文章编号:1672-6553-2025-23(3)-025-007 DOI:10.6052/1672-6553-2025-015

# 含多余坐标的完整系统的保结构约化*

夏丽莉[1] 戈新生[2] 陈立群[3†]

(1. 北京信息科技大学 理学院,北京 100192) (2. 北京信息科技大学 机电学院,北京 100192)
(3. 上海大学 力学与工程科学学院,上海市应用数学和力学研究所,上海市能源工程力学重点实验室,上海 200444)

**摘要** 为求解多余坐标表示的完整系统的 Lie 对称性,借助符号计算软件 Maple 平台,利用 GeM 程序包解析求解系统的 Lie 对称性确定方程,得到系统的线性无关的最大 Lie 对称性解集. 将多余坐标表示的完整约束表示为可积的速度约束. 根据约束分布,构建两种不同的纤维化结构. 将系统约化到能同时满足约束分布和对称性向量场(Lie 对称群轨道切矢量场)的空间上,实现完整系统的保结构约化,并给出相应的数值算法. 同时,举例说明了结果的应用.

**关键词** 多余坐标, 完整系统, Lie 对称性分析, 约化

**中图分类号**:O316 **文献标志码**:A

# Structure-Preserving Reduction for Holonomic Systems with Redundant Coordinates*

Xia Lili[1] Ge Xinsheng[2] Chen Liqun[3†]

(1. College of Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China)
(2. Mechanical and Electrical Engineering School, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China)
(3. Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract** To solve for the Lie symmetries of a holonomic systems with redundant coordinates, the GeM package of the Maple is used to analytically solve the determining equations for the Lie symmetries of the system. This process yields the maximally linearly independent set of Lie symmetry solutions for the system. The holonomic constraints are formulated as integrable velocity constraints. For the purpose of reduction, two different fiber structures are constructed. We reduce the system onto a space that simultaneously satisfies both the constraint distribution and the symmetry vector field (the tangent vectors to the orbits of the Lie symmetry group). A symmetry reduction for the holonomic system is achieved, and corresponding numerical algorithm is provided. An example is given to illustrate the application of the results.

**Key words** redundant coordinates, holonomic systems, Lie symmetry analysis, reduction

2024-11-29 收到第 1 稿,2025-01-14 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(12072041,11732005),National Natural Science Foundation of China (12072041,11732005).
† 通信作者 E-mail:lqchen@staff.shu.edu.cn

## 引言

Lie对称性是动力学对称性的一种,它是指系统的动力学方程在无限小变换下的不变性.目前Lie对称性分析方法主要用于求解系统的解析解、寻求系统内在的物理守恒定律、实现保结构约化、构建保结构数值计算方法.北京理工大学的梅凤翔先生在《约束力学系统的对称性与守恒量》、《高等分析力学》、《李群李代数对约束系统的应用》、《广义Birkhoff系统动力学》和《Dynamics of Constrained Mechanical Systems》等专著中,详细而系统地给出了Lie对称性的理论和应用[1-5].特别是对各种动力学系统的推广,包括Lagrange框架下的一般完整约束系统[6-8]、非完整约束系统[9-12]、变质量完整系统[13-15].此外,在Hamilton框架下的约束系统的Lie对称性[16-19]以及Birkhoff框架下的动力学系统的Lie对称性[20-25]等方面也有丰富的成果,为国内外Lie对称性在各类动力学系统的应用发展搭建了框架.Lie对称性方法的优点是利用对称性生成元可以简化寻求系统解析解的过程,但是Lie对称性判定方程是偏微分超定方程组,不易求解,特别地,对于本身就是偏微分方程(组)的数学模型,更加困难.

含多余坐标的完整力学系统,指的是在完整约束的力学分析中,所选取的坐标并非完全独立,系统的描述包含了比实际自由度更多的坐标.由于坐标的非独立性,系统中会存在约束方程,这些方程描述了坐标之间的依赖关系.多余坐标系统的研究,包括系统的第一积分[26,27]、自由运动和初始运动[28]等.在Lagrange系统和广义坐标下一般完整系统中,选取的广义坐标都是彼此独立的,为了解决工程实际问题,某些情况下引入冗余坐标反而会带来方便:(1)对于复杂约束下的(多)刚体模型,某些情况下广义坐标不易选取,或选取的广义坐标表达的动能和势能不够简洁,较为烦琐,采用多余坐标建模更容易;(2)冗余坐标表示的微分代数方程组的耦合较弱,非线性程度相对较低,物理特性表述清晰,易于计算约束反力;(3)在进行机构动力学分析时,更多的自由度可以更灵活地描述运动状态,方便构建多目标优化问题.然而,含多余坐标的力学系统涉及坐标的非独立性和约束方程,约束和未知量的增加也使其动力学分析更加复杂.特别在对称性分析方面,其对称性求解变得更加一般.如果没有选择多余坐标,则有多余坐标的系统成为通常的一般完整系统,因此,对于含多余坐标完整系统建立的对称性与守恒量理论,一般完整系统是其特例,自然适合通常的一般完整系统[1].

