

# 具有非线性耗散项的非对称双稳系统的振动共振研究<sup>\*</sup>

肖玉柱<sup>1</sup> 李佳明<sup>1</sup> 孙中奎<sup>2</sup> 赵楠楠<sup>1†</sup>

(1. 长安大学 理学院, 西安 710064)

(2. 西北工业大学 数学与统计学院, 西安 710129)

**摘要** 振动共振现象在弱信号检测和能量采集等领域具有重要应用价值,然而现有工作多集中于对称双稳系统或线性耗散情形. 为此,本文研究了双频信号驱动下具有非线性耗散项的非对称双稳系统中的振动共振现象. 运用快慢变量分离法得出系统在低频处的响应幅值. 根据响应幅值的解析表达式,研究了双频周期信号的参数、非线性耗散参数和非对称参数对振动共振现象的影响. 结果表明:非线性耗散系数的增大会使系统发生更弱的振动共振现象;在含有非线性耗散项的系统中,非对称参数的变化可以改变振动共振的形态,对称的双稳系统会发生双共振,而非对称的双稳系统发生单共振;非对称参数不影响共振发生的位置,但是能够减弱响应幅值;理论预测与数值模拟结果吻合较好,验证了理论分析的有效性.

**关键词** 振动共振, 双稳系统, 非线性耗散项, 非对称参数

**中图分类号**:O32

**文献标志码**:A

## Vibrational Resonance in an Asymmetric Bistable System with Nonlinear Dissipation<sup>\*</sup>

Xiao Yuzhu<sup>1</sup> Li Jiaming<sup>1</sup> Sun Zhongkui<sup>2</sup> Zhao Nannan<sup>1†</sup>

(1. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

(2. School of Mathematics and Statistics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

**Abstract** The phenomenon of vibrational resonance holds significant application value in weak signal detection and energy harvesting. However, existing studies predominantly focus on symmetric bistable systems or linear dissipation scenarios. To address this gap, this paper investigates vibrational resonance (VR) in an asymmetric bistable system with nonlinear dissipation, driven by biharmonic forces at two different frequencies. The fast and slow variable separation method is applied to derive the response amplitude of the system at low frequencies. Moreover, based on the analytical expression of the response amplitude, the effects of the dual-frequency periodic signal, the nonlinear dissipation and the asymmetric parameter on the VR are investigated. The results indicate that, first, the larger the nonlinear dissipation factor, the weaker the VR of the system occurs. Second, for the systems with nonlinear dissipative term, tuning the asymmetric parameter can change the shape of the VR, that is, the symmetric bistable systems emerge the double resonance, and the asymmetric bistable systems have the single resonance. Third, the asymmetric parameter does not influence the location of the VR, but it can weaken the response amplitude. Finally, the theoretical predictions are in good agreement with the numerical simulation results, verifying the validity of the theoretical analysis.

2024-05-24 收到第 1 稿, 2024-06-19 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(12302033), 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2023-JC-QN-0009), National Natural Science Foundation of China (12302033), Natural Science Basic Research Program of Shaanxi Province (2023-JC-QN-0009).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail: nzhaon@chd.edu.cn

**Key words** vibrational resonance, bistable system, nonlinear dissipation, asymmetric parameter

## 引言

共振作为自然界最重要的现象之一,通常是指外界周期性激励与系统固有频率相匹配时,系统响应幅值明显增大的现象.根据外部驱动力性质和匹配方式,共振会表现出多种形式,如随机共振、参数共振、相干共振、混沌共振和振动共振等<sup>[1-4]</sup>.其中,随机共振是由噪声引起的共振,通过调节噪声强度使待处理信号中的有用信号与噪声产生协同作用,从而放大低频信号<sup>[2,3]</sup>.2000年,Landa和McClintock受随机共振的启发,将随机共振中的噪声替换为高频信号,发现了一种新的动力学现象——振动共振(vibrational resonance,VR)<sup>[5]</sup>.振动共振是指在双频信号激励下,非线性系统在低频信号处的响应幅值随着高频信号的幅值的调节而增大的现象.

继Landa和McClintock<sup>[5]</sup>提出振动共振的定义后,Gitterman等<sup>[6]</sup>用快慢变量分离法给出了振动共振相关原理的证明.2003年,Chizhevsky等<sup>[7]</sup>在双稳态垂直腔激光系统中用实验证明了振动共振现象是真实存在的.特别地,与随机共振相比,振动共振中的高频信号是确定的,更易于控制.因此,振动共振现象在通信工程<sup>[8]</sup>、神经系统科学<sup>[9]</sup>、激光物理<sup>[10]</sup>、声学<sup>[11]</sup>等领域有着十分广泛的应用,同时引起了国内外众多学者的关注.到目前为止,学者们已经在单稳系统<sup>[12]</sup>、双稳系统<sup>[13,14]</sup>、多稳系统<sup>[15]</sup>、时滞系统<sup>[16]</sup>和复杂网络系统<sup>[17]</sup>中研究了双频信号驱动的振动共振.研究结果揭示了高频信号、时滞和非对称性等参数对系统振动共振的诱导和控制.

