i'+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial B}{\partial a_i}\cdot\gamma_i'=0.$$

回代变量关系 $t=\gamma_0(\tau)$ 和 $a_i=\gamma_i(\tau)$,进一步可得

$$\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_i}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial a_i}\right)\dot{a}_i-\frac{\partial B}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial t}=0,\qquad(4)$$

$$\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_i}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a_i}\right)\dot{a}_i=0.\qquad(5)$$

显然,方程(4)就是经典的 Birkhoff 方程,而方程(5)实际上是一个冗余方程,因为它可以由 Birkhoff 方程经运算得来[14].

如果暂时舍弃固定端点条件 $\delta\gamma(0)=\delta\gamma(\tau_f)=0$,那么根据(3)式中的边界项可以定义扩展位形空间 $\mathbb{R}\times M$ 上的 Pfaff 1-形式

$$\Theta_B(t,\boldsymbol{a})=\sum_{i=1}^{2n}R_i(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}a_i-B(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}t.$$

进一步,求 $\Theta_B$ 的外微分则可得微分 2-形式

$$\Omega_B=\mathrm{d}\Theta_B=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_i}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial a_i}\right)\mathrm{d}a_j\wedge\mathrm{d}a_i+\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_i}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a_i}\right)\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}a_i.$$

正如引言部分提及的,$\Omega_B$ 就是 Birkhoff 系统内蕴辛几何结构的显式表达,它沿着 Birkhoff 方程的解保持不变.

为了从几何角度来描述 Birkhoff 系统的对称性并建立相应的 Noether 定理,接下来引入李群作用及相关概念. 考虑李群 $G$ 及其李代数 $g$,对于任意的 $\boldsymbol{\xi}\in g$ 和参数 $\varepsilon$,通过指数映射 $\exp:g\to G$ 可以得到李群 $G$ 的单参数子群 $\exp(\varepsilon\boldsymbol{\xi})$. 记李群 $\exp(\varepsilon\boldsymbol{\xi})$ 对扩展位形空间 $\mathbb{R}\times M$ 的群作用为

$$\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times M}(t,\boldsymbol{a})=[\Phi_0(t),\Phi_1(t,\boldsymbol{a}),\Phi_2(t,\boldsymbol{a}),\cdots,\Phi_{2n}(t,\boldsymbol{a})],$$

则 $\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times M}$ 自然地确定了 $\mathbb{R}\times TM$ 上的切提升作用

$$\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times TM}(t,\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{a}})=\left[\Phi_0(t),\Phi_1(t,\boldsymbol{a}),\cdots,\Phi_{2n}(t,\boldsymbol{a}),\frac{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial t}+\sum\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial a_i}\dot{a}_i}{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_0(t)}{\mathrm{d}t}},\cdots,\frac{\dfrac{\partial\Phi_{2n}}{\partial t}+\sum\dfrac{\partial\Phi_{2n}}{\partial a_i}\dot{a}_i}{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_0(t)}{\mathrm{d}t}}\right],$$

其中 $TM$ 代表位形空间 $M$ 的切丛. 进一步,$\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times M}$ 的无穷小生成元 $\boldsymbol{\xi}^{\mathbb{R}\times M}:\mathbb{R}\times M\to T(\mathbb{R}\times M)$ 为

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathbb{R}\times M}(t,\boldsymbol{a})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times M}(t,\boldsymbol{a})$$
$$=[\xi_0^{\mathbb{R}\times M}(t),\xi_1^{\mathbb{R}\times M}(t,\boldsymbol{a}),\cdots,\xi_{2n}^{\mathbb{R}\times M}(t,\boldsymbol{a})].$$

利用微分 1-形式 $\Theta_B$ 和无穷小生成元 $\boldsymbol{\xi}^{\mathbb{R}\times M}$,则可以定义动量映射 $J_B:\mathbb{R}\times M\to g^*$ 为

$$\langle J_B(t,\boldsymbol{a}),\boldsymbol{\xi}\rangle_1=\langle\Theta_B,\boldsymbol{\xi}^{\mathbb{R}\times M}\rangle_2\big|_{(t,\boldsymbol{a})}.$$

在上式中,$\langle\rangle_1$ 代表李代数 $g$ 与其对偶空间 $g^*$ 之间的自然对偶积,$\langle\rangle_2$ 代表切向量和余切向量之间的缩并运算.

