

高速星型增速齿轮箱非线性动力学特性分析^{*}

杜进辅[†] 姜正波 郑嘉豪

(西安理工大学 机械与精密仪器工程学院,西安 710048)

摘要 为探究宽频激励下星型齿轮传动系统的非线性动力学特性,引入时变啮合刚度,综合啮合误差、齿面摩擦和齿侧间隙等因素,建立了考虑陀螺效应的高速星型齿轮传动非线性动力学分析模型,利用 Runge-Kutta 法进行求解,获得星型齿轮传动系统的非线性动力学响应,进一步得到宽频激励下系统的啮合阻尼比分岔图,通过时域图、分岔图、相图等对系统的非线性动力学特性进行研究,并通过振动试验对本文动力学模型的准确性进行验证. 研究表明:高转速会使系统的周期区间减小,混沌区间加长,振动幅度变大.

关键词 星型齿轮传动, 非线性动力学, 高速, 分岔, 混沌

中图分类号:TH132.4

文献标志码:A

Analysis of Nonlinear Dynamic Characteristics of a High-Speed Star Gearbox^{*}

Du Jinfu[†] Jiang Zhengbo Zheng Jiahao

(School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract In order to investigate the nonlinear dynamic characteristics of the star gear transmission system under wide-frequency excitation, the time-varying mesh stiffness is introduced, and the nonlinear dynamic analysis model of high-speed star gear transmission considering the gyroscopic effect is established by combining the mesh error, tooth surface friction, gear backlash, etc. The nonlinear dynamic response of the star gear transmission system is obtained by solving the problem using the Runge-Kutta method, and the nonlinear dynamic response of the star gear transmission system is further obtained by the bifurcation diagram of the mesh damping ratio of the system under wide-frequency excitation. The nonlinear dynamic response of the star gear transmission system is obtained by using the Runge-Kutta method, and furthermore, the bifurcation diagram of the meshing damping ratio of the system under the excitation is obtained. The results show that the high rotational speed will make the system's period interval decrease, the chaos interval lengthen, and the vibration amplitude become larger.

Key words star gear drive, nonlinear dynamics, high-speed, bifurcation, chaos

引言

星型齿轮传动系统属于定轴多分支功率分汇

流齿轮传动,具有结构紧凑、功率密度高以及高可靠性等优点,被广泛应用于航空、风电等领域及各类高速、超高速实验装置中. 高速化趋势下,星型齿

2025-03-04 收到第 1 稿,2025-05-23 收到修改稿.

^{*} 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2025JCYBMS602, 2025JCYBMS088),陕西省教育厅科学研究计划项目(24JY125); Natural Science Basic Research Program of Shaanxi (2025JCYBMS602, 2025JCYBMS088), Scientific Research Project of Shaanxi Provincial Education Department (24JY125).

[†] 通信作者 E-mail:dujinfu@xaut.edu.cn

轮传动的工作转速也日益增高,受各种激励因素影响,系统更易进入不稳定运动状态.有必要进一步研究星型齿轮传动系统的非线性特性及宽频激励下各参数对系统稳定性的影响规律.

围绕不同激励因素对齿轮系统非线性的影响规律,国内外学者做了大量卓有成效的工作.蒋强等^[1-4]综合考虑了时变啮合刚度、齿侧间隙、综合误差等因素对单级齿轮传动系统非线性的影响规律.鲍和云等^[5]建立了两级星型齿轮传动系统的纯扭转动力学模型,分析了两级星型齿轮传动系统的非线性动态特性,但是并没有考虑各齿轮径向与轴向的振动特性.王靖岳等^[6-7]在此基础上提出多级齿轮传动系统的非线性动力学模型,该模型不仅考虑了齿轮副之间时变啮合刚度、综合啮合误差和齿隙,齿轮之间的连接耦合刚度,还研究了系统在分岔参数变化(包括激励频率)下的稳定性.徐凡等^[8]则建立了含摩擦的风电齿轮传动系统的非线性动力学模型,探究了摩擦对系统分岔特性、周期运动状态以及混沌运动状态的影响.莫帅等^[9,10]综合考虑了时变啮合刚度、齿侧间隙、综合啮合误差及齿面摩擦等因素,建立了多级齿轮传动系统动力学模型,并搭建测试平台验证模型,但未对实验与仿真结果的频率成分进行对比分析.伍晓龙等^[11]探究了激励频率对传动系统复杂动力学特性的影响规律,但未考虑高频激励引发的非线性动力学问题.针对星型增速齿轮传动,尤其线速度 30 m/s 以上的高速齿轮箱非线性动力学,则鲜有相关文献.

为此本文以某高速试验台用星型增速齿轮箱为研究对象,拟通过分岔图、庞加莱截面图、相图和 FFT 频谱图等工具,探明含高、中、低速的宽频激励下,星型齿轮传动系统的非线性动力学特性,并对实验与仿真结果的频率响应进行对比分析,以期该类齿轮传动的故障机制研究、结构设计和更优工况的选择提供理论指导.

1 系统动力学模型

1.1 系统非线性动力学分析模型

如图 1 所示是两级外啮合星型增速齿轮传动系统简图.输入功率经第一级太阳轮 S_1 分别流给三个星轮 P_1 ,又经过三个二级星轮 P_2 汇流到太阳轮 S_2 输出.系统弯-扭-轴动力学分析模型如图

2 所示,其中 K_{m1} 和 K_{m2} 分别代表输入级和输出级中心轮与星轮之间的啮合刚度, C_{m1} 和 C_{m2} 分别代表输入级和输出级传动的啮合阻尼, K_{rn} 和 K_{an} 分别表示齿轮 n 的径向和轴向的支撑刚度($n = S_1, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, S_2$), C_{rn} 和 C_{an} 分别表示齿轮 n 的径向和轴向的支撑阻尼($n = S_1, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, S_2$), K_a 和 C_a 分别表示星轮轴的扭转刚度和阻尼.