然而,在非线性系统中研究非线性耗散项(阻尼系数的非线性)对振动共振的影响较少.事实上,许多电气、生物等非线性系统中的非线性可能以多种形式出现,出现较多的是非线性阻尼和耗散项.非线性耗散项会影响系统的动力学行为,比如改变系统平衡点的稳定性,在某些参数体系中系统产生极限环或引起分岔序列、混沌等.此外,具有非线性耗散项的系统对给定激励的响应通常可以近似为等效线性系统的响应,这种非线性系统的“拟线性”模型隐含在许多分析方法中,具有普遍性,在许多工程和生物系统的动态响应的研究工作中有广泛的应用<sup>[18]</sup>.因此研究非线性耗散项对振动共振现

象的影响值得进一步探索.2016年,Roy-Layinde等<sup>[19]</sup>研究了非线性系统中具有非线性耗散项的双流体等离子体模型的振动共振现象,发现随着高频周期信号幅值的增加非线性耗散项会增强响应幅值,并根据有效等离子体势和有效非线性耗散项确定了等离子体模型中振动共振现象的来源.2017年,Roy-Layinde等<sup>[20]</sup>研究了周期势系统中非线性耗散项对振动共振现象的影响.他们发现非线性耗散参数的变化可以增强响应幅值,并且证明了改变耗散项和系统势能两者共有的参数可以诱导振动共振的发生.与上述研究主要关注的对称势系统不同,2021年,Kolebaje等<sup>[21]</sup>研究了非对称Toda系统中非线性耗散项对振动共振现象的影响,发现该系统在恒定耗散项下不发生振动共振,而具有非线性耗散项的非对称Toda系统在高频信号激励下可以发生多次振动共振.因此,考虑非线性耗散项和非对称参数在系统振动共振中的共同作用是有必要的.

鉴于以上分析可知,之前的研究仅在非对称Toda系统中分析非线性耗散项对系统振动共振的影响,其中可积Toda势是极为特殊的非对称单稳势函数,适用范围较小.考虑到非对称双稳系统是一种较为简单的非线性系统,当系统受到信号激励时,双稳系统可以在两个稳态之间切换,有效地吸收和分散振动能量,从而实现对振动共振的有效控制.此外,非对称性的改变会导致系统势阱的变化,改变势阱的深度和最小值的位置,影响振动共振的发生.因此,本文聚焦于非对称双稳系统,将非线性耗散项引入该模型,研究非线性耗散项对非对称双稳系统的振动共振现象的影响.

## 1 模型

本文研究的模型是一个具有非线性耗散项的非对称双稳态系统,其广义无量纲形式为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(x) \frac{dx}{dt} + \frac{dV(x)}{dx} = F \cos \omega t + G \cos \Omega t \quad (1)$$

系统的势函数为

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + rx \quad (2)$$

当非对称参数  $r=0$  时,  $V(x)$  代表一个对称势阱; 当  $r \neq 0$  时,  $V(x)$  代表一个非对称双稳势阱. 图 1 展示了非对称参数  $r$  取不同值时, 势函数  $V(x)$  的图像. 从图中可以看出当  $r$  增加时, 左边的势阱下降, 右边的势阱上升<sup>[13]</sup>.

非线性耗散项  $\gamma(x)$  的形式为

$$\gamma(x) = \epsilon(1 + x^2) \quad (3)$$

其中  $\epsilon$  表示系统的非线性耗散系数.

将方程(2)和(3)代入方程(1), 该系统的运动方程可表示为

$$\ddot{x} + \epsilon(1 + x^2)\dot{x} - x + x^3 + r = F \cos \omega t + G \cos \Omega t \quad (4)$$

在方程(4)中,  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  分别表示系统在时刻  $t$  的空间坐标、摩擦项和惯性项. 此外,  $F \cos \omega t$  为低频信号, 其中  $F$  和  $\omega$  分别为低频信号的幅值和频率;  $G \cos \Omega t$  为高频信号, 其中  $G$  和  $\Omega$  分别为高频信号的幅值和频率, 两个输入信号的频率之间满足关系式  $\omega \ll \Omega$  且低频信号的幅值  $F \ll 1$ .

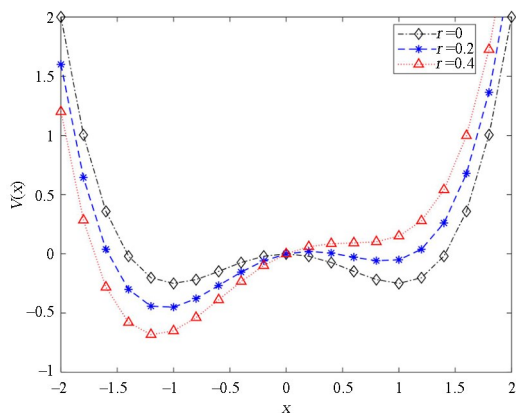


图 1 势函数  $V(x)$  的图像

Fig. 1 Plot of the potential function  $V(x)$

## 2 理论分析

当两种不同信号频率满足条件  $\omega \ll \Omega$  时, 低频信号  $F \cos \omega t$  和 高频信号  $G \cos \Omega t$  具有不同的时间尺度, 所以我们采用快慢变量分离法将系统(4)的解  $x(t)$  看成频率为  $\omega$  的慢运动方程的解  $\chi(t)$  和频率为  $\Omega$  的快运动方程的解  $\psi(t)$  的叠加, 即