**定理 1**(Noether 定理): 如果微分 1-形式 $\Theta_B$ 在群作用 $\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times TM}$ 下保持不变,即 $(\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times TM})^*\Theta_B=\Theta_B$ 或 $A=A\circ\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times TM}$,那么动量映射 $J_B$ 沿着 Birkhoff 方程(4)、(5)的解也保持不变. 此时,Birkhoff 系统存在守恒量 $\sum_{i=1}^{2n}R_i\cdot\xi_i^{\mathbb{R}\times M}-B\cdot\xi_0^{\mathbb{R}\times M}$.

**证明:** 简便起见,记 $\left(\tilde{t},\tilde{\boldsymbol{a}},\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{a}}}{\mathrm{d}\tilde{t}}\right)=\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times TM}(t,\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{a}})$,那么,由 $[\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times M}]^*\Theta_B=\Theta_B$ 可得 $A(t,\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{a}})=A\left(\tilde{t},\tilde{\boldsymbol{a}},\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{a}}}{\mathrm{d}\tilde{t}}\right)$,进一步,

$$\delta A=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}A\left(\tilde{t},\tilde{\boldsymbol{a}},\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{a}}}{\mathrm{d}\tilde{t}}\right)$$
$$=\int_0^T\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_i}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial a_i}\right)\dot{a}_i-\frac{\partial B}{\partial a_j}-\frac{\partial R_j}{\partial t}\right]\xi_j^{\mathbb{R}\times M}\mathrm{d}t+$$
$$\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_i}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a_i}\right)\dot{a}_i\right]\xi_0^{\mathbb{R}\times M}\mathrm{d}t+$$
$$\sum_{i=1}^{2n}R_i\cdot\xi_i^{\mathbb{R}\times M}\Big|_0^T-B\cdot\xi_0^{\mathbb{R}\times M}\Big|_0^T=0.$$

显然,如果 $\boldsymbol{a}(t)$ 是 Birkhoff 方程(4)、(5)的解,那么上式中的积分项退化为零. 因此,对于任意的 $T>0$,

$$\left(\sum_{i=1}^{2n}R_i\cdot\xi_i^{\mathbb{R}\times M}-B\cdot\xi_0^{\mathbb{R}\times M}\right)\Big|_0^T=0$$

即系统存在守恒量 $\langle\Theta_B(t,\boldsymbol{a}),\boldsymbol{\xi}^{\mathbb{R}\times M}(t,\boldsymbol{a})\rangle_2=\sum_{i=1}^{2n}R_i\cdot\xi_i^{\mathbb{R}\times M}-B\cdot\xi_0^{\mathbb{R}\times M}$.

注释 1: 对于自治 Birkhoff 系统而言,$R_i$ 和 $B$ 均不

显含时间 $t$. 因此，相应的微分 1－形式 $\Theta_B$ 在李群变换 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathbb{R}\times TM}_{\exp(\varepsilon\xi)}(t,\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{a}})=(t-\varepsilon,\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{a}})$ 下保持不变. 此时，无穷小生成元分别为 $\xi_0^{\mathbb{R}\times M}=-1$，$\xi_1^{\mathbb{R}\times M}=0$，…，$\xi_{2n}^{\mathbb{R}\times M}=0$. 那么，由 Noether 定理可知，$\langle\Theta_B,\boldsymbol{\xi}^{\mathbb{R}\times M}\rangle_2=B$ 是自治 Birkhoff 系统的守恒量.

## 2　离散 Birkhoff 系统及其 Noether 定理

如引言中所述，离散 Birkhoff 系统是指对连续 Birkhoff 系统进行离散后得到的差分方程. 根据“数值算法应尽可能多地保持原问题的本质特征”这一指导原则，本文采用与连续 Birkhoff 方程近乎一致的推导方式来构建离散 Birkhoff 系统.

首先，将时间区间 $[0,T]$ 离散为时间序列 $0=t^0<\cdots<t^N=T$ 并作近似 $\boldsymbol{a}^k\approx\boldsymbol{a}(t^k)$，那么，Pfaff 作用泛函 $A$ 便可以离散为

$$A_d=\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{i=1}^{2n}R_i^{k+\frac{1}{2}}(a_i^{k+1}-a_i^k)-B^{k+\frac{1}{2}}(t^{k+1}-t^k)\right],$$

其中 $R_i^{k+\frac{1}{2}}=R_i(t^{k+\frac{1}{2}},\boldsymbol{a}^{k+\frac{1}{2}})$，$B^{k+\frac{1}{2}}=B(t^{k+\frac{1}{2}},\boldsymbol{a}^{k+\frac{1}{2}})$，$t^{k+\frac{1}{2}}=(t^k+t^{k+1})/2$，$\boldsymbol{a}^{k+\frac{1}{2}}=(\boldsymbol{a}^{k+1}+\boldsymbol{a}^k)/2$. 为了兼顾差分格式的误差精度和计算效率，此处采用了经典的中点求积公式来近似积分泛函. 当然，其他的求积格式也可以用来离散作用泛函.