鉴于此,本文基于对称性分析约化含多余坐标的完整系统,借助符号计算软件Maple平台,利用程序包解析求解系统的Lie对称性确定方程,克服求解对称性向量场的困难,同时基于Lie对称性约化的几何方法降低系统的维数,避免完整系统因维数增加带来的数值模拟的困难.为含多余坐标的完整系统的保结构约化提供一个可行的方法.

## 1 含多余坐标的完整系统的动力学方程

设$s$维Lagrange力学系统,空间$M_0=Q_0\times\mathbb{R}$由坐标$\{t,q^{\mu}\}(\mu=1,...,s)$确定.为方便计算及某些需要,选择$n-s$个多余坐标$q^{\gamma}(\gamma=s+1,...,n)$,并有$n-s$个双面理想完整约束

$$f^{\beta}(t,q^{\mu},q^{\gamma})=0,(\beta=1,...,n-s)\tag{1}$$

对于含多余坐标的完整系统的动力学系统,其相应的事件空间为$M=Q\times\mathbb{R}$,坐标为$\{t,q^{\nu}\}$.约束(1)加在虚位移上$\delta q^{\nu}$上的限制为

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial q^{\nu}}\delta q^{\nu}=0\quad(\nu=1,\cdots,n)\tag{2}$$

系统的运动微分方程可以表示为Routh形式[1]

$$\mathrm{E}_{\nu}(L)=Q_{\nu}+\lambda_{\beta}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial q^{\nu}}\tag{3}$$

其中$L=T-V$为系统的Lagrange函数,$Q_{\nu}$为广义力,$\lambda_{\beta}$为约束乘子,$E_{\nu}$为Euler算子.

假设系统(3)非奇异,与(1)联立,可求得所有的广义加速度,记作

$$\ddot{q}^{\nu}=F^{\nu}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\tag{4}$$

## 2 Lie对称性和Noether定理

设流形$M$上的一个变换群为$\Phi:M\to M$,即此力学系统具有对称性,其对称群为$r$维李群$G$,它的作用为$M$上的曲线,该曲线的切矢量或生成元为

$$\xi_{\alpha}=\tau_{\alpha}(t,\boldsymbol{q})\partial/\partial t+\xi_{\alpha}^{\nu}(t,\boldsymbol{q})\partial/\partial q^{\nu},(\alpha=1,\cdots,r)\tag{5}$$

其中$\tau_{\alpha},\xi_{\alpha}^{\nu}\in C^{\infty}(M)$,$\partial/\partial t$和$\partial/\partial q^{\nu}$为$M$的切空间的基矢量,由$\xi_{\alpha}$生成的$M$上的无穷小变换为

$$t\to t^{*}=t+\varepsilon^{\alpha}\tau_{\alpha}(t,\boldsymbol{q}),$$

$$q^{\nu} \to q^{*\nu} = q^{\nu} + \varepsilon^{\alpha}\xi^{\nu}_{\alpha}(t,\boldsymbol{q})\ (\nu=1,\cdots,n) \tag{6}$$

$\xi_{\alpha}$ 的一阶和二阶拓展为

$$\xi^{(1)}_{\alpha} = \xi_{\alpha} + \bar{\xi}^{\nu}_{\alpha}\partial/\partial\dot{q}^{\nu} \tag{7}$$

$$\xi^{(2)}_{\alpha} = \xi^{(1)}_{\alpha} + (\dot{\bar{\xi}}^{\nu}_{\alpha} - \dot{q}^{\nu}\dot{\tau}_{\alpha})\partial/\partial\ddot{q}^{\nu} \tag{8}$$

其中 $\bar{\xi}^{\nu}_{\alpha} = \dot{\xi}^{\nu}_{\alpha} - \dot{q}^{\nu}\dot{\tau}_{\alpha}$.