$$x(t) = \chi(t) + \psi(t, \tau = \Omega t) \quad (5)$$

其中  $\chi(t)$  是以  $T = 2\pi/\omega$  为周期的慢变量,  $\psi(t)$  是以  $T = 2\pi/\Omega$  为周期的快变量, 且  $\psi(t)$  相对于  $\tau$  的平均值为

$$\langle \psi \rangle = \bar{\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi d\tau = 0 \quad (6)$$

将方程(5)代入方程(4)可得

$$\ddot{\chi} + \ddot{\psi} + \epsilon(1 + \chi^2 + 2\chi\psi + \psi^2)(\dot{\chi} + \dot{\psi}) - \chi - \psi + \chi^3 + \psi^3 + 3\chi^2\psi + 3\chi\psi^2 + r = F \cos \omega t + G \cos \Omega t \quad (7)$$

$\psi(t)$  是快变量的非振荡周期函数, 用等式(6)对方程(7)的两边平均化, 可得慢运动方程为

$$\ddot{\chi} + \epsilon(1 + \chi^2 + \langle \psi^2 \rangle)\dot{\chi} + (3\langle \psi^2 \rangle - 1)\chi + \chi^3 + \langle \psi^3 \rangle + r = F \cos \omega t \quad (8)$$

为得到快变量运动方程, 从方程(7)中减去方程(8), 可得

$$\ddot{\psi} + \epsilon\{1 + [(\psi + \chi)^2]\dot{\psi} - \langle \psi \rangle + (\psi^3 - \langle \psi^3 \rangle) + \epsilon(\psi^2 - \langle \psi^2 \rangle)\dot{\chi} + 2\epsilon\chi\dot{\chi}(\psi - \langle \psi \rangle) + 3\chi(\psi^2 - \langle \psi^2 \rangle)\} = G \cos \Omega t \quad (9)$$

由于  $\psi$  是快变量, 进一步假设  $\ddot{\psi} \gg \dot{\psi} \gg \psi$ , 在慢变量  $\chi$  的演化方程中, 包含  $\psi$  的多项式在其周期内被平均后, 方程(9)可被近似为

$$\ddot{\psi} = G \cos \Omega t \quad (10)$$

由此得到了近似的快变量运动方程

$$\psi = -\frac{G}{\Omega^2} \cos \Omega t \quad (11)$$

使用  $\psi$  快运动变量, 得

$$\langle \psi^2 \rangle = \frac{G^2}{2\Omega^4}, \langle \psi^3 \rangle = 0 \quad (12)$$

将其代入慢运动方程(8)中,

$$\ddot{\chi} + \epsilon\left(1 + \chi^2 + \frac{G^2}{2\Omega^4}\right)\dot{\chi} + \left(\frac{3G^2}{2\Omega^4} - 1\right)\chi + \chi^3 + r = F \cos \omega t \quad (13)$$

方程(13)是我们重点研究的慢运动方程. 下面将在平衡点  $\chi^*$  附近线性化此方程来计算系统在低频信号下响应振幅  $Q$  的理论值. 该方程还可以写成以下形式

$$\ddot{\chi} + \gamma_{\text{eff}}\dot{\chi} + \frac{dV_{\text{eff}}}{d\chi} = F \cos \omega t \quad (14)$$

其中

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left( \frac{3G^2}{2\Omega^4} - 1 \right) \chi^2 + \frac{1}{4} \chi^4 + r\chi \quad (15)$$

和

$$\gamma_{\text{eff}} = \epsilon \left( 1 + \chi^2 + \frac{G^2}{2\Omega^4} \right) \quad (16)$$

分别是系统的有效势能和有效耗散项. 有效势能  $V_{\text{eff}}(\chi)$  是非对称参数  $r$  的函数, 有效势能的势阱形状和位置受参数  $r$  的影响. 图 2 为有效势能  $V_{\text{eff}}(\chi)$

的图像,其中  $G=100, \Omega=15$ . 这里我们重点研究双稳系统,比较方程(2)和(15),两者的形式十分相似,为了保证双稳形式,方程(15)中的高频信号的振幅  $G$  和频率  $\Omega$ 、非对称参数  $r$  应满足

$$r < r_c = \frac{2}{9} \sqrt{3 \left( 1 - \frac{3G^2}{2\Omega^4} \right)} \quad (17)$$

当  $F=0, r < r_c$  时,方程(14)有两个稳定的平衡点,

$$\chi_+ = \frac{2 \sqrt{3 \left( 1 - \frac{3G^2}{2\Omega^4} \right)}}{3} \times \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[ - \frac{3\sqrt{3}r}{2 \left( 1 - \frac{3G^2}{2\Omega^4} \right)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\} \quad (18)$$

$$\chi_- = \frac{2 \sqrt{3 \left( 1 - \frac{3G^2}{2\Omega^4} \right)}}{3} \times \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[ - \frac{3\sqrt{3}r}{2 \left( 1 - \frac{3G^2}{2\Omega^4} \right)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{2\pi}{2} \right\} \quad (19)$$

