

中部与端部组合激励下悬索的主共振响应^{*}

余森涛 孙测世[†] 易鸣

(重庆交通大学 土木工程学院, 重庆 400074)

摘要 索结构具有质量小、刚度小、阻尼小的特点,容易在各种激励下发生横向振动,影响结构的安全、使用性能与寿命.为研究中部分激励和端部激励的组合形式对悬索主共振响应的影响,考虑几何非线性,得到悬索无量纲微分控制方程,采用 Galerkin 法得到离散的常微分方程,再使用多尺度法对该方程进行求解.研究了不同中部和端部激励幅值比、不同中部和端部激励相位差以及不同中部激励位置对悬索主共振响应的影响.发现这些参数均不会改变主共振频率曲线的软硬状态,但激励幅值比和相位差会使曲线的各支发生平移,或激励的相位差越接近 π ,悬索主共振响应越弱.中部激励位置的变化能使相频曲线同时发生平移和旋转,且其离端部激励越近,系统响应就越大.

关键词 悬索, 非线性振动, 中部激励, 端部激励, 主共振

中图分类号:O322;U448.27

文献标志码:A

Primary Resonances of Suspended Cables under Simultaneously Mid-span and End Excitations^{*}

Yu Sentao Sun Ceshi[†] Yi Ming

(College of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract Cable structures, characterized by their low mass, low stiffness, and low damping, are prone to lateral vibrations under various excitations, which can significantly affect the safety, usability, and lifespan of the structure. To investigate the combined effects of mid-span and end excitations on the primary resonance of suspended cables, the dimensionless differential governing equations are derived, and the geometric nonlinearity is considered. The Galerkin method is employed to obtain discrete ordinary differential equations, which are then solved using the multiple scales method. The study explores the influence of different ratios of mid-span to end excitation amplitudes, different phase differences between mid-span and end excitations, and different positions of mid-span excitations on the primary resonance of suspended cables. It is found that these parameters do not alter the characteristic of the primary response-frequency curves. However, the amplitude ratio and phase difference result in shifts in the branches of the curves, and the smaller the amplitude or the closer the phase difference to π , the weaker the primary resonance of the cable. Changes in the position of mid-span excitation cause simultaneous translation and rotation of the phase-frequency curve, and the closer it is to the end excitation, the larger the system response.

Key words suspended cable, nonlinear vibration, mid-span excitation, end excitation, primary resonance

2024-04-23 收到第 1 稿,2024-05-23 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(52378284),国家级大学生创新创业训练项目(202310618013),National Natural Science Foundation of China (52378284), National College Student Innovation and Entrepreneurship Training Program (202310618013).

[†] 通信作者 E-mail:suncs@hnu.edu.cn

引言

悬索是典型的细长结构,具有质量轻、阻尼小等特点,在外激励或端部激励下常出现大幅振动,因此其非线性动力学相关研究一直是热点问题^[1-5].端部激励及其与其它激励形式共同作用下的情况是其中研究的重点方向之一^[6].研究表明,桥面的低阶振动频率在小于拉索固有频率2倍附近时,容易引起大幅度的参强联合共振,而在大于拉索低阶频率2倍附近时,需要较大的激励幅值或初始挠动才能引起大幅度的参强联合共振^[7].不同激励之间的相位差则使得系统的非线性动力特性进一步复杂化^[8].Zaghari等^[9,10]发现最大/最小响应振幅取决于不同激励源之间的相位差.El-Attar等^[11]分析了考虑初始相位差的悬索在两种垂直/横向支承激励下的非线性响应,发现相位差对幅频曲线有显著影响.

整体上,悬索激励的来源可分为两大类:一是风等直接作用于索体产生的分布外激励^[12],二是主梁、主塔等结构通过锚固点施加于悬索的端部激励^[13,14].前者导致方程中出现强迫激励项^[15],后者当仅为轴向激励时导致方程一次项的时变系数,当还存在横向激励时则将出现强迫激励项(参强激励)^[16,17].除上述激励力以外,悬索还可能承受中部集中激励力.比如,陈自力等^[18,19]对集中荷载作用下悬索的主共振分析,Zhang等^[20]对附带辅助索的吊杆的研究.