式(5)生成了 $TQ\times\mathbb{R}$ 上的变换群 $\Psi: TQ\times\mathbb{R}\to TQ\times\mathbb{R}$. 利用 $TQ\times\mathbb{R}$ 的基矢量 $\{\partial/\partial t, \partial/\partial q^{\nu}, \partial/\partial\dot{q}^{\nu}\}$,可以将运动微分方程(4)表示为 $TQ\times\mathbb{R}$ 上的动力学矢量场 $Z$,有

$$Z = \partial/\partial t + \dot{q}^{\nu}\partial/\partial q^{\nu} + F^{\nu}\partial/\partial\dot{q}^{\nu} \tag{9}$$

取标架基为 $\{Z, \partial/\partial q^{\nu}, \partial/\partial\dot{q}^{\nu}\}$,一阶和二阶扩展为

$$\xi^{(1)}_{\alpha} = \tau_{\alpha}Z + \bar{\xi}^{\nu}_{\alpha}\partial/\partial q^{\nu} + Z(\bar{\xi}^{\nu}_{\alpha})\partial/\partial\dot{q}^{\nu} \tag{10}$$

$$\xi^{(2)}_{\alpha} = \xi^{(1)}_{\alpha} + Z^{2}(\bar{\xi}^{\nu}_{\alpha})\partial/\partial\dot{q}^{\nu} \tag{11}$$

假设 $\Psi: TQ\times\mathbb{R}\to TQ\times\mathbb{R}$ 为作用于 $TQ\times\mathbb{R}$ 空间上的局部变换群,且 $\Lambda$ 是动力学矢量场 $Z$ 的积分曲线族,对于任一 $\gamma\in\Lambda$,Lie 对称性的确定方程为

$$\Psi\cdot\gamma\in\Lambda \tag{12}$$

上式可以展开为如下 Killing 方程

$$\kappa_{\alpha} = -Z(\tau_{\alpha}) = \dot{\tau}_{\alpha} \tag{13}$$

$$Z^{2}(\bar{\xi}^{\nu}_{\alpha}) - Z(\bar{\xi}^{\sigma}_{\alpha})\frac{\partial F^{\nu}}{\partial\dot{q}^{\sigma}} - \bar{\xi}^{\sigma}_{\alpha}\frac{\partial F^{\nu}}{\partial q^{\sigma}} = 0 \tag{14}$$

Lie 对称性和 Noether 定理为研究约束系统的积分理论提供简洁的思路[29,30]

**定义 1**[31,32] 对于无穷小变换(5)中的生成元,如果它们满足方程(12),则这种不变性称为完整系统(4)的 Lie 对称性.

**定理 1**[33,34] 对于完整系统(4),如果坐标变换群 $\Phi: M\to M$ 的生成元是 Lie 对称性的,且存在规范函数 $\tilde{\omega}_{\alpha} = \tilde{\omega}_{\alpha}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足

$$L_{\xi^{(1)}_{\alpha}}\vartheta + i_{\xi^{(1)}_{\alpha}}(Q_{\nu}\vartheta^{\nu}\wedge dt) = d\tilde{\omega}_{\alpha} \tag{15}$$

则完整力学系统存在如下守恒量

$$I_{\alpha} = \tilde{\omega}_{\alpha} - i_{\xi^{(1)}_{\alpha}}\vartheta(L) \tag{16}$$

其中 $\vartheta(L) = L\mathrm{d}t + \dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}^{\nu}}\theta^{\nu}$ 是 Lagrange 函数的 Poincaré-Cartan 1—形式,这里 $\theta^{\nu} = dq^{\nu} + \dot{q}^{\nu}\mathrm{d}t$ 是接触 1—形式.

## 3 完整系统的对称性约化

本部分在几何框架中研究完整系统的对称性约化. 这里涉及 Ehresmann 联络的概念,关于 Ehresmann 联络的一般参考资料是文献[35-37]及其引用的参考文献. 为了降低完整系统的维数,我们需要在几何框架中构建纤维丛.