图 3 为有效耗散项  $\gamma_{\text{eff}}(\chi)$  的图像,从图中可以看出有效耗散项的极值会随高频信号参数的变化而发生变化。

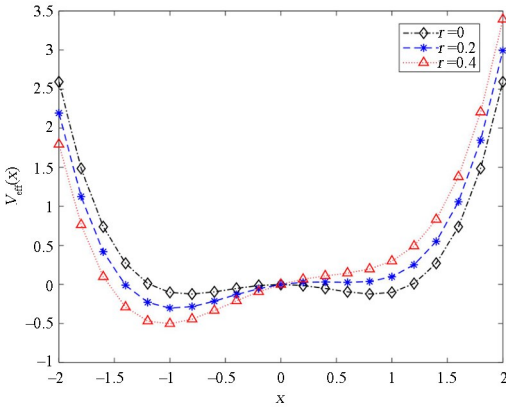


图 2 有效势函数  $V_{\text{eff}}(\chi)$  的图像

Fig. 2 Plot of the effective potential function  $V_{\text{eff}}(\chi)$

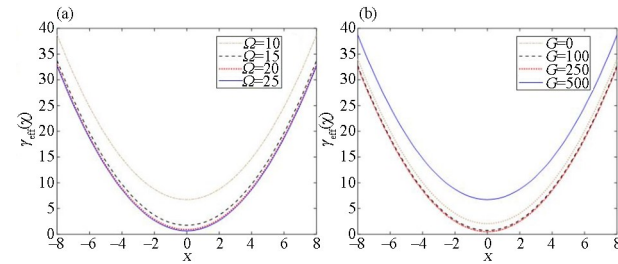


图 3 有效耗散项  $\gamma_{\text{eff}}(\chi)$  的图像:(a)  $G=500$ ;(b)  $\Omega=10$

Fig. 3 Plot of the effective dissipation  $\gamma_{\text{eff}}(\chi)$ :

(a)  $G=500$ ;(b)  $\Omega=10$

接下来,我们使用适当的近似对平衡点  $\chi^* = \chi_+$  周围的慢运动方程(13)进行线性化,可以获得响应幅值  $Q$  的解析解.在没有输入周期信号的情况下,系统在稳定平衡点周围会发生小幅度的周期运动.引入偏差变量  $Y = \chi - \chi^*$ ,将其代入方程(13),可以得到

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + \epsilon \left( 1 + \chi^{*2} + \frac{G^2}{2\Omega^4} + Y^2 + 2\chi^* Y \right) \dot{Y} + \\ \left( \frac{3G^2}{2\Omega^4} + 3\chi^{*2} - 1 \right) Y + 3\chi^* Y^2 + Y^3 \\ = F \cos \omega t \end{aligned} \quad (20)$$

由于低频信号的振幅  $F \ll 1$ ,假设  $Y \ll 1$ ,忽略非线性阻尼项,得到近似的线性方程

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + \epsilon \left( 1 + \frac{G^2}{2\Omega^4} + \chi^{*2} \right) \dot{Y} + \left( \frac{3G^2}{2\Omega^4} - 1 + 3\chi^{*2} \right) Y \\ = F \cos \omega t \end{aligned} \quad (21)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,方程(21)的解为

$$Y(t) = A_L \cos(\omega t + \phi) \quad (22)$$

其中响应振幅  $A_L$  为

$$A_L = \frac{F}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad (23)$$

共振频率  $\omega_r$  为

$$\omega_r = \sqrt{\left( \frac{3G^2}{2\Omega^4} - 1 + 3\chi^{*2} \right)} \quad (24)$$

阻尼系数  $\gamma$  为

$$\gamma = \epsilon \left( 1 + \frac{G^2}{2\Omega^4} + \chi^{*2} \right) \quad (25)$$

阻尼系统受到双频信号激励时,系统的稳态响应与初始条件无关<sup>[22]</sup>,一般用响应幅值来衡量低频信号通过非线性系统后被放大的程度,可以将响应幅值定义为

$$Q = \frac{A_L}{F} = \frac{1}{\sqrt{S}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad (26)$$

其中  $W = \omega_r^2 - \omega^2$ ,  $S = (\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2$ .

当  $S$  达到最小值,即  $W=0$  或  $\omega_r = \omega$  时,  $Q$  达到最大值,即 VR 发生.若共振发生在平衡点  $\chi^* =$

0,即  $\omega_r = \sqrt{\frac{3G^2}{2\Omega^4} - 1}$  时,VR 发生.