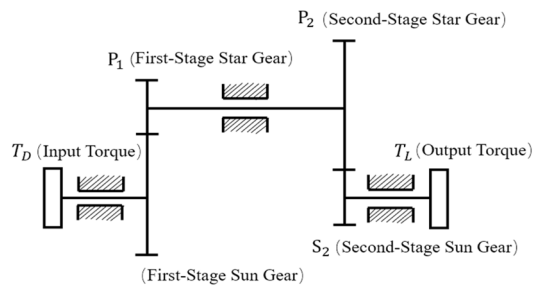


图 1 星型齿轮传动系统简图
Fig. 1 Sketch of the star gearing system

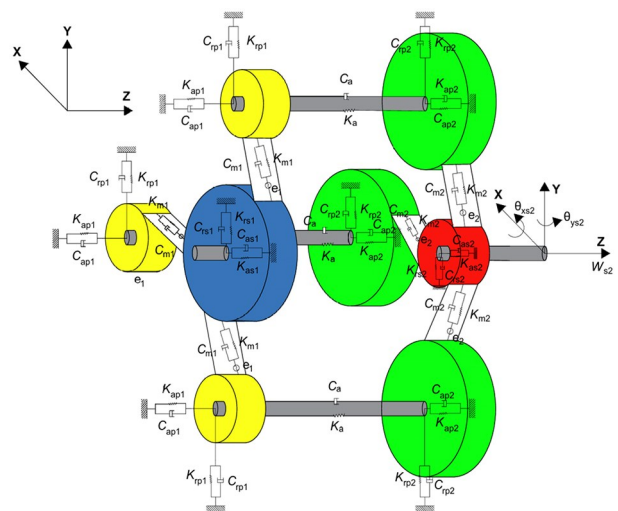


图 2 星型齿轮传动系统的弯-扭-轴动力学模型
Fig. 2 Bend-Twist axis dynamics model of star gearing system

1.2 激励计算

由于斜齿轮轮齿交替时较为规律,其时变啮合刚度类似于简谐函数,故采用 1 阶谐波函数进行简化,可表示为:

$$k(t) = k_m + k_a \cos(\omega_m t) \quad (1)$$

式中, k_a 为啮合刚度的波动幅值,其中 $k_a/k_m = s$, s 为时变啮合刚度系数.

由于齿轮在实际传动中并非完全按照设计运行,制造装配误差会使实际相对啮合位移与理论相对啮合位移产生偏差.将啮合副构件的各类误差表达为啮合线上的等效位移并进行叠加,以综合啮合误差表示为:

$$e_j(t) = e_a \sin(\omega_m t + \varphi_0) \quad (2)$$

式中, e_a 为误差幅值, ω_m 为啮合频率, φ_0 为综合啮合误差初始相位。

在实际工况下, 齿轮制造, 安装误差和磨损因素的存在会产生齿侧间隙。齿侧间隙是影响较大的非线性因素, 故齿轮副的啮合力与啮合位移不能简单地线性表示。轮齿发生的弹性变形可用分段函数表示为:

$$f(x_i) = \begin{cases} x_i - b & x_i > b \\ 0 & |x_i| \leq b \\ x_i + b & x_i < -b \end{cases} \quad (3)$$

式中, b 为齿轮副中齿侧间隙值的一半。

在齿轮啮合过程中, 每一对齿都经历从啮入到啮出的过程, 故摩擦力方向会发生变化。根据库仑定律, 齿轮副的齿面摩擦力作为重要的非线性因素, 可表示为

$$F_f = \text{sign}(v) \mu F \quad (4)$$

式中, μ 为两啮合齿面之间的摩擦系数, F_f 为齿轮副之间每个齿轮受到的啮合力, v 为齿面相对滑动太阳轮 S_1

$$\begin{cases} M_{s1} \ddot{x}_{s1} + C_{rs1} \dot{x}_{s1} + K_{rs1} x_{s1} + \sum_{i=1}^3 [K_{m1} f(\delta_{1i}) + C_{m1} \dot{\delta}_{1i}] \cos\beta \cos A_i + F_{f1} \sin A_i = 0 \\ M_{s1} \ddot{y}_{s1} + C_{rs1} \dot{y}_{s1} + K_{rs1} y_{s1} + \sum_{i=1}^3 [K_{m1} f(\delta_{1i}) + C_{m1} \dot{\delta}_{1i}] \cos\beta \sin A_i + F_{f1} \cos A_i = 0 \\ M_{s1} \ddot{z}_{s1} + C_{as1} \dot{z}_{s1} + K_{as1} z_{s1} - \sum_{i=1}^3 [K_{m1} f(\delta_{1i}) + C_{m1} \dot{\delta}_{1i}] \sin\beta = 0 \\ I_{s1} \ddot{\theta}_{s1} + r_{bs1} \sum_{i=1}^3 [K_{m1} f(\delta_{1i}) + C_{m1} \dot{\delta}_{1i}] \cos\beta + F_{f1} s_1 = T_{in} \end{cases} \quad (8)$$

星轮 P_1

$$\begin{cases} M_{p1i} \ddot{x}_{p1i} + C_{rp1} \dot{x}_{p1i} + K_{rp1} x_{p1i} - [K_{m1} f(\delta_{1i}) + C_{m1} \dot{\delta}_{1i}] \cos\beta \cos A_i - F_{f1} \sin A_i = 0 \\ M_{p1i} \ddot{y}_{p1i} + C_{rp1} \dot{y}_{p1i} + K_{rp1} y_{p1i} - [K_{m1} f(\delta_{1i}) + C_{m1} \dot{\delta}_{1i}] \cos\beta \sin A_i - F_{f1} \cos A_i = 0 \\ M_{p1i} \ddot{z}_{p1i} + C_{ap1} \dot{z}_{p1i} + K_{ap1} z_{p1i} + [K_{m1} f(\delta_{1i}) + C_{m1} \dot{\delta}_{1i}] \sin\beta = 0 \\ I_{p1i} \ddot{\theta}_{p1i} - r_{bp1} [K_{m1} f(\delta_{1i}) + C_{m1} \dot{\delta}_{1i}] \cos\beta + K_a (\theta_{p1i} - \theta_{p2i}) + C_a (\dot{\theta}_{p1i} - \dot{\theta}_{p2i}) - F_{f1} s_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

星轮 P_2

$$\begin{cases} M_{p2i} \ddot{x}_{p2i} + C_{rp2} \dot{x}_{p2i} + K_{rp2} x_{p2i} + [K_{m2} f(\delta_{2i}) + C_{m2} \dot{\delta}_{2i}] \cos\beta \cos B_i + F_{f2} \sin B_i = 0 \\ M_{p2i} \ddot{y}_{p2i} + C_{rp2} \dot{y}_{p2i} + K_{rp2} y_{p2i} + [K_{m2} f(\delta_{2i}) + C_{m2} \dot{\delta}_{2i}] \cos\beta \sin B_i + F_{f2} \cos B_i = 0 \\ M_{p2i} \ddot{z}_{p2i} + C_{ap2} \dot{z}_{p2i} + K_{ap2} z_{p2i} - [K_{m2} f(\delta_{2i}) + C_{m2} \dot{\delta}_{2i}] \sin\beta = 0 \\ I_{p2i} \ddot{\theta}_{p2i} + r_{bp2} [K_{m2} f(\delta_{2i}) + C_{m2} \dot{\delta}_{2i}] \cos\beta - K_a (\theta_{p1i} - \theta_{p2i}) - C_a (\dot{\theta}_{p1i} - \dot{\theta}_{p2i}) + F_{f2} s_3 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