根据不同的需要可以建立不同的纤维丛结构. 当用独立坐标对完整系统建模时,通常选择以独立坐标张成的空间 $M_0$ 为底流形,局部坐标为 $\{t, q^{\mu}\}$,取 $TM_0$ 局部坐标为 $\{t, q^{\mu}, v^{\mu}\}$. 对于约束(1),记 $TM_0$ 上投影为 $\tau_{M_0}: TM_0\to M_0$,则 $T_xM_0 = \tau^{-1}_{M_0}(x)$,投影 $\tau_{M_0}$ 是可微的满浸没映射,存在一个水平提升 $h: TM_0\to TTM_0$,使得 $T\tau_{M_0}\cdot h = \mathrm{id}_{TM_0}$. 空间 $TM_0$ 上的切矢量的基可以表示为

$$\bar{H}_0 \triangleq (\partial/\partial t)^{h} = \partial/\partial t - \Gamma^{\nu}_{0}\partial/\partial v^{\nu},$$
$$\bar{H}_{\mu} \triangleq (\partial/\partial q^{\mu})^{h} = \partial/\partial q^{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu}\partial/\partial v^{\nu},$$
$$\bar{V}_{\mu} \triangleq (\partial/\partial q^{\mu})^{v} = \partial/\partial v^{\mu} \tag{17}$$

其中 $\bar{H}_0$ 和 $\bar{H}_{\mu}$ 张成水平空间,$\bar{V}_{\mu}$ 张成竖直空间,$\Gamma^{\nu}_{0}$ 和 $\Gamma^{\nu}_{\mu}$ 是 Ehresmann 联络因子.

如果完整系统具有对称性,可以基于文献[35,36]的方法,以独立坐标 $\{t, q^{\mu}\}$ 底流形坐标,多余坐标$\{t, q^{\gamma}\}$为纤维坐标,引入第二种纤维丛结构,实现对称性约化. 这里需要得到速度的约束关系,处理方式是将约束(1)转换成可积的速度约束,实现活动标架下建模. 具体形式如下

$$\dot{q}^{\gamma} = B^{\gamma}_{\mu}\dot{q}^{\mu} + B^{\gamma}_{0} \tag{18}$$

考虑到约束(18)是对速度的约束,可以建立如下纤维丛结构. 设纤维丛 $\tau_{M_0}: M\to M_0$. 这里 $M = \tau^{-1}_{M_0}$. 构造一个水平提升 $h: TM_0\to TM$,其满足 $T\tau_{M_0}\cdot h = \mathrm{id}TM_0$,这个提升被称为水平分布或联络,对应的速度约束空间即水平空间,记为 $hor_{\boldsymbol{x}}$,$T_x\tau_{M_0}$ 的核称为竖直空间,记作 $ver_{\boldsymbol{x}}$,对于 $\mathrm{M}_0$ 上任一点 $\boldsymbol{x}\in M_0$,有 $T_xM = hor_{\boldsymbol{x}}\oplus ver_{\boldsymbol{x}}$,约束空间记为

$$D^{\mathrm{hol}}_{\boldsymbol{x}} = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^{1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{\mu+1}}\right\} \tag{19}$$

约束分布记为 $D^{hol} = \{D^{hol}_{\boldsymbol{x}}\subset T_xM: \boldsymbol{x}\in M\}$,$M$ 的切向量的基为

$$H_0 \triangleq (\partial/\partial t)^{h} = \partial/\partial t + B^{\gamma}_{0}\partial/\partial q^{\gamma},$$
$$H_{\mu} \triangleq (\partial/\partial q^{\mu})^{h} = \partial/\partial q^{\mu} + B^{\gamma}_{\mu}\partial/\partial q^{\gamma},$$
$$V_{\mu} \triangleq (\partial/\partial q^{\mu})^{v} = \partial/\partial q^{\gamma}. \tag{20}$$

这里,$H_0$ 和 $H_{\mu}$ 张成水平分布,$V_{\mu}$ 是竖直分布基矢量,$B^{\gamma}_{0}$ 和 $B^{\mu}_{\gamma}$ 是 Ehresmann 因子. 基于 Ehresmann 联络的定义,约束(18)是在水平分布上,即

$(H_0, H_\mu) = D_x^{hol}$，这里 $\boldsymbol{x} = (t, q^\mu) \in M_0$. 基于此约化系统，给出如下推论.