其次，仿照连续情形，对离散 Pfaff 作用量 $A_d$ 作变分

$$\begin{aligned}
\delta A_d=&\,\delta\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{i=1}^{2n}R_i^{k+\frac{1}{2}}(a_i^{k+1}-a_i^k)-B^{k+\frac{1}{2}}(t^{k+1}-t^k)\right]\\
=&\sum_{k=1}^{N-1}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}+B^{k+\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k-\frac{1}{2}}}{\partial t^{k-\frac{1}{2}}}\frac{a_i^k-a_i^{k-1}}{2}-\frac{\partial B^{k-\frac{1}{2}}}{\partial t^{k-\frac{1}{2}}}\frac{t^k-t^{k-1}}{2}-B^{k-\frac{1}{2}}\right]\delta t^k+\\
&\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}-R_j^{k+\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k-\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k-\frac{1}{2}}}\frac{a_i^k-a_i^{k-1}}{2}-\frac{\partial B^{k-\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k-\frac{1}{2}}}\frac{t^k-t^{k-1}}{2}+R_j^{k-\frac{1}{2}}\right]\delta a_j^k+\\
&\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}}\frac{a_i^1-a_i^0}{2}-\frac{\partial B^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}}\frac{t^1-t^0}{2}+B^{\frac{1}{2}}\right]\delta t^0+\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{\frac{1}{2}}}\frac{a_i^1-a_i^0}{2}-\frac{\partial B^{\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{\frac{1}{2}}}\frac{t^1-t^0}{2}-R_j^{\frac{1}{2}}\right]\delta a_j^0+\\
&\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{N-\frac{1}{2}}}{\partial t^{N-\frac{1}{2}}}\frac{a_i^N-a_i^{N-1}}{2}-\frac{\partial B^{N-\frac{1}{2}}}{\partial t^{N-\frac{1}{2}}}\frac{t^N-t^{N-1}}{2}-B^{N-\frac{1}{2}}\right]\delta t^N+\\
&\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{N-\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{N-\frac{1}{2}}}\frac{a_i^N-a_i^{N-1}}{2}-\frac{\partial B^{N-\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{N-\frac{1}{2}}}\frac{t^N-t^{N-1}}{2}+R_j^{N-\frac{1}{2}}\right]\delta a_j^N.
\end{aligned}\tag{6}$$

显然，如果进一步要求 $\delta A_d=0$ 对任意满足 $\delta\boldsymbol{a}^0=\delta\boldsymbol{a}^N=0$ 的变分 $\{\delta\boldsymbol{a}^k\}_{k=0}^N$ 都成立，那么有

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}+B^{k+\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k-\frac{1}{2}}}{\partial t^{k-\frac{1}{2}}}\frac{a_i^k-a_i^{k-1}}{2}-\frac{\partial B^{k-\frac{1}{2}}}{\partial t^{k-\frac{1}{2}}}\frac{t^k-t^{k-1}}{2}-B^{k-\frac{1}{2}}=0,\tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}-R_j^{k+\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k-\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k-\frac{1}{2}}}\frac{a_i^k-a_i^{k-1}}{2}-\frac{\partial B^{k-\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k-\frac{1}{2}}}\frac{t^k-t^{k-1}}{2}+R_j^{k-\frac{1}{2}}=0.\tag{8}$$

方程(7)和(8)被称作离散 Birkhoff 方程，而上述推演过程可以归结为离散后的 Pfaff-Birkhoff 变分原理确定了离散 Birkhoff 方程. 与连续情形略有不同的是，此时方程(7)并不是一个冗余方程，它不能由方程(8)推导而来. 事实上，正是方程(7)和(8)在联立之后才共同确定了一种可供执行的数值算法

$$\begin{aligned}
\Gamma:&(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)\to(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)\\
&(t^{k-1},\boldsymbol{a}^{k-1},t^k,\boldsymbol{a}^k)\to(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})
\end{aligned}$$

它不仅提供了离散位形变量的迭代方程，而且阐释了离散时间节点的演化规律.