本文研究具有相位差的中部激励和端部激励组合下悬索的主共振响应.当激励频率处于主共振区间时,建立悬索非线性动力学模型,得到离散方程,并利用多尺度法进行求解,给出了主共振响应的频响函数和相位的关系式.研究了不同中部和端部激励幅值比、不同激励相位差^[21]以及中部激励不同位置三种情况下悬索的幅频曲线和相频曲线的特征和变化规律.

1 动力学方程

1.1 悬索力学模型

为研究端部激励 $U(t)$ 和 $V(t)$ 以及中部激励 $F(t)$ 对悬索面内位移 $v(x, t)$ 的影响,建立如图1所示的悬索面内振动力学模型.

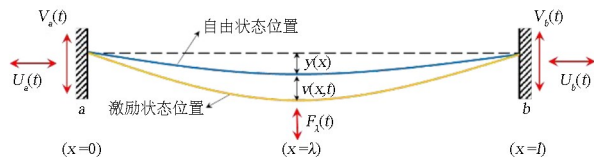


图1 中部和端部激励组合下的悬索模型

Fig. 1 Cable model with a combination of central and end excitations

图1中以索的轴向方向为 x 方向,重力加速度方向为 y 方向, x 和 y 方向对应的位移分别用 u 和 v 表示.悬索静态构型为 $y(x) = 4f \cdot x(1-x)$,其中 f 为悬索的垂跨比.悬索端部位置固定,分别记为 a 和 b ,受到轴向激励 $U_a(t)$ 、 $U_b(t)$ 和面内激励 $V_a(t)$ 、 $V_b(t)$ 的作用.在距离悬索左端 x 处施加了图1所示的面内激励 $F_\lambda(t)$.模型中的所有激励均假设为激励频率为 Ω 的简谐激励.

此外补充以下几点基本假设:(1)不计悬索材料特性差异和材料非线性,认为其质量和密度均匀分布,且具有线弹性和较大的柔性;(2)忽略悬索的弯曲刚度、扭转刚度和剪切刚度;(3)悬索的振动是拟静态的;(4)忽略悬索的面内振动和面外振动的耦合作用对振动响应的影响;(5)忽略温度等外部环境对悬索的影响.

1.2 微分控制方程

悬索的振动过程中,其单位势能 $d\Pi$ 和单位动能 dK 为:

$$d\Pi = H\epsilon + \frac{1}{2}EA\epsilon^2 \quad (1)$$

$$dK = \frac{1}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) \quad (2)$$

利用 $\sqrt{1+y'^2}$ 的泰勒展开式,得到悬索面内振动微分控制方程为^[22]:

x 方向:

$$m\ddot{u} + c_u\dot{u} = \left[EA \left(u' + y'v' + \frac{1}{2}v'^2 \right) \right]' \quad (3)$$

y 方向:

$$m\ddot{v} + c_v\dot{v} = Hv'' + \left[EA(y' + v') \left(u' + y'v' + \frac{1}{2}v'^2 \right) \right]' \quad (4)$$

式中:上标一点表示对时间 t 求导数,右上角一撇表示对坐标 x 求导数, c_u 、 c_v 分别表示悬索在 x 和 y 两个方向上的阻尼系数.

根据悬索振动的拟静态假定 $\dot{u} = 0$,代入方程,并从 0 到 l 做积分,经过无量纲化处理,得到悬索面内振动的无量纲化控制方程:

$$\ddot{v} + c_v \dot{v} = \frac{1}{\pi^2} v'' + \frac{\alpha}{\pi^2} \left\{ (v' + y') \left[A(t) + \int_0^1 v' y' dx + \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 dx \right] \right\}' \quad (5)$$