### 3 数值结果与分析

为了对该双稳系统(4)进行数值积分,可以将其表示为耦合自治常微分方程,其形式为



$$\frac{dx}{dt}=y,$$
$$\frac{dy}{dt}=-\epsilon(1+x^2)\dot{x}+x-x^3-r+F\cos\omega t+G\cos\Omega t.$$

(27)

采用步长为  $\Delta t=0.01$ 、模拟时间间隔为  $T_s=nT$  的四阶 Runge-Kutta 算法来分析系统的振动共振现象,振荡周期为  $T=2\pi/\omega$ ,其中  $\omega$  为低频信号的频率,  $n=1,2,3\cdots$  为完整振荡次数. 取初值为  $x(0)=0$ ,  $y(0)=0$  弛豫时间为  $100T$ ,低频输入信号的振幅  $F=0.1$ . 据理论结果可知,系统在低频信号频率处的响应幅值  $Q$  和 高频信号的振幅  $G$  之间是一种非线性关系,我们可以增大高频信号的振幅  $G$  使系统对低频信号的响应幅值达到最大值,即出现振动共振<sup>[23]</sup>. 在数值模拟中,忽略瞬态的影响,用系统在低频处的响应幅值来度量振动共振的程度,即

$$Q=\frac{\sqrt{B_s^2+B_c^2}}{F}$$

(28)

其中  $B_s$  和  $B_c$  分别是系统响应在低频  $\omega$  处的正弦和余弦傅里叶分量

$$B_s=\frac{2}{nT}\int_0^{nT}x(t)\sin\omega t\,dt,$$
$$B_c=\frac{2}{nT}\int_0^{nT}x(t)\cos\omega t\,dt$$

(29)

为了研究系统的响应幅值,我们用非对称双稳系统方程(4)的解,对公式(29)进行数值积分,计算出公式(28),即响应幅值  $Q$  的数值解. 接下来将此结果与方程(26)求得的响应幅值  $Q$  的理论值进行比较.

3.1 高频信号的频率对非对称双稳系统振动共振的影响分析

图 4 描绘了响应幅值  $Q$  随高频信号的频率  $\Omega$  ( $\Omega=10,15,20$ )变化的图像. 由公式(26)分析计算出的理论  $Q$  值(虚线)与公式(28)计算出的数值  $Q$  值(标记点)两者之间的比较,容易看出系统的响应幅值  $Q$  的理论结果与数值结果具有较好的一致性. 当将高频信号的频率取不同值  $\Omega=10,15,20$ ,其他参数不变时,随着高频信号的振幅的增大,可以观察到振动共振现象. 随着高频信号振幅  $G$  的增大,响应幅度  $Q$  呈现出先逐渐增大,达到最大值后逐渐减小的非单调行为. 此外,随着高频信号的频率  $\Omega$  的增大,振动共振发生时高频信号的最佳

振幅  $G_{VR}$  逐渐增大. 当高频信号的振幅和频率较大时,更容易发生振动共振现象.

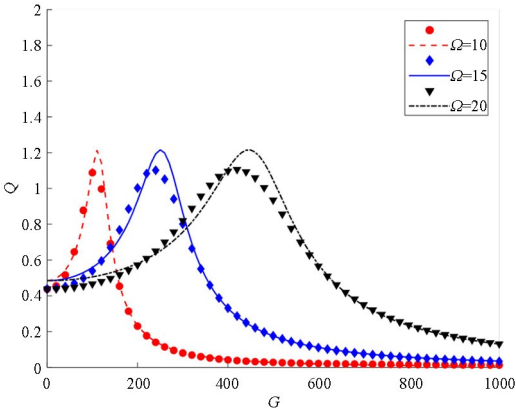


图 4  $\Omega$  变化时,响应幅值  $Q$  与高频信号的振幅  $G$  的函数图, 其中  $\epsilon=0.5,\omega=1.0,F=0.1,r=0.4$   
Fig. 4 The response amplitude  $Q$  versus the fast signal amplitude  $G$  presents vibrational resonance for three fixed values of  $\Omega$ , herein,  $\epsilon=0.5,\omega=1.0,F=0.1,r=0.4$

3.2 非线性耗散参数对非对称双稳系统振动共振的影响分析

图 5 给出了非线性耗散参数  $\epsilon=0.4,0.5,0.6$  时,非线性耗散参数  $\epsilon$  对系统振动共振现象的影响,参数取值如下: $r=0.4,\omega=1.0,F=0.1,\Omega=10$ . 从图中可以获得,响应振幅  $Q$  的理论结果(虚线)和数值结果(实线标记点)两者的对比曲线形状和走势是较为一致的,但在共振点附近  $G\in(80,140)$ ,响应幅值的理论结果与数值结果并不完全一致. 这两者之间的偏差可能是因为我们为了获得线性方程(21),忽视了方程(20)中的非线性分量  $\epsilon(2X^*Y+Y^2)\dot{Y}$ . 非线性耗散参数  $\epsilon$  的变化不影响振动共振发生时高频信号的最佳振幅  $G_{VR}$ ,即 VR