太阳轮 S_2

速度。

$$v = \omega_1 s_1 - \omega_2 s_2 \quad (5)$$

其中, ω_1, ω_2 分别为两啮合齿轮的角速度, 摩擦臂 s_1, s_2 , 可按如下公式计算获得:

$$s_1 = (r_{b1} + r_{b2}) \tan\alpha_t - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} + \omega_1 r_{b1} t \quad (6)$$

$$s_2 = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} + \omega_1 r_{b1} t \quad (7)$$

其中, r_{a2} 为斜齿轮齿顶圆半径, r_{b2} 为斜齿轮基圆半径, α_t 为斜齿轮端面压力角。

1.3 系统运动微分方程

星型齿轮系统中各齿轮具有沿回转轴线的角位移运动、分解在齿轮径向平面内相互垂直方向的平移运动以及沿齿轮轴线方向的平移运动。由于系统输出级中心轮所在轴的回转半径较小、弯曲刚度小、转速较高, 故需考虑输出级中心轮的陀螺效应。该系统共有 34 个自由度, 记为 $\{\theta_n, \theta_{xs2}, \theta_{ys2}, x_n, y_n, z_n\}$ ($n = S_1, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, S_2$), 最终建立如下动力学微分方程:

$$\begin{cases}
 M_{s2} \ddot{x}_{s2} + C_{rs2} \dot{x}_{s2} + K_{rs2} x_{s2} + k_{frs2} \theta_{ys2} - \cos\beta \sum_{i=1}^3 [K_{m2} f(\delta_{2i}) + C_{m2} \dot{\delta}_{2i}] \cos B_i - F_{f2} \sin B_i = 0 \\
 M_{s2} \ddot{y}_{s2} + C_{rs2} \dot{y}_{s2} + K_{rs2} y_{s2} - k_{frs2} \theta_{xs2} - \cos\beta \sum_{i=1}^3 [K_{m2} f(\delta_{2i}) + C_{m2} \dot{\delta}_{2i}] \sin B_i - F_{f2} \cos B_i = 0 \\
 M_{s2} \ddot{z}_{s2} + C_{as2} \dot{z}_{s2} + K_{as2} z_{s2} - \sin\beta \sum_{i=1}^3 [K_{m2} f(\delta_{2i}) + C_{m2} \dot{\delta}_{2i}] = 0 \\
 J_{ds2} \ddot{\theta}_{xs2} + J_{ps2} \omega_{s2} \dot{\theta}_{ys2} + k_{ffs2} \theta_{xs2} - k_{frs2} y_{s2} + r_{bs2} \sin\beta \sum_{i=1}^3 [K_{m2} f(\delta_{2i}) + C_{m2} \dot{\delta}_{2i}] \sin\phi_i = 0 \\
 J_{ds2} \ddot{\theta}_{ys2} - J_{ps2} \omega_{s2} \dot{\theta}_{xs2} + k_{ffs2} \theta_{ys2} + k_{frs2} x_{s2} - r_{bs2} \sin\beta \sum_{i=1}^3 [K_{m2} f(\delta_{2i}) + C_{m2} \dot{\delta}_{2i}] \cos\phi_i = 0 \\
 J_{ps2} \ddot{\theta}_{zs2} - r_{bs2} \cos\beta \sum_{i=1}^3 [K_{m2} f(\delta_{2i}) + C_{m2} \dot{\delta}_{2i}] - F_{f2} s_4 = -T_{out}
 \end{cases} \quad (11)$$

式中, m_n 、 I_n 分别表示各齿轮的质量和转动惯量, J_{ps2} 为输出级太阳轮的转动惯量, 其中 F_{f1} 和 F_{f2} 为齿面摩擦力, s_1 、 s_2 、 s_3 、 s_4 为摩擦力矩, k_{frs2} 为输出轴的支撑刚度系数, k_{ffs2} 为弯曲刚度系数, T_{in} 、 T_{out} 分别为输入扭矩和输出扭矩, r_{bn} 为各齿轮基圆半径; φ_i ($i=1,2,3$) 为各星轮相对中心轮的位置角, A_i 表示输入级第 i 分支的啮合线相对于太阳轮 s_1 的方向角, B_i 表示输出级第 i 分支的啮合线相对于太阳轮 s_2 的方向角, J_{ds2} 为输出级太阳轮的赤道转动惯量, β 为齿轮螺旋角。

由于系统在扭转方向上的位移没有约束, 针对式(8)~(11)组成的星型齿轮传动系统的动力学微分方程组是不可求解的半正定方程组, 利用相对位移的公式, 即可使方程组正定, 能够求解, 从而达到消除刚体位移的目的。

第一级太阳轮与星轮啮合线 1 的相对位移:

$$\begin{aligned}
 \delta_{1i} = & (r_{bs1} \theta_{s1} - r_{bpl} \theta_{pli}) \cos\beta + (x_{s1} - \\
 & x_{pli}) \cos A_i \cos\beta + (y_{s1} - y_{pli}) \sin A_i \cos\beta - \\
 & (z_{s1} - z_{pli}) \sin\beta - e_{1i} \quad (12)
 \end{aligned}$$

第二级太阳轮与星轮啮合线 2 的相对位移:

无量纲化后第一级太阳轮与星轮啮合线 1 的相对位移:

$$\begin{aligned}
 \bar{\delta}_{1i} = & [(\bar{x}_{s1} - \bar{x}_{pli}) \cos A_i + (\bar{y}_{s1} - \bar{y}_{pli}) \sin A_i] \cos\beta - (\bar{z}_{s1} - \bar{z}_{pli}) \sin\beta + \frac{T_{in} r_{bs1}}{\omega_e^2 b_c I_{s1}} \cos\beta - \\
 & \frac{r_{bs1}^2 \cos^2 \beta}{\omega_e^2 I_{s1}} \sum_{i=1}^3 [K_{m1} f(\bar{\delta}_{1i})] - \frac{r_{bs1}^2 \cos^2 \beta}{\omega_e I_{s1}} \sum_{i=1}^3 (C_{m1} \dot{\bar{\delta}}_{1i}) + \frac{F_{f1} s_1 r_{bs1}}{\omega_e^2 I_{s1}} \cos\beta - \frac{r_{bpl}^2 \cos^2 \beta}{\omega_e^2 I_{pli}} [K_{m1} f(\bar{\delta}_{1i})] - \\
 & \frac{r_{bpl}^2 \cos^2 \beta}{\omega_e I_{pli}} (C_{m1} \dot{\bar{\delta}}_{1i}) - \frac{F_{f1} s_2 r_{bpl}}{\omega_e^2 I_{pli}} \cos\beta + K_a \frac{(\bar{\theta}_{pli} - \bar{\theta}_{p2i}) r_{bpl}}{\omega_e^2 I_{pli}} \cos\beta + C_a \frac{(\dot{\bar{\theta}}_{pli} - \dot{\bar{\theta}}_{p2i}) r_{bpl}}{\omega_e^2 I_{pli}} \cos\beta - \bar{e}_{1i}
 \end{aligned} \quad (17)$$