式中: $A(t) = U_b(t) - U_a(t)$ 为轴向激励的位移函数; 并舍去了各参数右上角的星号. 各个无量纲化系数为:

$$x^* = \frac{x}{l}, y^* = \frac{y}{l}, u^* = \frac{u}{l}, v^* = \frac{v}{l}, A(t)^* = \frac{A(t)}{l},$$

$$\alpha = \frac{EA}{H}, t^* = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m}} t, c_v^* = \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{1}{mH}} c_v \quad (6)$$

1.3 离散化处理

设中部激励和端部激励组合下的悬索位移:

$$\ddot{q}_v + 2\mu_v \dot{q}_v + \omega^2 q_v - \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_k P_{ij} q_{vi} q_{vj} - \frac{\alpha}{\pi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ U_j + \frac{1}{2} \left[\frac{F(t)}{\lambda} - \frac{F(t)}{1-\lambda} \right] \phi_i(\lambda) \right\} P_{ik} q_{vi} q_{vj} +$$

$$\frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n P_{ik} P_{jl} q_{vi} q_{vj} q_{vl} + \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n P_{ik} q_{vi} \Delta - \frac{\alpha}{2\pi^2} U_k \left[\frac{F(t)}{\lambda} - \frac{F(t)}{1-\lambda} \right] \sum_{i=1}^n q_{vi} \phi_i(\lambda) -$$

$$\frac{\alpha}{2\pi^2} U_k \Delta + \ddot{R}_v + 2\mu_v \dot{R}_v = 0 \quad (8)$$

其中

$$U_n = \int_0^1 \phi_n y'' dx = \begin{cases} \frac{k_n \omega_n^2 \pi^2}{8\alpha f}, & n = 2, 4, 6, \dots, \\ 0, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$P_{mn} = \int_0^1 \phi'_m \phi'_n dx$$

$$= \begin{cases} -\frac{k_m k_n \omega_m^2 \omega_n^2 \pi^4}{64\alpha f^2}, & m, n = 2, 4, 6, \dots, m \neq n, \\ \frac{k_m^2 \omega_m \pi [\omega_m \pi - \sin(\omega_m \pi)]}{2\cos^2\left(\frac{\pi\omega_m}{2}\right)}, & m = n = 2, 4, 6, \dots, \\ \omega_m^2 \pi^2, & m = n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

$$\mu_{vk} = c_{vk} \int_0^1 \phi_k^2 dx,$$

$$\omega^2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^N (P_{ik} + \alpha U_k U_i),$$

$$\Delta = 2A(t) + T^2(t) + 2y(\lambda) \left[\frac{F(t)}{\lambda} - \frac{F(t)}{1-\lambda} \right]$$

$$= 2(U_b - U_a) + (V_b - V_a)^2 + 2y(\lambda) \left[\frac{F(t)}{\lambda} - \frac{F(t)}{1-\lambda} \right]$$

$$R_v = \int_0^1 [V_b(t)x + V_a(t)(1-x)] \cdot \phi_k dx -$$

$$\int_0^1 [U_b(t)x + U_a(t)(1-x)] \cdot \phi_k dx +$$

$$\int_0^\lambda F_\lambda(t) \frac{x}{\lambda} \cdot \phi_k dx + \int_\lambda^1 F_\lambda(t) \frac{1-x}{1-\lambda} \cdot \phi_k dx$$

式中: U_a, U_b 为施加在悬索端部的轴向激励;

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i(x) + v_b \cos\theta - u_b \sin\theta +$$

$$u_a \sin\theta - v_a \cos\theta + F(t) \varphi(x) \quad (7)$$

其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\lambda}, & 0 \leq x < \lambda, \\ \frac{1-x}{1-\lambda}, & \lambda \leq x \leq 1. \end{cases}$$

代入式(5), 利用正交化规则, 得到离散化的常微分方程:

$V_a(t), V_b(t)$ 为施加在端部的面内激励; $F(t)$ 为悬索的中部激励; ϕ_k 表示振动过程中的第 k 阶模态.