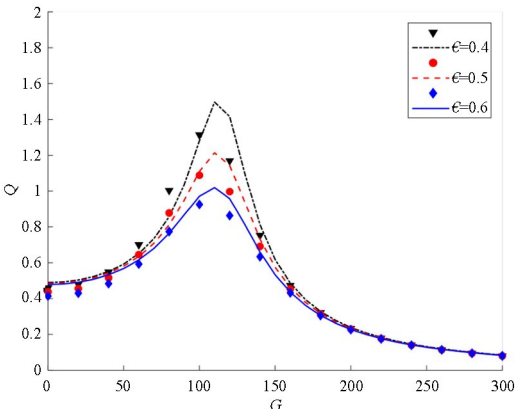


图 5  $\epsilon$  变化时,响应幅值  $Q$  与高频信号的振幅  $G$  的函数图, 其中  $r=0.4,\omega=1.0,F=0.1,\Omega=10$   
Fig. 5 The response amplitude  $Q$  versus the fast signal amplitude  $G$  presents vibrational resonance for three fixed values of  $\epsilon$ , herein,  $r=0.4,\omega=1.0,F=0.1,\Omega=10$

发生在  $G=120$  处. 随着非线性耗散参数  $\epsilon$  的增大, 响应幅值  $Q$  逐渐减小, 并且在峰值附近的减小程度更为明显, 系统发生更弱的振动共振现象. 综上, 低耗散是可取的, 因为它在高频信号下系统可以获得更好的器件响应<sup>[24]</sup>, 还允许更高的器件效率和灵敏度, 以及更低的机械噪声和磨损的敏感性<sup>[25]</sup>.

### 3.3 低频信号的频率对非对称双稳系统振动共振的影响分析

图 6 给出了低频信号频率  $\omega=1.0, 1.1$  时, 低频信号的频率  $\omega$  对系统振动共振现象的影响, 参数取值如下:  $\epsilon=0.5, r=0.4, F=0.1, \Omega=10$ . 进一步说明了通过改变低频信号频率可以提高  $Q_{\max}$ . 从图中可以看出, 由公式 (28) 得出响应振幅  $Q$  的数值结果 (标记点) 和公式 (26) 得出  $Q$  的理论结果 (虚线) 是相对一致的. 该图显示低频信号的频率  $\omega$  越低, 响应振幅  $Q$  的最大值越大, 振动共振越强, 信号被放大的程度越大. 因此, 振动共振对处理超低频微弱信号尤其有效. 此外, 从图中可以看出峰值的位置向高频信号的振幅  $G$  的较小值偏离.

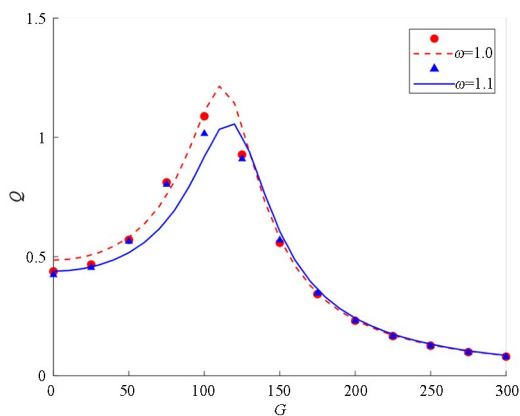


图 6  $\omega$  变化时, 响应幅值  $Q$  与高频信号的振幅  $G$  的函数图, 其中  $\epsilon=0.5, r=0.4, F=0.1, \Omega=10$

Fig. 6 The response amplitude  $Q$  versus the fast signal amplitude  $G$  presents vibrational resonance for three fixed values of  $\omega$ , herein,  $\epsilon=0.5, r=0.4, F=0.1, \Omega=10$

### 3.4 非对称参数对非对称双稳系统振动共振的影响分析

图 7 展示了非对称参数  $r=0, 0.2, 0.4$  时, 响应幅值  $Q$  与高频信号振幅  $G$  的函数关系图, 参数取值如下:  $\epsilon=0.5, \omega=1.0, F=0.1, \Omega=10$ . 从图中可以看出, 当  $r=0$  时, 此时系统变成一个对称双稳系统, 系统会发生双共振; 然而当  $r=0.2, 0.4$  时, 系统是一个非对称双稳系统, 系统发生单共振. 此外, 对于非对称双稳系统, 非对称参数  $r$  不影响

共振发生的位置, 只是影响共振的强度, 即当非对称参数  $r$  增大时, 系统的响应幅值  $Q$  减小, 发生较弱的共振.

在参数空间中研究振动共振, 会更容易发现系统响应幅值增大所对应的参数范围, 这对实验应用具有重要的意义. 图 8(a) 描述了系统响应幅值  $Q$  随非线性耗散系数  $\epsilon$  和低频信号振幅  $G$  变化的三维图. 参数取值为  $\omega=1.0, F=0.1, \Omega=10, r=0.4$ . 该三维图展示了当非线性耗散系数  $\epsilon < 1.0$  和低频信号的振幅  $G < 200$  时, 系统会发生强共振. 另外, 从图中我们可以看出系统的响应幅值  $Q$  随着非线性耗散参数  $\epsilon$  的增大而减小. 图 8(b) 描述了系统响应幅值  $Q$  随低频信号的频率  $\omega$  和低频信号振幅  $G$  变化的三维图. 参数取值为  $\epsilon=0.5, r=0.4, F=0.1, \Omega=10$ . 该三维图展示了当高频信号的振幅  $G < 150$ , 系统会发生强共振. 另外, 从图中我们可以看出系统的响应幅值  $Q$  随着低频信号的频率  $\omega$  的增大而减小.