独特的推导方式使得离散 Birkhoff 方程(7)、(8)自然具备与连续 Birkhoff 方程类似的优良性质. 例如，如果定义微分 1－形式 $\Theta_{Bd}^+$ 和 $\Theta_{Bd}^-$ 分别为

$$\Theta_{Bd}^+(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})=\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}-B^{k+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t^{k+1}+$$

$$\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}+R_j^{k+\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}a_j^{k+1}, \tag{9}$$

$$\Theta_{Bd}^-(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})=\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}+B^{k+\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}t^k+$$

$$\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}-R_j^{k+\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}a_j^k, \tag{10}$$

则可以验证 $\mathrm{d}\Theta_{Bd}^+=-\mathrm{d}\Theta_{Bd}^-\triangleq\Omega_{Bd}$，且由离散 Birkhoff 方程确定的离散流 $\Gamma$ 保持微分 2-形式 $\Omega_{Bd}$ 不变. 除此之外，离散 Birkhoff 系统同样成立离散形式的 Noether 定理.

仍然假设 $G$ 是一个李群，$g$ 是 $G$ 的李代数. 对于任意的 $\boldsymbol{\xi}\in g$，扩展位形空间 $\mathbb{R}\times M$ 上的李群作用 $\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times M}:\mathbb{R}\times M\to\mathbb{R}\times M$ 自然确定了 $(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)$ 上的提升作用

$$\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)}(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})$$
$$=[\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times M}(t^k,\boldsymbol{a}^k),\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{\mathbb{R}\times M}(t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})],$$

相应的无穷小生成元为

$$\boldsymbol{\xi}^{(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)}(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)}(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})$$
$$=[\boldsymbol{\xi}^{(\mathbb{R}\times M)}(t^k,\boldsymbol{a}^k),\boldsymbol{\xi}^{(\mathbb{R}\times M)}(t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})]$$

进一步，利用 $\Theta_{Bd}^+$ 和 $\boldsymbol{\xi}^{(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)}$ 定义离散的 Birkhoff 动量映射

$$J_{Bd}:(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)\to g^*$$

满足 $\langle J_{Bd}(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1}),\boldsymbol{\xi}\rangle_1$

$$=\langle\Theta_{Bd}^+(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1}),\boldsymbol{\xi}^{\mathbb{R}\times M}(t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})\rangle_2.$$

**定理 2**（离散 Noether 定理）： 如果

$$\sum_{i=1}^{2n}R_i^{k+\frac{1}{2}}(a_i^{k+1}-a_i^k)-B^{k+\frac{1}{2}}(t^{k+1}-t^k) \tag{11}$$

在李群作用 $\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)}:(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})\to(\tilde{t}^k,\tilde{\boldsymbol{a}}^k,\tilde{t}^{k+1},\tilde{\boldsymbol{a}}^{k+1})$ 下保持不变，那么，离散动量映射 $J_{Bd}$ 沿着离散 Birkhoff 方程(7)、(8)的解保持不变，即离散 Birkhoff 系统存在守恒量

$$\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}+B^{k+\frac{1}{2}}\right)\cdot\xi_0+\sum_{j=1}^{2n}\left[\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}-R_j^{k+\frac{1}{2}}\right)\cdot\xi_j\right].$$

**证明：** 首先，表达式(11)的不变性意味着

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\left[\sum_{i=1}^{2n}\tilde{R}_i^{k+\frac{1}{2}}(\tilde{a}_i^{k+1}-\tilde{a}_i^k)-\tilde{B}^{k+\frac{1}{2}}(\tilde{t}^{k+1}-\tilde{t}^k)\right]$$
$$=\langle\Theta_{Bd}^+(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1}),\boldsymbol{\xi}^{\mathbb{R}\times M}(t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})\rangle_2+\langle\Theta_{Bd}^-(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1}),\boldsymbol{\xi}^{\mathbb{R}\times M}(t^k,\boldsymbol{a}^k)\rangle_2$$

其中 $\tilde{R}_i^{k+\frac{1}{2}}=R_i^{k+\frac{1}{2}}\circ\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)}$，$\tilde{B}^{k+\frac{1}{2}}=B^{k+\frac{1}{2}}\circ\boldsymbol{\Phi}_{\exp(\varepsilon\xi)}^{(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)}$.