1.4 多尺度摄动分析

基于多尺度法引入无量纲的一个量 ϵ , 对式(8)求近似解, 设方程的解具备如下的形式:

$$v(\epsilon, t) = \epsilon v_1(T_1, T_2, T_3) + \epsilon^2 v_2(T_1, T_2, T_3) +$$

$$\epsilon^3 v_3(T_1, T_2, T_3) + \dots \quad (9)$$

其中, $T_n = \epsilon^n t$ 是不同的时间尺度, 根据求导的链式法则, 对 t 求导可以变成对 $T_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 求导, 引入求导符号 $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} (n=1, 2, 3, \dots)$, 设式

(8)中的各个激励摄动到二阶:

$$\mu_{vi} = \epsilon^2 \mu_{vi} (i=1, 2, 3, \dots);$$

$$F(t) = \epsilon^2 F(t); A(t) = \epsilon^2 A(t); T(t) = \epsilon^2 T(t). \quad (10)$$

将式(9)、式(10)代入式(8), 并按 ϵ 的阶次排序, 然后删去久期项得到:

$$\epsilon^1: D_0^2 v_1 + \omega^2 v_1 = 0 \quad (11)$$

$$\epsilon^2: D_0^2 v_2 + \omega^2 v_2 = -2D_0 D_1 v_1 + \frac{\alpha}{\pi^2} U_k \Delta +$$

$$\frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (U_k P_{ij} + 2U_j P_{ik}) v_{i1} v_{j1} - \ddot{R}_v \quad (12)$$

$$\epsilon^3: D_0^2 v_3 + \omega^2 v_3 = -2D_0 D_1 v_2 - 2(D_0 D_2 +$$

$$D_1^2) v_1 - 2\mu_{vk} D_0 v_1 + \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (U_k P_{ij} +$$

$$2U_j P_{ik})(v_{i1}v_{j2} + v_{i2}v_{j1}) + \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{F(t)}{\lambda} - \frac{F(t)}{1-\lambda} \right] \phi_i(\lambda) U_k v_{i1} - \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n P_{ik} P_{jl} v_{i1} v_{j1} v_{l1} - \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{i=1}^n P_{ik} v_{i1} \Delta \quad (13)$$

设式(11)的复数解为:

$$v_1 = A_m(T_1, T_2) e^{i\omega_m T_0} + cc \quad (14)$$

式中, cc 表示前面各项的共轭复数. 将式(14)代入

$$a_j = \left[-U_a \cos\theta, U_b \cos\theta, -V_a \sin\theta, V_b \sin\theta, \frac{2-4\lambda}{\lambda(1-\lambda)} y(\lambda) F \cos\theta, \frac{2-4\lambda}{\lambda(1-\lambda)} y(\lambda) F \sin\theta \right] \quad (16)$$

$$b_j = \left[-U_a \sin\theta \int_0^1 (1-x) \phi_k dx, -U_b \sin\theta \int_0^1 x \phi_k dx, V_a \cos\theta \int_0^1 (1-x) \phi_k dx, V_b \cos\theta \int_0^1 x \phi_k dx, F_\lambda \sin\theta \int_0^\lambda \frac{x}{\lambda} \phi_k dx, F_\lambda \cos\theta \int_0^\lambda \frac{x}{\lambda} \phi_k dx, F_\lambda \sin\theta \int_\lambda^1 \frac{1-x}{1-\lambda} \phi_k dx, F_\lambda \cos\theta \int_\lambda^1 \frac{1-x}{1-\lambda} \phi_k dx \right] \quad (17)$$

由于久期项为零:

$$-2i\omega_m D_1 A_m + \left(\sum_{j=1}^6 \frac{\alpha}{2\pi^2} U_k a_j + \sum_{j=1}^8 \frac{\Omega^2}{2} b_j \right) e^{i\sigma T_1 + \phi_j} = 0 \quad (18)$$