**推论1** 对于完整系统(4)的Lie对称性向量场集合$\{\xi_\alpha\}$，如果其子代数$\{\xi_\beta\}$满足约束分布，则$\{\xi_\beta\}$是约化系统的标架基.

**证明** 约化以后的完整系统属于$\{H_0(\boldsymbol{x}), H_\mu(\boldsymbol{x}), V_\mu(\boldsymbol{x})\}$张成的空间上，对于任一 $\boldsymbol{x} \in M_0$，满足 $D_x^{hol} \subset T_x M$，是线性子空间的集合，即

$$D_x^{hol} = \mathrm{span}\{\partial/\partial t + B_0^\gamma \partial/\partial q^\gamma, \partial/\partial q^\mu + B_\mu^\gamma \partial/\partial q^\gamma, \partial/\partial q^\gamma\} \tag{21}$$

设 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 是李群$G$的李代数，根据Lie对称性定义，对于流形 $M$ 上的向量场 $\xi_\alpha \in \bar{\boldsymbol{g}}$，其对应的无穷小生成元是在 $t=0$ 时 $\psi_{\exp(t\xi)}$ 关于 $t$ 的导数. 对任一$\boldsymbol{x}$，群轨道是浸没子流形，记作 $Orb_x := \{\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{g} \in G, \boldsymbol{x} \in M\}$. 经过某一点的群轨道的切空间由该点的所有无穷小生成元构成

$$T_x Orb(\boldsymbol{x}) = \{\xi_\alpha(\boldsymbol{x}) \mid \xi \in \bar{\boldsymbol{g}}\} \tag{22}$$

基于Lie对称性分析，可得系统最大独立Lie对称性解集是$\{\xi_\alpha\}$. 设同时满足(21)和(22)的生成元记为$\{\xi_\beta\}$，则$\{\xi_\beta\}$是$\{\xi_\alpha\}$的子代数，又因为$\{\xi_\alpha\} \subseteq T_x Orb(\boldsymbol{x})$，有

$$\{\xi_\beta\} = D_x^{hol} \cap T_x Orb(\boldsymbol{x}) \tag{23}$$

基于文献[35]的结论，$\{\xi_\beta\}$是基于此对称性的约化系统标架基.

## 4 算例

考虑球面摆的数学模型：摆长为 $l$，摆球(质点)质量为 $m$. 看成定点转动的质点，在定坐标系 $Oxyz$ 下，系统的Lagrange函数为 $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz$ 系统受到的非线性约束 $f = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$，系统Euler-Lagrange方程为

$$m\ddot{x} = 2\lambda x, m\ddot{y} = 2\lambda y, m\ddot{z} = 2\lambda z - mg \tag{24}$$

系统的约束反力可以直接写出

$$\Lambda_1 = -\frac{x}{2l^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - gz),$$

$$\Lambda_2 = -\frac{y}{2l^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - gz),$$

$$\Lambda_3 = -\frac{z}{2l^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - gz). \tag{25}$$

基于量纲分析理论，利用Maple平台的GeM或odeLie程序包可以给出Lie对称性判定方程等价形式

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0, \frac{\partial\xi^1}{\partial t} = 0, \frac{\partial\tau}{\partial x} = 0, \frac{\partial\xi^1}{\partial x} = 0, \frac{\partial\tau}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial y} = \frac{1}{y}\xi^1, \frac{\partial\tau}{\partial z} = 0, \frac{\partial\xi^1}{\partial z} = 0, \xi^2 = -\frac{x}{y}\xi^1, \xi^3 = 0$$

对应的解是Lie对称性生成元的一般形式

$$\tau = C_1, \xi^1 = C_2 y, \xi^2 = -C_2 x, \xi^3 = 0. \tag{26}$$

其最大线性无关的Lie对称性为

$$\xi_1 = \partial/\partial t \tag{27}$$

$$\xi_2 = y\partial/\partial x - x\partial/\partial y \tag{28}$$

由定理1，系统的Nother守恒量为

$$I_1 = mgz - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{29}$$

$$I_2 = y\dot{x} - x\dot{y} \tag{30}$$

守恒量(29)是能量守恒，守恒量(30)对应 $z$ 方向的角动量守恒. 两个守恒量属于系统的第一积分，通过此第一积分，可以将系统速度空间维数约化为一维. 另一方面，我们采用纤维丛理论，将含多余坐标的数学模型约化到约束分布上，得到一阶、独立坐标表示的系统的动力学方程.