无量纲化后第二级太阳轮与星轮啮合线 2 的相对位移:

$$\begin{aligned}
 \delta_{2i} = & (r_{bp2} \theta_{p2i} - r_{bs2} \theta_{s2}) \cos\beta + (x_{p2i} - \\
 & x_{s2}) \cos B_i \cos\beta + (y_{p2i} - y_{s2}) \sin B_i \cos\beta - \\
 & (z_{p2i} - z_{s2}) \sin\beta - e_{2i} \quad (13)
 \end{aligned}$$

为提高计算效率, 避免收敛缓慢和求解精度下降等问题, 对动力学微分方程进行无量纲化。

定义时间尺度参考值 $\tau = \omega_n \cdot t$, 并引入位移标称尺度 b_c 。其中 ω_n 为特征频率, $\omega_n = \sqrt{k_m / [(m_{s1} m_{p1}) / (m_{s1} + m_{p1})]}$, k_m 为齿轮副的平均啮合刚度。无量纲位移、速度、加速度可以表示为: $X = \bar{X} b_c$, $\dot{X} = \dot{\bar{X}} \omega_n b_c$, $\ddot{X} = \ddot{\bar{X}} \omega_n^2 b_c$, 引入激励频率 $\omega_e = \omega_m / \omega_n$ 对时变啮合刚度、综合啮合误差进行无量纲处理, 具体表达式为:

$$f(\bar{x}_i) = \begin{cases} \bar{x}_i - \bar{b} & \bar{x}_i > \bar{b} \\ 0 & |\bar{x}_i| \leq \bar{b} \\ \bar{x}_i + \bar{b} & \bar{x}_i < -\bar{b} \end{cases} \quad (14)$$

$$\bar{e}_j = f_e \sin(\omega_e \tau + \varphi_0) \quad (15)$$

$$\bar{k}_j = k_m [1 + s \cdot \cos(\omega_e \tau + \varphi_0)] \quad (16)$$

式中, f_e 为啮合误差幅值, $f_e = e_a / b_c$ 。

$$\ddot{\sigma}_{2i} = [(\ddot{x}_{p2i} - \ddot{x}_{s2})\cos B_i + (\ddot{y}_{p2i} - \ddot{y}_{s2})\sin B_i]\cos\beta - (\ddot{z}_{p2i} - \ddot{z}_{s2})\sin\beta + \frac{T_{out}r_{bs2}}{\omega_e^2 b_c J_{ps2}}\cos\beta - \frac{r_{bs2}^2 \cos^2\beta}{\omega_e^2 J_{ps2}} \sum_{i=1}^3 [K_{m2} f(\bar{\delta}_{2i})] - \frac{r_{bs2}^2 \cos^2\beta}{\omega_e J_{ps2}} \sum_{i=1}^3 (C_{m2} \dot{\bar{\delta}}_{2i}) + \frac{F_{f2} s_4 r_{bs2}}{\omega_e^2 J_{ps2}} \cos\beta - \frac{r_{bp2}^2 \cos^2\beta}{\omega_e^2 I_{p2i}} [K_{m2} f(\bar{\delta}_{2i})] - \frac{r_{bp2}^2 \cos^2\beta}{\omega_e I_{p2i}} (C_{m2} \dot{\bar{\delta}}_{2i}) - \frac{F_{f2} s_3 r_{bp2}}{\omega_e^2 I_{p2i}} \cos\beta + K_a \frac{(\bar{\theta}_{p1i} - \bar{\theta}_{p2i}) r_{bp2}}{\omega_e^2 I_{p2i}} \cos\beta + C_a \frac{(\dot{\theta}_{p1i} - \dot{\theta}_{p2i}) r_{bp2}}{\omega_e^2 I_{p2i}} \cos\beta - \ddot{e}_{2i}$$

3 系统非线性动力学特性

在已建立模型的基础上,本文采用变步长4阶Runge-Kutta法求解动力学微分方程,得到在宽频激励下,星型齿轮传动系统的非线性特性.星型增速齿轮箱主要参数如表1所示.

表1 星型齿轮参数
Table 1 Parameters of the star gear

System parameter	S ₁	P ₁	P ₂	S ₂
Modulus /mm	1.5	1.5	1.5	1.5
Tooth number z _i	60	27	66	21
Pressure angle α _i /(°)20	20	20	20	20
Helix angle β/(°)	12.36	12.36	12.36	12.36
Hand of helix	Left-hand	Right-hand	Left-hand	Right-hand
Moment of inertia I/(kg·m ²)	1e-3	4.15e-5	1.5e-3	1.52e-5

3.1 不同转速工况下啮合阻尼对系统振动响应的影响

图3为输出转速20000 r/min时星型齿轮传动系统随啮合阻尼比变化的分岔图.由图可知,当ξ∈(0.02,0.14)时,系统处于混沌响应;当ξ∈(0.14,0.148)时,系统处于多周期响应;当ξ∈(0.148,0.16)时,系统处于混沌响应;当ξ∈(0.16,0.22)时,系统处于三倍周期响应.

图4为ξ=0.05时系统的混沌响应.此时相图呈现多线条的无规则绕圈,与此相对应的庞加莱截

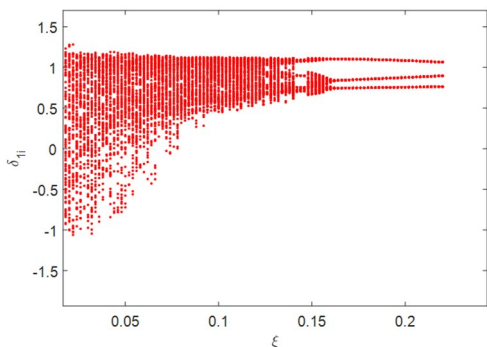


图3 输出转速n₀=20000 r/min时啮合阻尼比的分岔图
Fig. 3 Bifurcation of meshing damping ratio at output

speed n₀=20000 r/min
面图表现为一系列离散点集.频谱图中以啮合频率为主,但也有较为丰富的低频部分.图5为ξ=0.2时系统的三倍响应,相图表现为在相空间上绕三圈的光滑圆环,庞加莱截面上出现三个点集,时域图处于周期状态并表现出三个幅值.频谱图中出现1/2次谐波及其整数倍阶谐波,但仍以啮合频率为主.