所以式(15)的特解为:

$$v_2 = K_{1m} (A_m^2 e^{2i\omega_m T_0} + cc) + K_{2m} A_m \bar{A}_m \quad (19)$$

$$D_0^2 v_3 + \omega_m^2 v_3 = -2D_0 D_1 (K_{1m} A_m^2 e^{2i\omega_m T_0} + K_{2m} A_m \bar{A}_m + K_{3m} \bar{A}_m^2 e^{-2i\omega_m T_0}) - 2D_0 D_2 (A_m e^{i\omega_m T_0} + cc) - 2\mu_{ik} D_0 (A_m e^{i\omega_m T_0 + cc}) - D_1^2 (A_m e^{i\omega_m T_0} + cc) + \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} [(U_m P_{mi} + 2U_i P_{mm}) (A_m e^{i\omega_m T_0} + cc) (K_{1i} A_m^2 e^{2i\omega_m T_0} + K_{2i} A_m \bar{A}_m + K_{3i} \bar{A}_m^2 e^{-2i\omega_m T_0})] + \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} [(U_m P_{rm} + 2U_r P_{mm}) (A_m e^{i\omega_m T_0} + cc) (K_{1r} A_m^2 e^{2i\omega_m T_0} + K_{2r} A_m \bar{A}_m + K_{3r} \bar{A}_m^2 e^{-2i\omega_m T_0})] + \frac{\alpha(1-2\lambda)}{2\pi^2 \lambda(1-\lambda)} F(t) \phi_i(\lambda) U_m (A_m e^{i\omega_m T_0} + cc) - \frac{\alpha}{2\pi^2} P_{mm}^2 (A_m e^{i\omega_m T_0} + cc)^3 - \frac{\alpha}{2\pi^2} P_{mm} (A_m e^{i\omega_m T_0} + cc) \left[\sum_{j=1}^6 a_j e^{i(\Omega + \phi_j)} + cc \right] \quad (21)$$

消去久期项得到:

$$2i\omega_m (D_2 A_m + \mu_v A_m) + D_1^2 A_m + \Gamma_{em} A_m^2 \bar{A}_m = 0 \quad (22)$$

根据式(18)解出:

$$D_1^2 A_m = -\frac{1}{2i\omega_m} \left(\sum_{j=1}^6 \frac{\alpha}{2\pi^2} U_k a_j + \sum_{j=1}^8 \frac{\Omega^2}{2} b_j \right) e^{i\sigma T_1 + \phi_j} \quad (23)$$

设 $A_m = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$, 将式(23)代入式(22)得到:

$$i\omega_m (a' + a i\beta' + \epsilon \mu_v a) + \epsilon^2 \Gamma_{em} \frac{3a^2}{8} + \epsilon \left(\frac{\epsilon\sigma}{2\omega_m} - 1 \right) \left(\sum_{j=1}^6 a_j e^{i(\epsilon\sigma + \phi_j - \beta)} + \sum_{j=1}^8 b_j e^{i(\epsilon\sigma + \phi_j - \beta)} \right) = 0 \quad (24)$$

令 $\gamma = \epsilon\sigma t - \beta; \gamma_j = \gamma + \phi_j$, 当 $a' = \gamma' = 0$ 时方

式(12), 令久期项为 0, 得到:

$$D_0^2 v_2 + \omega_m^2 v_2 = -2D_0 D_1 (A_m e^{i\omega_m T_0} + cc) + \frac{\alpha}{2\pi^2} (U_k P_{mm} + 2U_m P_{mk}) v_m^2 + \frac{\alpha}{2\pi^2} U_k \left[\sum_{j=1}^6 a_j e^{i(\Omega + \phi_j)} + cc \right] + \frac{\Omega^2}{2} \left[\sum_{j=1}^8 b_j e^{i(\Omega + \phi_j)} + cc \right] \quad (15)$$

其中, a_j, b_j 为数组:

$$K_{1m} = \frac{\alpha}{2\pi^2 (\omega_k^2 - 4\omega_m^2)} (U_k P_{mm} + 2U_m P_{mk}) \quad (20)$$

$$K_{2m} = \frac{\alpha}{\pi^2 \omega_k^2} (U_k P_{mm} + 2U_m P_{mk}) \quad (20)$$

$$K_{3m} = \frac{\alpha}{2\pi^2 (\omega_k^2 - 4\omega_m^2)} (U_k P_{mm} + 2U_m P_{mk}) \quad (20)$$