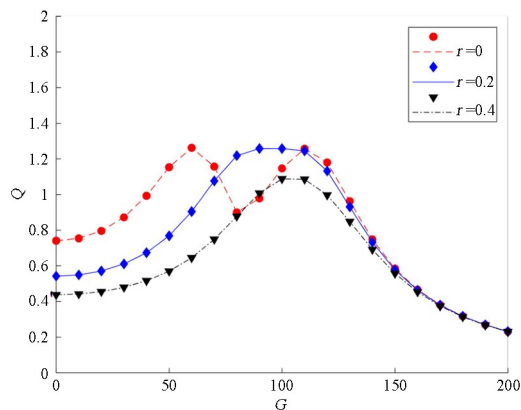


图 7  $r$  变化时, 响应幅值  $Q$  与高频信号的振幅  $G$  的函数图, 其中  $\epsilon=0.5, \omega=1.0, F=0.1, \Omega=10$

Fig. 7 The response amplitude  $Q$  versus fast signal amplitude  $G$  presents vibrational resonance for three fixed values of  $r$ , herein,  $\epsilon=0.5, \omega=1.0, F=0.1, \Omega=10$

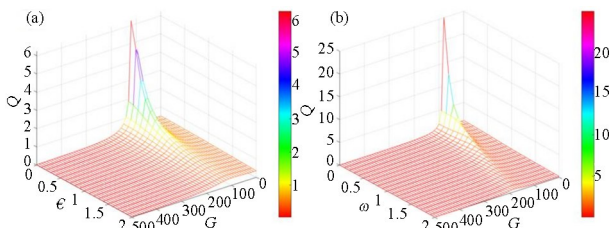


图 8 响应幅值  $Q$  在不同参数下的变化. (a) 响应幅值  $Q$  与非线性耗散系数  $\epsilon$  和低频信号的振幅  $G$  的三维关系图; (b) 响应幅值  $Q$  与低频信号的频率  $\omega$  和低频信号的振幅  $G$  的三维关系图

Fig. 8 Response amplitude  $Q$  Variation with different parameters. (a) Three-dimensional plot showing the dependence of the response amplitude  $Q$  on the fast signal amplitude  $G$  and the dissipation parameter  $\epsilon$ ; (b) Three-dimensional plot showing the dependence of the response amplitude  $Q$  on the fast signal amplitude  $G$  and the slow signal frequency  $\omega$

## 4 结论

本文采用快慢变量分离法研究了具有非线性耗散项的非对称双稳系统的振动共振现象,理论求解了系统在低频信号处的响应幅值 $Q$ ,分析了双频周期信号的参数、非线性耗散参数和非对称参数对振动共振现象的影响.主要结果为:首先,高频信号的频率仅影响共振发生的位置 $G_{VR}$ ,对共振发生的强度影响较小;然后,非线性耗散系数的增大并不影响共振发生的位置 $G_{VR}$ ,但是会弱化系统振动共振的强度;最后,非对称参数 $r$ 的变化会影响系统振动共振的形态.特别地,与对称双稳系统相比,具有非线性耗散项的非对称双稳系统会发生单共振,并随着非对称参数的增大,系统发生更弱的振动共振现象.目前,振动共振现象已经在许多模型中得到研究,研究成果应用于多个科学领域.例如:在信号处理领域可以用于检测随机弱信号<sup>[26]</sup>,优化弱周期信号<sup>[27]</sup>,在强背景噪声下检测弱信号<sup>[28]</sup>等.在神经科学领域,振动共振可能影响神经网络的稳定性和适应性<sup>[29]</sup>,调整外部激励的频率,可以改变神经网络的动态行为,使其适应特定任务或环境<sup>[30]</sup>.在生物医学领域,由双频信号驱动的基因调控系统实现最佳的振动共振,可以容易地获取有用的遗传信息,携带细胞内信息的信号可以直接或间接控制转录系统中的基因表达<sup>[16,31]</sup>.因此,我们希望该工作可以为不同领域振动共振的研究提供一定的理论基础.

## 参考文献

- [1] THOR I. F, HENK N. Parametric resonance in dynamical systems [M]. New York: Springer New York, 2011.
- [2] BENZI R, SUTERA A, VULPIANI A. The mechanism of stochastic resonance [J]. Journal of Physics A Mathematical General, 1981, 14(11): 453—457.
- [3] 张强, 王剑龙, 李扬, 等. 有界噪声激励下系统随机共振的改善[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(6): 52—58.  
ZHANG Q, WANG J L, LI Y, et al. Improvement of stochastic resonance under bounded noise excitation [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(6): 52—58. (in Chinese)
- [4] 吴媛梦, 贾雁兵. 混合振荡神经网络中反相干共

振向相干共振的转迁[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(5): 76—86.