图6为输出转速为10000 r/min时星型齿轮传动系统随啮合阻尼比变化的分岔图.由图可知,

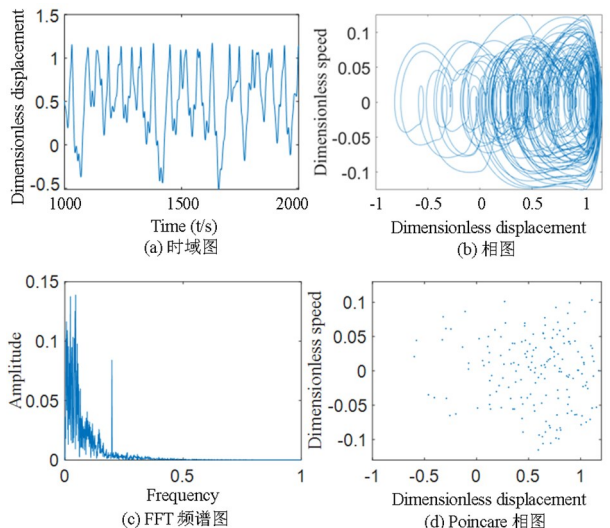


图4 ξ=0.05时系统的非线性响应
Fig. 4 Nonlinear response of the system at ξ=0.05

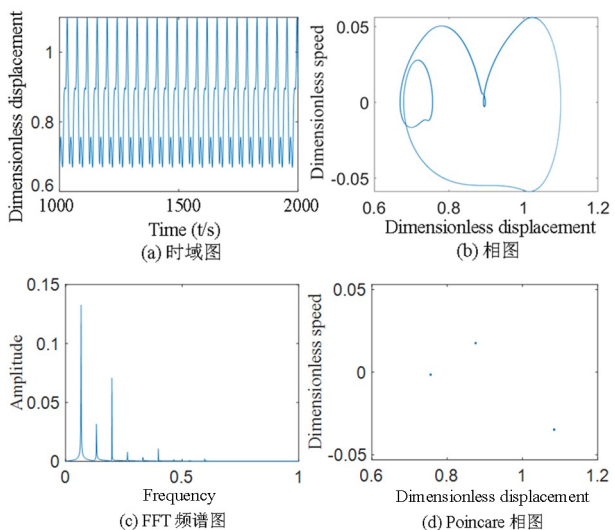


图5 ξ=0.2时系统的非线性响应
Fig. 5 Nonlinear response of the system at ξ=0.2

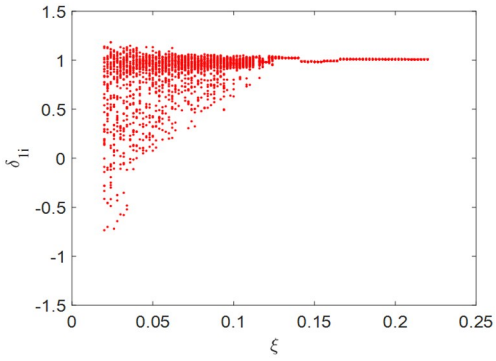


图 6 输出转速 $n_0=10\ 000\ \text{r/min}$ 时啮合阻尼比的分岔图
Fig. 6 Bifurcation of meshing damping ratio at output speed $n_0=10\ 000\ \text{r/min}$

当 $\xi \in (0.02, 0.124)$ 时,系统处于混沌响应;当 $\xi \in (0.124, 0.13)$ 时,系统处于拟周期响应;当 $\xi \in (0.13, 0.2)$ 时,系统处于单周期响应。

图 7 为 $\xi=0.08$ 时系统的混沌响应。相图中,由于含有混沌吸引子,使得相轨迹杂乱无章,庞加莱截面表现为离散的一系列点集,频谱图中以啮合频率为主,但也有较为丰富的低频部分。图 8 为 $\xi=0.2$ 时的仿真结果,相图是由相轨线组成的不规则闭合图形,从时域图可以看出,系统每重复一次运动需 1 个周期时间,频谱图中系统响应谱线分布在频率比上,表明系统响应存在亚谐成分,庞加莱截面由一个点集组成,因此可以确定系统处于单周期运动状态。

图 9 为输出转速为 5000 r/min 时星型齿轮传动系统随啮合阻尼比变化的分岔图。由图可知,当 $\xi \in (0.002, 0.004)$ 时,系统处于混沌响应;当 $\xi \in (0.004, 0.2)$ 时,系统处于单周期响应。

图 10 为 $\xi=0.002$ 时系统的混沌响应。相图中,

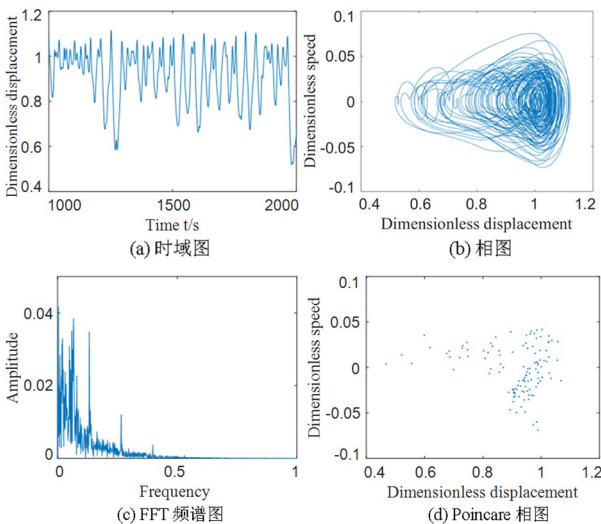


图 7 $\xi=0.08$ 时系统的非线性响应
Fig. 7 Nonlinear response of the system at $\xi=0.08$

由于含有混沌吸引子,使得相轨迹杂乱无章,庞加莱截面表现为离散的一系列点集,频谱图呈现连续分布。图 11 为 $\xi=0.2$ 系统的单周期响应,相图表现为光滑闭合曲线,庞加莱截面由一个点集组成,时域图呈现明显的周期性,频谱图呈现离散分布。