其次，由表达式(11)的不变性自然而然可以得到 $A_d$ 的不变性，因此，沿着离散流 $\Gamma$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}A_d=\langle\Theta_{Bd}^+(t^{N-1},\boldsymbol{a}^{N-1},t^N,\boldsymbol{a}^N),\xi^{\mathbb{R}\times M}(t^N,\boldsymbol{a}^N)\rangle_2+\langle\Theta_{Bd}^-(t^0,\boldsymbol{a}^0,t^1,\boldsymbol{a}^1),\xi^{\mathbb{R}\times M}(t^0,\boldsymbol{a}^0)\rangle_2$$
$$=\langle\Theta_{Bd}^+(t^{N-1},\boldsymbol{a}^{N-1},t^N,\boldsymbol{a}^N),\xi^{\mathbb{R}\times M}(t^N,\boldsymbol{a}^N)\rangle_2-\langle\Theta_{Bd}^+(t^0,\boldsymbol{a}^0,t^1,\boldsymbol{a}^1),\xi^{\mathbb{R}\times M}(t^1,\boldsymbol{a}^1)\rangle_2=0.$$

注意到上式对于迭代过程的每一步都成立，因此

$$\langle\Theta_{Bd}^+(t^{k-1},\boldsymbol{a}^{k-1},t^k,\boldsymbol{a}^k),\xi^{\mathbb{R}\times M}(t^k,\boldsymbol{a}^k)\rangle_2=\langle\Theta_{Bd}^+(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1}),\xi^{\mathbb{R}\times M}(t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})\rangle_2$$

即 $J_{Bd}$ 保持不变. 此时，

$$\langle\Theta_{Bd}^+(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1}),\xi^{\mathbb{R}\times M}(t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})\rangle_2=\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial t^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}-B^{k+\frac{1}{2}}\right]\cdot\xi_0+$$

$$\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{a_i^{k+1}-a_i^k}{2}-\frac{\partial B^{k+\frac{1}{2}}}{\partial a_j^{k+\frac{1}{2}}}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}+R_j^{k+\frac{1}{2}}\right]\cdot\xi_i$$

**注释 2：** 对于自治 Birkhoff 系统而言，方程(7)退化为 $B^{k+\frac{1}{2}}=B^{k-\frac{1}{2}}$. 显然，离散 Birkhoff 系统保持离散 Birkhoff 函数 $B^{k+\frac{1}{2}}$ 不变. 事实上，这一守恒律也是表达式(11)在李群作用

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)}_{\exp(\varepsilon\xi)}(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})$$
$$=(t^k-\varepsilon,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1}-\varepsilon,\boldsymbol{a}^{k+1})$$

下满足不变性的直接结果. 此时无穷小生成元为 $\xi_0^{\mathbb{R}\times M}=-1,\xi_1^{\mathbb{R}\times M}=0,\cdots,\xi_{2n}^{\mathbb{R}\times M}=0$, 而

$$\langle\Theta_{Bd}^{+}(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1}),\boldsymbol{\xi}^{\mathbb{R}\times M}(t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})\rangle_2=B^{k+\frac{1}{2}}.$$

需要特别指出的是,对离散 Birkhoff 系统依然成立的 Noether 定理不仅仅是一个单一的理论结果,它使得离散方程(7)、(8)作为数值差分格式在保辛性的基础上又忠实地继承了连续系统具有的守恒特性,因而使其具备了更加优越的计算性能. 因此,离散 Birkhoff 系统的 Noether 定理能够为构造 Birkhoff 系统的高效数值算法提供指导.

## 3　算例

### 3.1　球面摆

如图 1 所示，球面摆的位形变量 $\theta$ 和 $\varphi$ 满足微分方程组

$$mr^2\ddot{\theta}-(\dot{\varphi})^2mr^2\cos\theta\sin\theta+mgr\sin\theta=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)=0$$

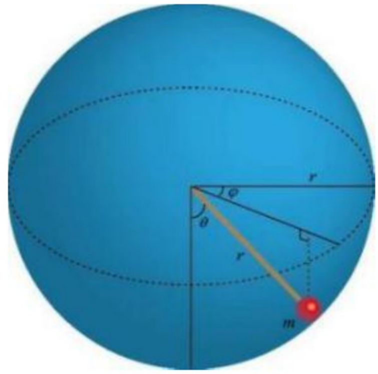


图 1　球面摆

Fig. 1　Spherical pendulum

令 $a_1=\theta$, $a_2=\varphi$, $a_3=mr^2\dot{\theta}$, $a_4=mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$ ，并选取

$$R_1=\frac{1}{2}a_3,\ R_2=\frac{1}{2}a_4,\ R_3=-\frac{1}{2}a_1,\ R_4=-\frac{1}{2}a_2$$

和

$$B=\frac{(a_3)^2}{2mr^2}+\frac{(a_4)^2}{2mr^2\sin^2 a_1}-mgr\cos a_1$$

则球面摆的运动方程可以重述为 Birkhoff 方程的形式，并且对应于一个自治 Birkhoff 系统.