其中:

$$K_{1m} = \frac{\alpha}{2\pi^2 (\omega_k^2 - 4\omega_m^2)} (U_k P_{mm} + 2U_m P_{mk}) \quad (20)$$

$$K_{2m} = \frac{\alpha}{\pi^2 \omega_k^2} (U_k P_{mm} + 2U_m P_{mk}) \quad (20)$$

然后将式(14)、式(19)、式(20)代入(13), 得到:

程存在稳态解, 故分离虚实部得到:

$$\epsilon \omega_m \mu_v a + \left(\frac{\epsilon\sigma}{2\omega_m} - 1 \right) \left[\sum_{j=1}^6 a_j \sin(\gamma + \phi_j) + \sum_{j=1}^8 b_j \sin(\gamma + \phi_j) \right] = 0 \quad (25)$$

$$-\omega_m a \sigma + \epsilon \Gamma_{em} \frac{a^3}{8} + \left(\frac{\epsilon\sigma}{2\omega_m} - 1 \right) \left[\sum_{j=1}^6 a_j \cos(\gamma + \phi_j) + \sum_{j=1}^8 b_j \cos(\gamma + \phi_j) \right] = 0 \quad (26)$$

设:

$$G \sin \alpha = \sum_{j=1}^6 a_j \sin(\gamma + \phi_j) + \sum_{j=1}^8 b_j \sin(\gamma + \phi_j)$$

$$G \cos \alpha = \sum_{j=1}^6 a_j \cos(\gamma + \phi_j) + \sum_{j=1}^8 b_j \cos(\gamma + \phi_j) \quad (27)$$

将式(27)代入式(25)、式(26),然后求两式平方和,得到含响应幅值 a^2 的三次方程:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon\omega_m\mu_v)^2 a^2 + \left(\frac{1}{8}\varepsilon\Gamma_{em}a^2 - \omega_m\sigma\right)^2 a^2 \\ & = G^2 \left(\frac{\varepsilon\sigma}{2\omega_m} - 1\right)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

将两式相除,得到响应相位的关系式为:

$$\tan\alpha = \frac{\varepsilon\omega_m\mu_v a}{-\omega_m a\sigma + \frac{1}{8}\varepsilon\Gamma_{em}a^3} \quad (29)$$

2 激励作用组合对振动响应的影响

本节利用 MATLAB 软件,编制响应幅值和响应相位的求解程序,在给定悬索参数^[21] $l = 0.6005 \text{ m}$, $A = 0.1257 \text{ mm}^2$, $m = 0.0487 \text{ kg/m}$, $E = 1.34 \times 10^6 \text{ kPa}$ 的基础上,改变中部激励 $F(t)$ 和端部激励 $V(t)$ 的组合效果,得到不同组合下的悬索响应,研究不同组合效应下的系统响应。

2.1 激励幅值比对振动响应的影响

固定悬索两端位置,并在悬索中心 $\lambda = 0.5$ 处施加一个面内激励 F ,在悬索右端施加一个面内激励 V_b , F 与 V_b 的相位差为 $\pi/4$,研究当激励振幅 v_b 与 f_a 的比值分别为 $1/1$ 、 $1/2$ 和 $2/1$ 时,悬索的主共振响应发生的变化与规律。绘制悬索响应幅值随激励频率变化的曲线,如图 2 所示。