约束空间

$$D_{(x,y,z)}^{hol} = \mathrm{span}\{y\partial/\partial x - x\partial/\partial y, -x\partial/\partial z + z\partial/\partial x\} \tag{31}$$

$\{\xi_2\}$满足约束分布，即$\partial/\partial z$ 可以作为系统的标架基的一部分，设向量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为竖直单位向量，满足$|\boldsymbol{\Gamma}| = 1$. 系统的Lagrange函数是关于 $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3)$ 不变的. 建立动坐标系 $O\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3$，这里 $\Gamma^3$ 沿着悬挂点和质心的方向，则活动标架为

$$u_1 = \Gamma^3\partial/\partial\Gamma^2 - \Gamma^2\partial/\partial\Gamma^3,$$

$$u_2 = \Gamma^1\partial/\partial\Gamma^3 - \Gamma^3\partial/\partial\Gamma^1,$$

$$u_3 = \Gamma^2\partial/\partial\Gamma^1 - \Gamma^1\partial/\partial\Gamma^2$$

满足

$$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1, C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1,$$

$$C_{13}^2 = -C_{31}^2 = -1 \tag{32}$$

这个标架也是惯性主轴. 也是第二种纤维丛结构中标架基(20)的形式. 其中，矢量 $\boldsymbol{u}_3$ 还同时是系统约束分布的基矢量. 在此标架下定义$(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$为相对于活动坐标轴的旋转角速度. 物体角速度的第三个分量消失，即 $\zeta^3 = 0$. 在标架 $O'\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3$ 下，Lagrange函数表示为

$$l(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\Gamma}) = \frac{1}{2}\langle I\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}\rangle - mg\langle\boldsymbol{\Gamma}, l\rangle \tag{33}$$

方程(25)简化为

$$\dot{\zeta}^1 = I\zeta^2\zeta^1 + \Gamma^2 mgl, \dot{\zeta}^2 = -I\zeta^1\zeta^2 - \Gamma^1 mgl \tag{34}$$

方程组(34)和文献[38]的结果一致. 速度空间维数降了一维，相对于方程(24)，变量个数减少了 2 个，方程的阶数降低了一阶，式(34)为第二种纤维丛结构中活动标架(20)下的动力学方程. 这是一阶常微分方程组，这里用中心差分格式牛顿迭代方法进行模拟.

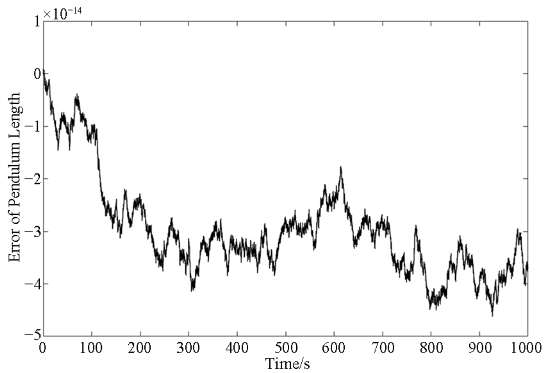


图 1　摆长的误差
Fig. 1　Error of pendulum length

图 1 给出了系统的能量误差随着时间的变化关系. 这里 $m=1$ kg, $h=0.001$ s, $(\zeta^1)_0=0.6$ rad/s, $(\zeta^2)_0=0$ rad/s, $(\zeta^2)_0=0$ rad/s, $(\Gamma^1)_0=0.2$ m, $(\Gamma^2)_0=0.3$ m, $(\Gamma^2)_0=-\sqrt{0.87}$ m. 从图中可以看出，基于对称性约化后的系统的数学模型，采用经典算法也可以稳定和精确地描述系统的动力学行为.

## 5　总结

本文基于对称性分析理论构建活动标架，在实现完整系统约化的同时保持系统的对称性、守恒量等几何结构. 具体给出了带有多余坐标的完整系统的 Lie 对称性和守恒量，在 Lie 对称性定义和 Noether 定理的几何表示的基础上，利用量纲分析的方法得到系统的线性独立的最大 Lie 对称性解集，这也是构建带有对称性的完整力学系统的活动标架的基础. 结合约束分布和 Lie 对称群轨道的特点，得到了带有多余坐标的完整约束系统的活动标架，实现了系统的约化，从而简化了解析分析和数值计算. 球摆的算例表明，基于对称性分析的活动标架下的数值计算能够保持系统的几何结构，为完整系统的约化提供相对简洁的途径. 另外，本文的约化过程都在代数空间上进行，对于某些非线性模型，避免了群运算带来的求解困难，可以为工程上某些非线性高维完整系统的保结构建模和数值计算提供参考.