套用离散 Birkhoff 方程(7)、(8)可得离散系统

$$\begin{aligned}
&\frac{(a_3^k+a_3^{k+1})^2}{8mr^2}+\frac{(a_4^k+a_4^{k+1})^2}{8mr^2}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{a_1^k+a_1^{k+1}}{2}\right)}-mgr\cos\left(\frac{a_1^k+a_1^{k+1}}{2}\right)\\
&=\frac{(a_3^{k-1}+a_3^k)^2}{8mr^2}+\frac{(a_4^{k-1}+a_4^k)^2}{8mr^2}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{a_1^{k-1}+a_1^k}{2}\right)}-mgr\cos\left(\frac{a_1^{k-1}+a_1^k}{2}\right),\\
&\frac{1}{2}a_1^{k+1}-\frac{1}{2}a_1^{k-1}-\frac{a_3^k+a_3^{k+1}}{2mr^2}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}-\frac{a_3^{k-1}+a_3^k}{2mr^2}\frac{t^k-t^{k-1}}{2}=0,\\
&\frac{1}{2}a_2^{k+1}-\frac{1}{2}a_2^{k-1}-\frac{a_4^k+a_4^{k+1}}{2mr^2}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{a_1^k+a_1^{k+1}}{2}\right)}\frac{t^{k+1}-t^k}{2}-\frac{a_4^{k-1}+a_4^k}{2mr^2}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{a_1^{k-1}+a_1^k}{2}\right)}\frac{t^k-t^{k-1}}{2}=0,\\
&\frac{1}{2}a_3^{k+1}-\frac{1}{2}a_3^{k-1}+\left[mgr\sin\left(\frac{a_1^k+a_1^{k+1}}{2}\right)-\frac{(a_4^k+a_4^{k+1})^2}{4mr^2}\frac{\cos\left(\frac{a_1^k+a_1^{k+1}}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{a_1^k+a_1^{k+1}}{2}\right)}\right]\frac{t^{k+1}-t^k}{2}+\\
&\quad\left[mgr\sin\left(\frac{a_1^{k-1}+a_1^k}{2}\right)-\frac{(a_4^{k-1}+a_4^k)^2}{4mr^2}\frac{\cos\left(\frac{a_1^{k-1}+a_1^k}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{a_1^{k-1}+a_1^k}{2}\right)}\right]\frac{t^k-t^{k-1}}{2}=0,\\
&\frac{1}{2}a_4^{k+1}-\frac{1}{2}a_4^{k-1}=0
\end{aligned}\tag{12}$$

正如注释 1 中所述，离散系统(12)保持离散 Birkhoff 函数(即数值能量)不变,即满足 $B^{k+\frac{1}{2}}=B^{k-\frac{1}{2}}$. 进一步将离散系统(12)当作用于近似连续系统的差分格式,那么经数值计算后可得 $B^{k+\frac{1}{2}}$ 的

演化曲线如图2所示. 显然，离散方程(12)非常精准地模拟出了连续系统的能量守恒特性，这是诸如Runge-Kutta格式等传统数值算法很难做到的. 另外，从图2中还可以看出，虽然定步长的保结构算法[15]也能够长时间地保持系统能量守恒，但是其误差要远大于变步长的保结构算法、即离散方程(12)的误差.

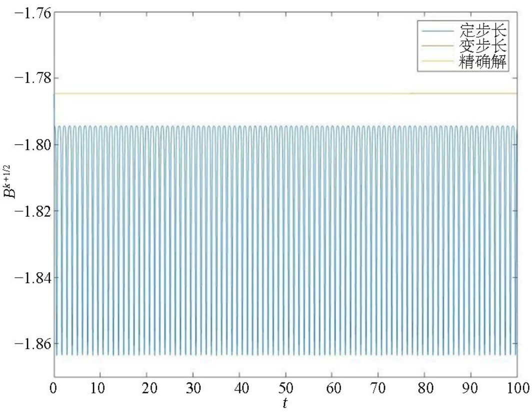


图2 球面摆的数值能量曲线：定步长算法 v.s 变步长算法

Fig. 2 Numerical energy curve of spherical pendulum: algorithm with fixed time step v.s algorithm with adaptive time step

## 3.2 线性衰减振子

考虑线性衰减振子方程

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+x=0,\quad \gamma=\text{常数} \tag{13}$$