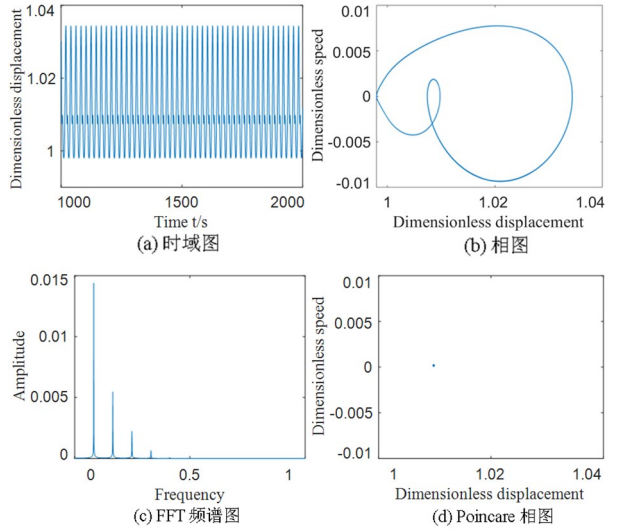


图 8 $\xi=0.2$ 时系统的非线性响应
Fig. 8 Nonlinear response of the system at $\xi=0.2$

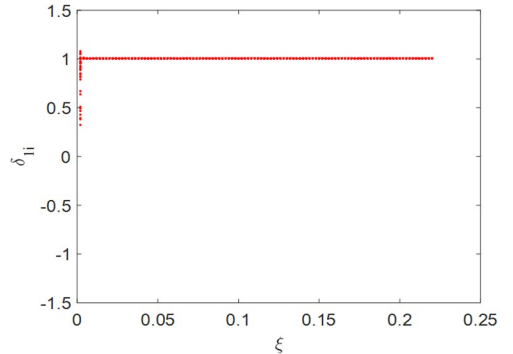


图 9 输出转速 $n_0=5000\ \text{r/min}$ 时啮合阻尼比的分岔图
Fig. 9 Bifurcation of meshing damping ratio at output speed $n_0=5000\ \text{r/min}$

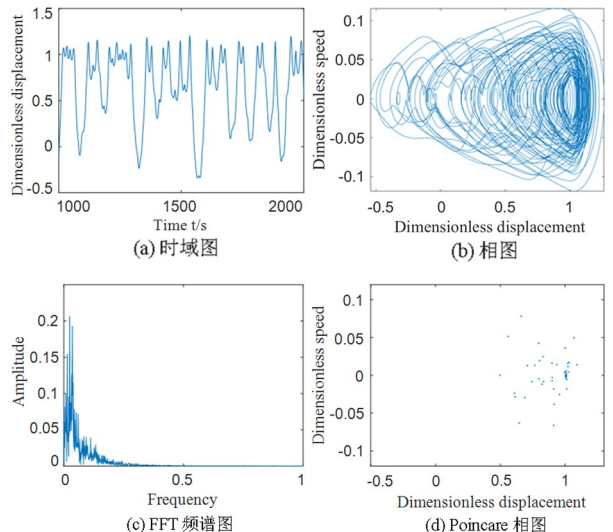


图 10 $\xi=0.002$ 时系统的非线性响应
Fig. 10 Nonlinear response of the system at $\xi=0.002$

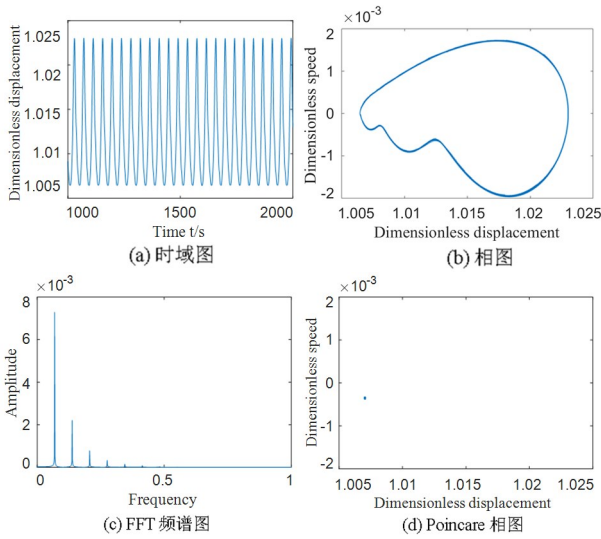


图 11 $\xi=0.2$ 时系统的非线性响应
Fig. 11 Nonlinear response of the system at $\xi=0.2$

图 12 为输出转速为 1000 r/min 时星型齿轮传动系统随啮合阻尼比变化的分岔图. 由图可知, 当 $\xi \in (0.002, 0.01)$ 时, 系统处于混沌响应; 当 $\xi \in (0.01, 0.2)$ 时, 系统处于单周期响应.

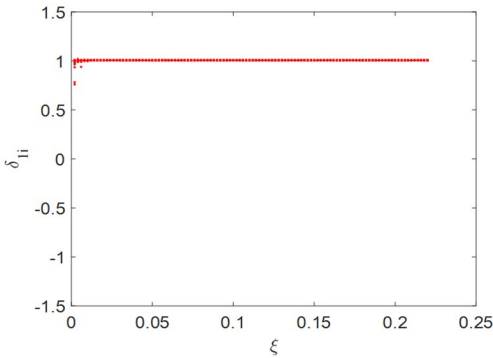


图 12 输出转速 $n_0=1000$ r/min 时啮合阻尼比的分岔图
Fig. 12 Bifurcation of meshing damping ratio at output speed $n_0=1000$ r/min

图 13 为 $\xi=0.002$ 时系统的混沌响应. 相图中, 由于含有混沌吸引子, 使得相轨迹杂乱无章, 庞加莱截面表现为离散的一系列点集, 频谱图呈现连续分布. 图 14 为 $\xi=0.2$ 时系统的单周期响应, 相图表现为闭合的曲线带, 庞加莱截面由一个点集组成, 时域图呈现明显的周期性, 频谱图呈现离散分布.

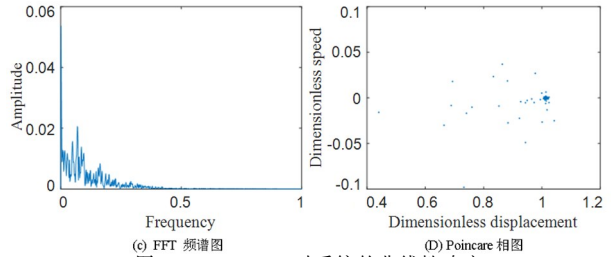
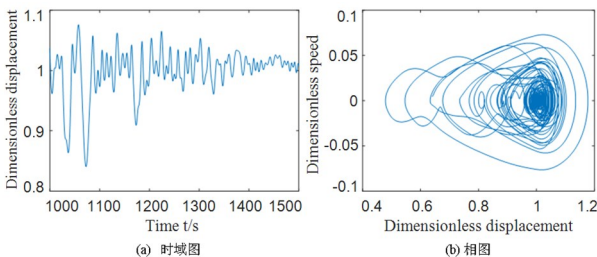


图 13 $\xi=0.002$ 时系统的非线性响应
Fig. 13 Nonlinear response of the system at $\xi=0.002$