- WU Y M, JIA Y B. Transition from anti-coherence resonance to coherence resonance in a network composed of neurons with mixed-mode oscillations [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(5): 76—86. (in Chinese)
- [5] LANDA P S, MCCLINTOCK P V E. Vibrational resonance [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2000, 33(45): 433—438.
- [6] GITTERMAN M. Bistable oscillator driven by two periodic fields [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001, 34(24): 355—357.
- [7] CHIZHEVSKY V N, SMEU E, GIACOMELLI G. Experimental evidence of “vibrational resonance” in an optical system [J]. Physical Review Letters, 2003, 91(22): 220602.
- [8] SU D C, CHIU M H, CHEN C D. Simple two-frequency laser [J]. Precision Engineering, 1996, 18(2/3): 161—163.
- [9] DENG B, WANG J, WEI X L, et al. Vibrational resonance in neuron populations [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2010, 20(1): 013113.
- [10] VOLKOV E I, ULLNER E, ZAIKIN A A, et al. Oscillatory amplification of stochastic resonance in excitable systems [J]. Physical Review E, 2003, 68(2): 026214.
- [11] MAKSIMOV A O. On the subharmonic emission of gas bubbles under two-frequency excitation [J]. Ultrasonics, 1997, 35(1): 79—86.
- [12] RAJASEKAR S, SANJUAN M A F. Vibrational resonance in monostable systems [M]//Nonlinear resonances. Cham, Switzerland: Springer, 2015: 83—117.
- [13] 杨秀妮, 杨云峰. 具有时滞反馈的非对称双稳系统中的振动共振研究[J]. 物理学报, 2015, 64(7): 160—167.
- YANG X N, YANG Y F. Vibrational resonance in an asymmetric bistable system with time-delay feedback [J]. Acta Physica Sinica, 2015, 64(7): 160—167. (in Chinese)
- [14] ZHOU Z X, YANG K L, WANG C J, et al. Theory and numerics of vibrational resonance in a three-level atomic optical bistable system [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2023, 170: 113355.
- [15] RAJASEKAR S, ABIRAMI K, SANJUAN M F. Novel vibrational resonance in multistable systems

- [J]. *Chaos*, 2011, 21(3): 033106.
- [16] NING L J, CHEN Z J. Vibrational resonance analysis in a gene transcriptional regulatory system with two different forms of time-delays [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2020, 401: 132164.
- [17] BAYSAL V, YILMAZ E. Effects of electromagnetic induction on vibrational resonance in single neurons and neuronal networks [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2020, 537: 122733.
- [18] ELLIOTT S J, GHANDCHI TEHRANI M, LANGLEY R S. Nonlinear damping and quasi-linear modelling [J]. *Philosophical Transactions Series A, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 2015, 373(2051): 20140402.
- [19] ROY-LAYINDE T O, LAOYE J A, POPOOLA O O, et al. Analysis of vibrational resonance in bi-harmonically driven plasma [J]. *Chaos*, 2016, 26(9): 093117.
- [20] ROY-LAYINDE T O, LAOYE J A, POPOOLA O O, et al. Vibrational resonance in an inhomogeneous medium with periodic dissipation [J]. *Physical Review E*, 2017, 96(3): 032209.
- [21] KOLEBAJE O, POPOOLA O O, VINCENT U E. Occurrence of Vibrational resonance in an oscillator with an asymmetric Toda potential [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2021, 419: 132853.
- [22] 张国策, 聂磊, 陈云. 简谐振动初相位之唯一性浅谈 [J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(3): 88—92.
- ZHANG G C, NIE L, CHEN Y. On the uniqueness of initial phase in simple harmonic vibration [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(3): 88—92. (in Chinese)
- [23] JEYAKUMARI S, CHINNATHAMBI V, RAJASEKAR S, et al. Vibrational resonance in an asymmetric duffing oscillator [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2011, 21(1): 275.
- [24] IMBODEN M, MOHANTY P. Dissipation in nanoelectromechanical systems [J]. *Physics Reports*, 2014, 534(3): 89—146.
- [25] CLELAND A N. Thermomechanical noise limits on parametric sensing with nanomechanical resonators [J]. *New Journal of Physics*, 2005, 7: 235.
- [26] REN Y H, PAN Y, DUAN F B. Generalized energy detector for weak random signals via vibrational resonance [J]. *Physics Letters A*, 2018, 382(12): 806—810.
- [27] JIA P X, WU C J, YANG J H, et al. Improving the weak aperiodic signal by three kinds of vibrational resonance [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 91(4): 2699—2713.
- [28] REN Y H, PAN Y, DUAN F B, et al. Exploiting vibrational resonance in weak-signal detection [J]. *Physical Review E*, 2017, 96(2): 022141.
- [29] DENG B, WANG J, WEI X L. Effect of chemical synapse on vibrational resonance in coupled neurons [J]. *Chaos*, 2009, 19(1): 013117.
- [30] MAO J W, HU D L. Vibrational resonance and electrical activity behavior of a fractional-order FitzHugh-Nagumo neuron system [J]. *Mathematics*, 2022, 10(1): 87.
- [31] WANG C J, YANG K. Vibrational resonance in bistable gene transcriptional regulatory system [J]. *Chinese Journal of Physics*, 2012, 50(4): 607—618.