令 $x=a_1, \dot{x}=a_2$ 并选取

$$R_1=\frac{1}{2}e^{\gamma t}a_2,\ R_2=-\frac{1}{2}e^{\gamma t}a_1,$$

$$B=\frac{1}{2}e^{\gamma t}[(a_1)^2+(a_2)^2+\gamma a_1a_2]$$

则方程(13)也可以等价地重述为Birkhoff方程. 与球面摆的例子不同，此时得到一个非自治Birkhoff系统. 根据选定的动力学函数可以验证，此时的微分1－形式 $\Theta_B$ 在李群作用

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathbb{R}\times M}_{\exp(\varepsilon\xi)}(t,\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{a}})=(t-\varepsilon,\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{a}})$$

下保持不变，而系统的Birkhoff函数 $B(t,\boldsymbol{a})$ 恰好就是该对称性确定的守恒量.

套用离散Birkhoff方程(7)、(8)同样可以得到与连续系统(13)对应的离散方程，并且容易验证

$$\sum_{i=1}^{2n}R_i^{k+\frac{1}{2}}(a_i^{k+1}-a_i^k)-B^{k+\frac{1}{2}}(t^{k+1}-t^k)$$

在李群变换

$$\boldsymbol{\Phi}^{(\mathbb{R}\times M)\times(\mathbb{R}\times M)}_{\exp(\varepsilon\xi)}(t^k,\boldsymbol{a}^k,t^{k+1},\boldsymbol{a}^{k+1})$$

$$=(t^k-\varepsilon,e^{\frac{1}{2}\gamma\varepsilon}\boldsymbol{a}^k,t^{k+1}-\varepsilon,e^{\frac{1}{2}\gamma\varepsilon}\boldsymbol{a}^{k+1})$$

下也保持不变. 因此，由离散Noether定理可知，此时离散系统一定存在离散守恒量

$$J_{Bd}=\frac{\gamma}{16}e^{\gamma t^{k+\frac{1}{2}}}[(a_1^k)^2+(a_2^k)^2-(a_1^{k+1})^2-(a_2^{k+1})^2+\gamma(a_1^ka_2^k-a_1^{k+1}a_2^{k+1})](t^{k+1}-t^k)+B^{k+\frac{1}{2}}$$

显然，$J_{Bd}$ 并不是连续守恒量 $B(t,\boldsymbol{a})$ 的直接离散，但是其与连续Birkhoff函数 $B(t,\boldsymbol{a})$ 和离散Birkhoff函数 $B^{k+\frac{1}{2}}$ 之间的偏差微乎其微. 这一事实可以由表1中的数值仿真结果看出.

**表1 不同迭代步数 $|B^{k+\frac{1}{2}}-B|$ 与 $|J_{Bd}-B|$ 的比较**

Table 1 Comparison of $|B^{k+\frac{1}{2}}-B|$ and $|J_{Bd}-B|$ at various iteration step

| 迭代步数 $k$ | $\lvert B^{k+\frac{1}{2}}-B\rvert$ | $\lvert J_{Bd}-B\rvert$ |
|---|---|---|
| 500th | $1.22\times10^{-7}$ | $1.23\times10^{-7}$ |
| 1 000th | $1.22\times10^{-7}$ | $1.23\times10^{-7}$ |
| 1 500th | $1.25\times10^{-7}$ | $1.26\times10^{-7}$ |
| 2 000th | $1.25\times10^{-7}$ | $1.26\times10^{-7}$ |
| 2 500th | $1.24\times10^{-7}$ | $1.25\times10^{-7}$ |
| 3 000th | $1.23\times10^{-7}$ | $1.24\times10^{-7}$ |
| 3 500th | $1.26\times10^{-7}$ | $1.28\times10^{-7}$ |
| 4 000th | $1.28\times10^{-7}$ | $1.30\times10^{-7}$ |
| 4 500th | $1.28\times10^{-7}$ | $1.30\times10^{-7}$ |
| 5 000th | $1.28\times10^{-7}$ | $1.29\times10^{-7}$ |

# 4 结论

本文在非等时变分的框架下以近乎平行的方式分别构建了连续和离散Birkhoff系统的Noether定理. 首先，借助Pfaff 1－形式在李群作用下的不变性重新定义了连续Birkhoff系统的对称性，并从余切空间的角度将已有的分析表述形式的Noether定理重述为几何表述形式. 其次，以直接离散变分原理的独特方式构建了离散Birkhoff系统对应的差分方程. 特别地，所得到的离散Birkhoff系统忠实地继承了连续系统所具有的几何结构，为后续建立离散系统的Noether定理奠定了理论基础. 随后，利用离散Pfaff 1－形式在李群作用下的不变性定义了离散Birkhoff系统的对称性，并进一步给出了由对称性确定的守恒量. 最后的数值算例表明，离散Birkhoff系统的Noether定理使得离散系统方程在作为数值差分格式时兼具保辛和保守恒量两种特性，因而赋予

了其更加优越的计算性能.