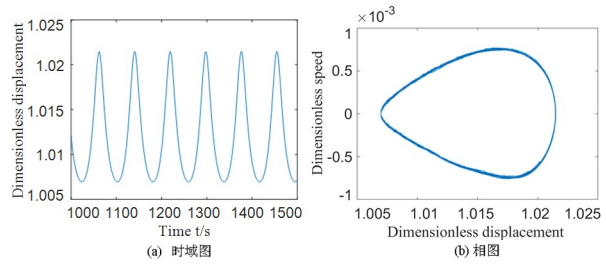


图 14 $\xi=0.2$ 时系统的非线性响应
Fig. 14 Nonlinear response of the system at $\xi=0.2$

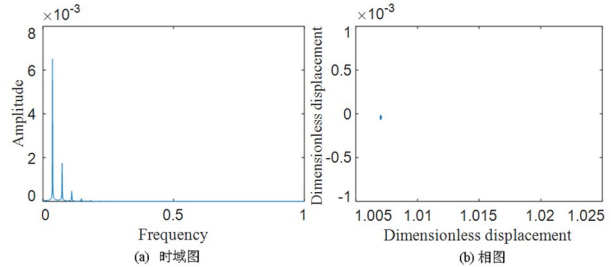


图 14 $\xi=0.2$ 时系统的非线性响应
Fig. 14 Nonlinear response of the system at $\xi=0.2$

从图 3 至图 14 可得, 啮合阻尼比的增大可以抑制系统中混沌的出现. 随着转速的升高, 分岔图的混沌区间加宽, 周期运动区间缩短. 从系统时域图可以得出, 随着系统转速的提高, 系统的振动幅度随转速升高而变大.

3.2 激励频率对系统动态特性的影响

由于高速星型增速齿轮箱与电机直连, 需考虑驱动电机的输出特性, 即额定转速以下恒扭矩输出, 额定转速以上恒功率输出. 本文电机输出功率为 22 kW, 额定扭矩为 143 N·m. 图 15 为啮合线 2

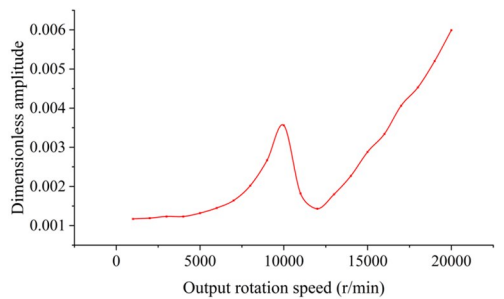


图 15 第二级啮合线振动转速图
Fig. 15 Vibration speed diagram of the second stage of the meshing line

方向的无量纲振幅(相同转速下最大无量纲位移与最小无量纲位移之差)随输出转速变化的关系图. 除去共振峰值区,随着转速的升高(转速低于共振转速)第二级太阳轮与星轮啮合线的振动位移在不断增大;并且当输出转速高于系统共振转速时,随着转速的增加振动位移明显增大. 其中,图 16 为输出转速 n_0 在 1000~20 000 r/min 下第二级太阳轮与星轮啮合线的无量纲位移.

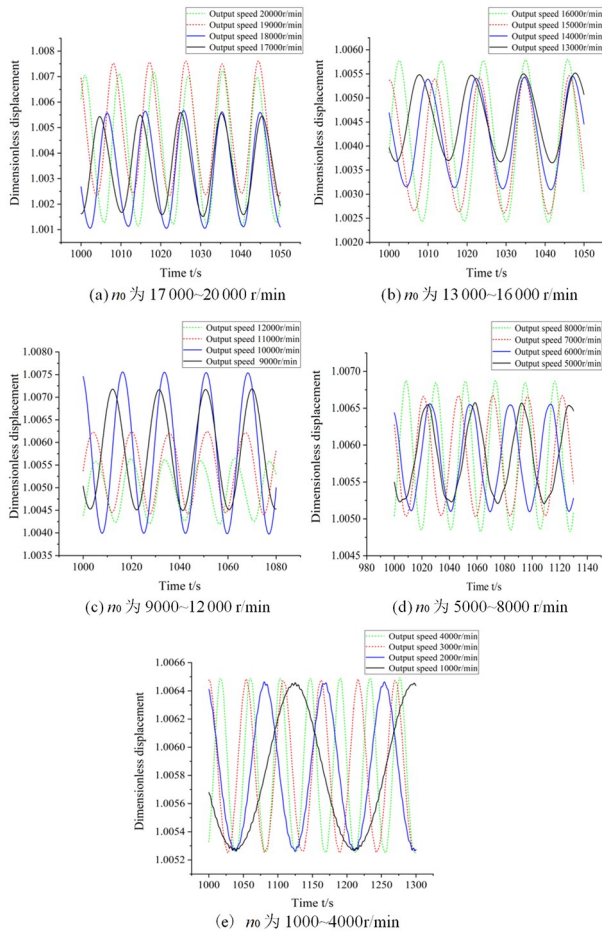


图 16 输出转速 n_0 在 1000~20 000 r/min 的振动位移
Fig. 16 Vibration displacement of output speed n_0 at 1000~20 000 r/min

3.3 齿轮箱振动试验

增速箱振动试验台如图 17 所示,采用三向加速度传感器采集振动信号,加速度传感器布置在星型齿轮增速系统高速输出级,采样频率为 12 000 Hz.

图 18~图 20 为不同转速工况下试验采集信号与仿真结果的频域对比图. 其中, f_d 为输出级中心轮的无量纲转频, f_r 为输出级中心轮无量纲啮合频率. 从图中可以得出,在不同转速工况下试验信号得到的无量纲转频和齿频与仿真结果所得到的无量纲转频和齿频基本吻合,详细对比数据如表

2 所示,验证了本文所动力学模型的正确性.

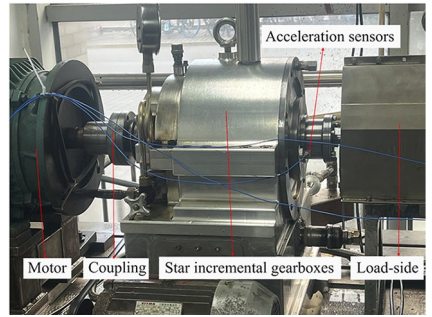


图 17 星型增速齿轮箱振动试验

Fig. 17 Vibration test of star-boosting gearbox

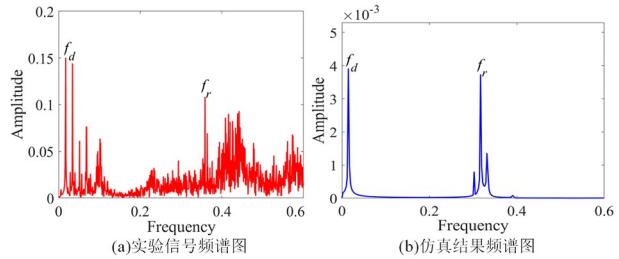


图 18 工况一输出级中心轮的频谱特性

Fig. 18 Spectral characteristics of the central gear of the output stage for Case 1