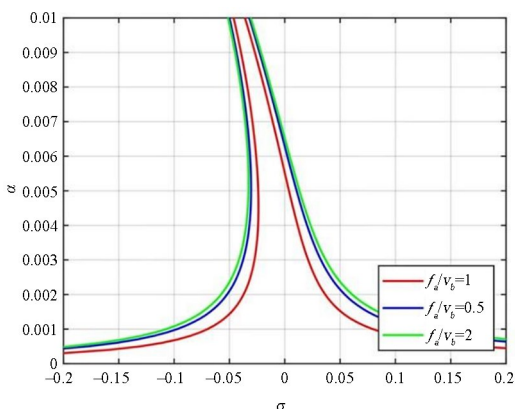


图 2 不同幅值比下的幅频响应曲线

Fig. 2 Frequency-response curves at different amplitude ratios

由图 2 可知,响应幅值随激励频率变化的曲线分为左右两支,响应幅值的大小约为激励幅值的 10 倍左右,并在激励频率很小时急剧放大。结果表明:在其他条件相同的条件下,激励幅值增大,会引起响应幅值增大。进而对比幅值比为 $1/2$ 和 $2/1$ 的两条曲线,发现当外部激励的总能量一定,幅值比为 $2/1$

的曲线的振动响应会更加明显,结果表明:中部激励对于响应幅值的影响大于端部激励的影响。

在幅频曲线的基础上绘制响应相位随激励频率变化的曲线,如图 3 所示。由图可知,悬索的相频曲线存在上下两支分别对应于幅频曲线的左右两支,其中在相位跳跃点附近,相频关系存在多值现象,说明对悬索进行向上扫频和向下扫频,跳跃点是不同的。进一步观察不同曲线跳跃点的位置发现,当激励幅值比发生变化时,向上扫频的跳跃点基本不变,而向下扫频的跳跃点会发生变化, f_a/v_b 的比值越大,频率跳跃点越小。此外,随着激励幅值比变大,相频曲线存在整体向上位移的情况,说明响应相位随激励幅值比的增大而增大。从动力学和振动学的角度来看,当激励幅值增大时,系统内部的振动能量也会增加。这导致系统更容易达到更高的振动水平,从而表现出更大的响应幅值。

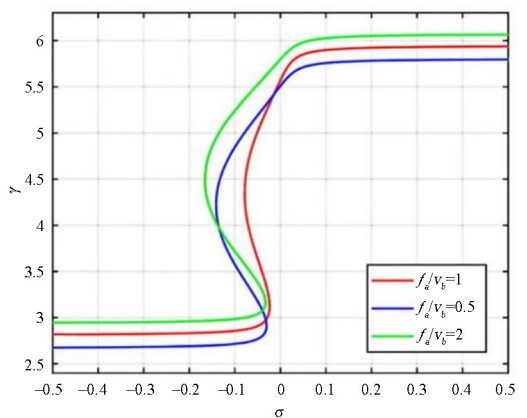


图 3 不同幅值比下的相频响应曲线

Fig. 3 Phase-frequency curves at different amplitude ratios

2.2 激励相位差对振动响应的影响

控制中部激励的激励位置为 $\lambda = 0.5$,激励幅值为 $f_a = 0.0001$,初相位为 $\varphi_{fa} = 0$;控制端部激励 v_b 的激励幅值为 $v_b = 0.0002$,改变端部激励的初相位在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 内变化,即相位差在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 内变化。研究悬索主共振响应的变化和规律。绘制悬索响应幅值随激励频率变化的曲线,如图 4 所示。

计算考虑了 $0 \sim 2\pi$,但是 $\pi \sim 2\pi$ 和 $0 \sim \pi$ 是完全重合的,故在图 4 中不重复绘出。因此仅给出 0 、 $\pi/4$ 、 $\pi/2$ 、 $3\pi/4$ 和 π 五条曲线。结果表明:中部激励和端部激励的相位差为 π 时的响应幅值最小,并且结果总以激励相位差为 π 的幅频曲线对称。

进一步绘制相频曲线,如图 5 所示。与图 4 类

似,相位差为 $3\pi/4$ 和 $5\pi/4$ 的曲线完全重合. 观察各条曲线发现,相频曲线上支的最大值和下支的最小值之间的差值约为 π . 分析各条曲线的变化得到:激励相位差不改变相频曲线的软硬状态. 当激励相位差为 π 时,响应相位最小,并且结果总以激励相位差为 π 的相频曲线对称,随着激励相位差从 π 减小至 0,响应相位 γ 增大,且二者为非线性关系. 当激励相位差为 π 时,响应相位和激励频率之间不再存在多值关系,同理响应幅值和激励频率之间不再存在多值关系,即不存在跳跃点. 而随着激励相位差从 π 减小至 0,向上扫频和跳跃点和向下扫频的跳跃点都会对应减小.