## 参考文献


[1]　梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京：北京理工大学出版社，2004.
MEI F X. Symmetry and conserved quantity of constrained mechanical systems [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2004. (in Chinese)

[2]　梅凤翔，刘端，罗勇. 高等分析力学[M]. 北京：北京理工大学出版社，1991.
MEI F X, LIU D, LUO Y.. Advanced analytical mechanics [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991. (in Chinese)

[3]　梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京：科学出版社，1999.
MEI F X. Applications of Lie groups and Lie algebras to constrained mechanical systems [M]. Beijing: Science Press, 1999. (in Chinese)

[4]　梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统动力学[M]. 北京：科学出版社，2013.
MEI F X. Dynamics of generalized Birkhoff systems [M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)

[5]　MEI F X, WU H B. Dynamics of constrained mechanical systems [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2009.

[6]　梅凤翔. 包含伺服约束的非完整系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 物理学报，2000，49(7)：1207－1210.
MEI F X. Lie symmetries and conserved quantities of nonholonomic systems with servoconstraints [J]. Acta Physica Sinica, 2000, 49(7): 1207－1210. (in Chinese)

[7]　MEI F X. Lie symmetries and conserved quantities of holonomic systems with remainder coordinates [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 1998, 7(1): 26－31

[8]　梅凤翔. 完整力学系统的三类对称性与三类守恒量[J]. 动力学与控制学报，2004，2(1)：28－31.
MEI F X. Three kinds of symmetries and three kinds of conserved quantities for holonomic systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2004, 2(1): 28－31. (in Chinese)

[9]　MEI F X. Lie symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems [J]. Acta Me-

chanica，2000，141(3)：135－148.

［10］ 梅凤翔. 非完整系统力学的历史与现状［J］. 力学与实践，1979，1(4)：6－10.
MEI F X. History and current status of the mechanics of nonholonomic systems［J］. Mechanics in Engineering，1979，1(4)：6－10.（in Chinese）

［11］ MEI F X，WU H B，ZHANG Y F. Symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems［J］. International Journal of Dynamics and Control，2014，2(3)：285－303.

［12］ MEI F X，XU X J. Form invariances and Lutzky conserved quantities for Lagrange systems［J］. Chinese Physics，2005，14(3)：449－451.

［13］ 梅凤翔. 关于梯度系统：分析力学札记之十八［J］. 力学与实践，2012，34(1)：89－90.
MEI F X. On first-order Lagrange systems：notes on analytical mechanics，XVII［J］. Mechanics in Engineering，2012，34(1)：89－90.（in Chinese）

［14］ 梅凤翔，尚玫. 一阶 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量［J］. 物理学报，2000，49(10)：1901－1903.
MEI F X，SHANG M. Lie symmetries and conserved quantities of first order Lagrange systems［J］. Acta Physica Sinica，2000，49(10)：1901－1903.（in Chinese）

［15］ 梅凤翔. 具有非 Chetaev 型非完整约束的奇异系统的形式不变性［J］. 商丘师范学院学报，2005，21(2)：1－5.
MEI F X. Form invariance of singular systems with nonholonomic constraints of non-Chetaev's type［J］. Journal of Shangqiu Teachers College，2005，21(2)：1－5.（in Chinese）

［16］ 梅凤翔. 广义 Hamilton 系统的 Lie 对称性与守恒量［J］. 物理学报，2003，52(5)：1048－1050.
MEI F X. Lie symmetry and the conserved quantity of a generalized Hamiltonian system［J］. Acta Physica Sinica，2003，52(5)：1048－1050.（in Chinese）

［17］ MEI F X，ZHENG G H. On the Noether symmetry and Lie symmetry of mechanical systems［J］. Acta Mechanica Sinica，2002，18(4)：414－419.

［18］ 梅凤翔. 相空间中运动微分方程的非 Noether 守恒量［J］. 科学通报，2002，47(20)：1544－1545.
MEI F X. Non-Noether conserved quantities for differential equations of motion in phase space［J］. Chinese Science Bulletin，2002，47(20)：1544－1545.（in Chinese）

［19］ 梅凤翔. Чаплыгин 系统，广义 Hamilton 系统与 Birkhoff 系统［M］//中国非完整力学三十年. 开封：河南大学出版社，1994，60－66
MEI F X. Chaplygin systems，generalized Hamiltonian systems，and Birkhoff systems［M］//Thirty Years of Nonholonomic Mechanics in China. Kaifeng：Henan University Press，1994，60－66.

［20］ MEI F X，GANG T Q，XIE J F. A symmetry and a conserved quantity for the Birkhoff system［J］. Chinese Physics，2006，15(8)：1678－1681.