## 参考文献


[1] 梅凤翔. Birkhoff 系统动力学的研究进展[J]. 力学进展，1997，27(4)：436－446.
MEI F X. The progress of research on dynamics of Birkhoff's system [J]. Advances in Mechanics，1997，27(4)：436－446.(in Chinese)

[2] 陈向炜,傅景礼,罗绍凯,等. Birkhoff 系统动力学研究进展[J].商丘师范学院学报,2004,20(2):5－13.
CHEN X W，FU J L，LUO S K，et al. Development in the studies of dynamics of Birkhoffian system [J]. Journal of Shangqiu Teachers College，2004，20(2)：5－13.(in Chinese)

[3] 梅凤翔，吴惠彬，李彦敏，等. Birkhoff 力学的研究进展[J]. 力学学报，2016，48(2)：263－268.
MEI F X，WU H B，LI Y M，et al. Advances in research on Birkhoffian mechanics [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2016，48(2)：263－268.(in Chinese)

[4] 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Noether 理论[J]. 中国科学：A 辑，1993(7)：709－717.
MEI F X. Noether theory of Birkhoff system [J]. Science in China：Series A，1993(7)：709－717.(in Chinese)

[5] 丁光涛. Birkhoff 系统 Noether 逆定理的解法[J]. 动力学与控制学报，2010，8(2)：100－104.
DING G T. The solutions for Noether's inverse theorem of Birkhoffian system [J]. Journal of Dynamics and Control，2010，8(2)：100－104.(in Chinese)

[6] 张毅. 时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量[J]. 动力学与控制学报，2019，17(5)：482－486.
ZHANG Y. Noether symmetries and conserved quantities of constrained Birkhoffian systems on time scales [J]. Journal of Dynamics and Control，2019，17(5)：482－486.(in Chinese)

[7] 张宏彬. 单面约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论[J]. 物理学报，2001，50(10)：1837－1841.
ZHANG H B. Noether's theory of Birkhoff systems with unilateral constraints [J]. Acta Physica Sinica，2001，50(10)：1837－1841.(in Chinese)

[8] 贾秋丽，魏凤军. 广义 Birkhoff 系统分数阶最优控制问题的 Noether 定理[J]. 湖南工业大学学报，2024，38(4)：93－97.
JIA Q L，WEI F J. Noether theorem for fractional optimal control problems of generalized Birkhoffian systems [J]. Journal of Hunan University of Technology，2024，38(4)：93－97.(in Chinese)

[9] WANG P，LIU B Q. Fractional gradient system and generalized Birkhoff system [J]. Acta Mechanica，2024，235(6)：3607－3619.

[10] DING J J，ZHANG Y. Noether's theorem for fractional Birkhoffian system of Herglotz type with time delay [J]. Chaos，Solitons & Fractals，2020，138：109913.

[11] CHEN J Y，ZHANG Y. Time-scale version of generalized Birkhoffian mechanics and its symmetries and conserved quantities of Noether type [J]. Advances in Mathematical Physics，2021，2021(1)：9982975.

[12] 罗绍凯. 相对论 Birkhoff 系统的形式不变性与 Noether 守恒量[J]. 应用数学和力学，2003，24(4)：414－422.
LUO S K. Form invariance and Noether symmetrical conserved quantity of relativistic Birkhoffian systems [J]. Applied Mathematics and Mechanics，2003，24(4)：414－422.(in Chinese)

[13] 刘畅,赵永红,陈向炜.动力学系统 Noether 对称性的几何表示[J].物理学报,2010,59(1):11－14.
LIU C，ZHAO Y H，CHEN X W. Geometric representation of Noether symmetry for dynamical systems [J]. Acta Physica Sinica，2010，59(1)：11－14.(in Chinese)

[14] 梅凤翔，史荣昌，张永发，等. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京：北京理工大学出版社，1996.
MEI F X，SHI R C，ZHANG Y F，et al. Dynamics of Birkhoffian system [M]. Beijing：Beijing Institute of Technology Press，1996.(in Chinese)

[15] KONG X L，WU H B，MEI F X. Structure-preserving algorithms for Birkhoffian systems [J]. Journal of Geometry and Physics，2012，62(5)：1157－1166.