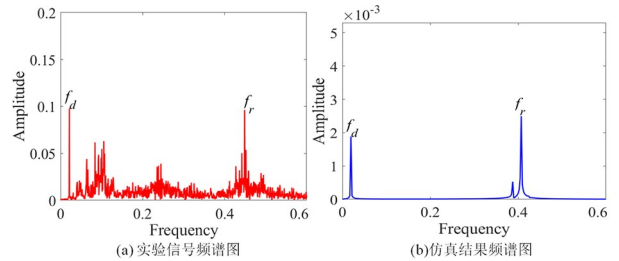


图 19 工况二输出级中心轮的频谱特性

Fig. 19 Spectral characteristics of the central gear of the output stage for Case 2

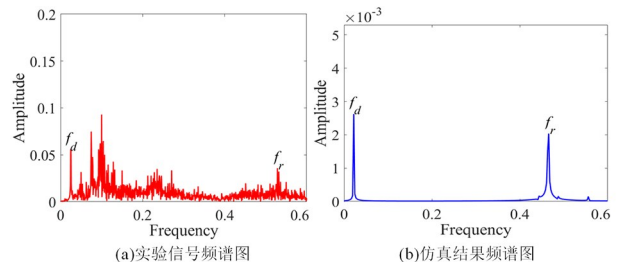


图 20 工况三输出级中心轮的频谱特性

Fig. 20 Spectral characteristics of the central gear of the output stage for Case 3

表 2 不同转速工况下实验与仿真数据

Table 2 Experimental and simulated spectral data under different rotational speed conditions

Working conditions	Test signal spectrum		Spectrogram of simulation results	
	f_r	f_d	f_r	f_d
Working condition 1: Output speed $n_0 = 9009$ r/min	0.017	0.358	0.014	0.317
Working condition 2: Output speed $n_0 = 11 542$ r/min	0.021	0.448	0.019	0.407
Working condition 3: Output speed $n_0 = 13 187$ r/min	0.024	0.352	0.022	0.466

4 结论

通过集中参数法,建立了星型齿轮传动系统的非线性动力学模型,得到了在不同转速工况下系统关于啮合阻尼比的分岔图,并通过时域图、相图、FFT 频谱图和庞加莱截面图分析了系统的运动情况,发现增大系统啮合阻尼比可抑制混沌的出现,使系统的运动周期趋于单一化,运动更加平稳.输出转速的变化并未改变系统由混沌运动状态进入周期运动状态的途径.随着转速增加,系统的混沌区间加宽,会推迟进入稳定的周期运动状态.低转速虽使系统混沌区间缩短,但系统会由周期运动转变为拟周期运动.

参考文献

- [1] 蒋强. 单级齿轮传动系统非线性动力学分析 [J]. 2022(1): 30-33.
JIANG Q. Nonlinear dynamic analysis of single-stage gear transmission system [J]. Gansu Science and Technology, 2022, 51(1): 30-33. (in Chinese)
- [2] 莫帅,曾彦钧,王震,等. 高速重载人字齿轮传动非线性动力学分析[J]. 力学学报, 2023, 55(10): 2381-2392.
MO S, ZENG Y J, WANG Z, et al. Nonlinear dynamic analysis of high-speed heavy-duty herringbone gear transmission[J]. Journal of Mechanics, 2023, 55(10): 2381-2392. (in Chinese)
- [3] 鲍和云,朱如鹏,靳广虎,等. 间隙对两级星型齿轮传动动态特性的影响研究[J]. 机械科学与技术, 2009, 28(1): 102-107.
BAO H Y, ZHU R P, JIN G H, et al. Effect of clearance on dynamic characteristics of two-stage star gear transmission [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2009, 28(1): 102-107. (in Chinese)
- [4] 周杜,乐源,李高磊,等. 两自由度齿轮传动系统全局动力学研究 [J]. 动力学与控制学报, 2019, 17(6): 514-519.
ZHOU D, LE Y, LI G L, et al. Study on global dynamics of a two-degree-of-freedom gear transmission system[J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17(6): 514-519. (in Chinese)
- [5] 朱自冰,朱如鹏,鲍和云. 两级星型齿轮传动系统非线性动力学研究[J]. 航空动力学报, 2007, 23(11): 1963-1970.
ZHU Z B, ZHU R P, BAO H Y. Nonlinear dynamics of two-stage star gear transmission system [J]. Journal of Aerospace Dynamics, 2007, 23(11): 1963-1970. (in Chinese)
- [6] 王靖岳,刘宁,王浩天. 基于最大 Lyapunov 指数的行星齿轮传动系统混沌特性分析[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(1): 29-36.
WANG J Y, LIU N, WANG H T. Chaos Characteristics Analysis of Planetary Gear Transmission System Based on Maximum Lyapunov Index [J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 19(1): 29-36. (in Chinese)
- [7] LIU S X, HU A J, ZHANG Y, et al. Nonlinear dynamics analysis of a multistage planetary gear transmission system [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2022, 32(7): 225-238.
- [8] 徐凡,刘文斌,张海波,等. 含摩擦的风电齿轮传动系统非线性动力学分析[J]. 机械传动, 2023, 47(10): 31-42.
XU F, LIU W B, ZHANG H B, et al. Nonlinear dynamics analysis of wind power gearing system containing friction [J]. Mechanical Transmission, 2023, 47(10): 31-42. (in Chinese)
- [9] 莫帅,柏代鑫,李国正,等. 直升机主减速器传动系统非线性动力学[J/OL]. 振动工程学报, 1-12 [2025-05-28]. <https://link.cnki.net/urlid/32.1349.TB.20250217.0934.002>.
MO S, BO D X, LI G Z, et al. Nonlinear dynamics of helicopter main reduction gear drive system [J/OL]. Journal of Vibration Engineering, 1-12 [2025-05-28]. <https://link.cnki.net/urlid/32.1349.TB.20250217.0934.002>. (in Chinese)
- [10] ZHANG X, ZHONG J, LI W, et al. Nonlinear dynamic analysis of high-speed gear pair with wear fault and tooth contact temperature for a wind turbine gearbox [J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 173(13): 25-43.
- [11] 伍晓龙,杜垚森,高鹏举,等. 激励频率对换挡行星传动系统非线性动力学影响分析[J]. 机械传动, 2024, 48(3): 27-34.
WU X L, DU Y S, GAO P J, et al. Effect of Excitation Frequency on Nonlinear Dynamics of Shifting Planetary Transmission System [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2024, 48(3): 27-34. (in Chinese)