［21］ MEI F X，XIE J F，GANG T Q. A conformal invariance for generalized Birkhoff equations［J］. Acta Mechanica Sinica，2008，24(5)：583－585.

［22］ MEI F X，CUI J C. Lie symmetries and conserved quantities for generalized Birkhoff system［J］. Journal of Beijing Institute of Technology，2011，20(3)：285－288.

［23］ 梅凤翔，吴惠彬，李彦敏，等. Birkhoff 力学的研究进展［J］. 力学学报，2016，48(2)：263－268.
MEI F X，WU H B，LI Y M，et al. Advances in research on Birkhoffian mechanics［J］. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics，2016，48(2)：263－268.（in Chinese）

［24］ 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Lie 对称性和守恒律［J］. 科学通报，1998，43(18)：1937－1939.
MEI F X. Lie symmetry and conservation law of Birkhoff systems［J］. Chinese Science Bulletin，1998，43(18)：1937－1939.（in Chinese）

［25］ MEI F X，ZHANG Y F，SHANG M. Lie symmetries and conserved quantities of Birkhoffian system［J］. Mechanics Research Communications，1999，26(1)：7－12.

［26］ 许学军，梅凤翔，秦茂昌. 有多余坐标的完整系统形式不变性导致的新守恒量［J］. 力学季刊，2004，25(2)：286－290.
XU X J，MEI F X，QIN M C. A new conserved quantity constructed by form invariance for holonomic systems with redundant coordinates［J］. Chinese Quarterly of Mechanics，2004，25(2)：286－290.（in Chinese）

［27］ 梅凤翔. 有多余坐标完整系统的 Hojman 守恒量［J］. 商丘师范学院学报，2004，20(5)：1－5.
MEI F X. Hojman conserved quantity for holonomic systems with redundant coordinates［J］. Journal of Shangqiu Teachers College，2004，20(5)：1－5.（in Chinese）

［28］ 陈菊，郭永新，梅凤翔. 有多余坐标的可控完整力学系统的自由运动与初始运动［J］. 动力学与控制

学报，2019，17(5)：408－412.
CHEN J，GUO Y X，MEI F X. Free motion and initial motion of controllable holonomic system with redundant coordinates [J]. Journal of Dynamics and Control，2019，17(5)：408－412.（in Chinese）

[29] 朱琳，张毅. 一类二阶非标准广义力学的正则变换和第一积分[J]. 动力学与控制学报，2024，22(4)：16－22.
ZHU L，ZHANG Y. Canonical transformations and first integrals of a class of second-order non-standard generalized mechanics [J]. Journal of Dynamics and Control，2024，22(4)：16－22.（in Chinese）

[30] 黄丽琴，张毅. 二阶非完整系统 Vacco 动力学的 Herglotz 型 Noether 定理[J]. 动力学与控制学报，2024，22(9)：16－23.
HUANG L Q，ZHANG Y. Herglotz-type Noether theorem for Vacco dynamics of second-order nonholonomic systems [J]. Journal of Dynamics and Control，2024，22(9)：16－23.（in Chinese）

[31] Olver P J. Applications of Lie groups to differential equations [M]. 2nd ed. New York：Springer，2000.

[32] ZHANG Y，ZHOU X P. Noether theorem and its inverse for nonlinear dynamical systems with nonstandard Lagrangians [J]. Nonlinear Dynamics，2024，84：1867－1876.

[33] ZHAO Y Y，MEI F X. On symmetries and invariants of dynamical systems [J]. Advances in Mechanical Engineering，1993，23(3)，360－372.

[34] GUO Y X，SHANG M，MEI F. Poincare-Cartan integral invariants of nonconservative dynamical systems [J]. International Journal of Theoretical Physics，2007，38：1017－1027.

[35] MARSDEN J E，MONTGOMERY R，RATIU T. Reduction，symmetry，and phases in mechanics [J]. Memoirs of the American Mathematical Society，1990，88(436).

[36] BLOCH A M，KRISHNAPRASAD P S，MARSDEN J E，et al. Nonholonomic mechanical systems with symmetry [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis，1996，136(1)：21－99.

[37] SHI D H，BERCHENKO-KOGAN Y，ZENKOV D V，et al. Hamel's formalism for infinite-dimensional mechanical systems [J]. Journal of Nonlinear Science，2017，27(1)：241－283.

[38] ZENKOV D V，LEOK M，BLOCH A M. Hamel's formalism and variational integrators on a sphere [C]//2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). New York：IEEE，2012.