本工况中,不同激励相位差下的幅频曲线和相频曲线均关于相位差为 π 的情形对称,其原因在于式(28)中,当两项正弦函数相位相差 π 时 G 取最小值.

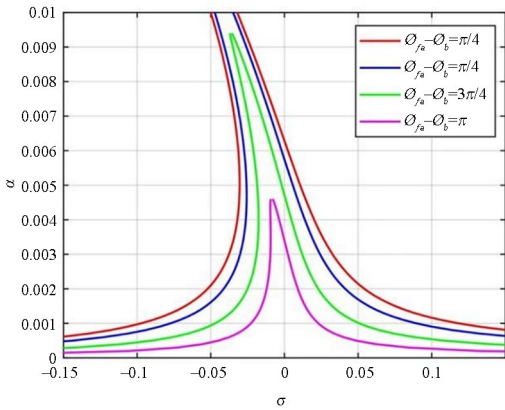


图4 不同相位差下的幅频响应曲线

Fig. 4 Frequency-response curves with different phase differences

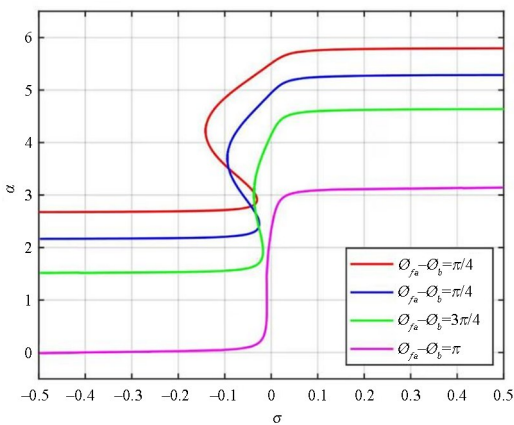


图5 不同相位差下的相频响应曲线

Fig. 5 Phase-frequency curves with different phase differences

2.3 中部激励作用位置对振动响应的影响

控制中部激励的幅值为 $f_a = 0.0001$,初相位为 $\varphi_{fa} = 0$,端部激励的幅值为 $v_b = 0.0001$,初相位

为 $\varphi_{vb} = \pi/4$. 端部激励的作用位置为 $\lambda = 1$,调整中部激励的作用位置从 $\lambda = 0.1$ 至 $\lambda = 0.9$ 变化,研究悬索主共振响应随中部激励作用点的变化关系. 绘制中部激励在不同作用位置下响应幅值随激励频率的变化曲线,如图6所示. 可知,当中部激励的位置越靠近 $\lambda = 1$,即中部激励和端部激励越接近,响应幅值越大,并且在激励频率越接近 0 时,中部激励的作用位置对幅频曲线的影响越明显.

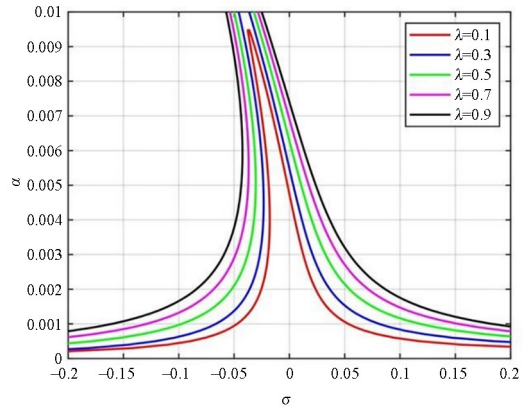


图6 不同激励位置下的幅频响应曲线

Fig. 6 Frequency-response curves at different central excitation positions

进一步绘制相频曲线,如图7所示. 比较图7各曲线可知,随着中部激励越靠近端部激励,响应相位存在非线性增大,相频曲线的跳跃点非线性减小的情况. 进一步,相频曲线的多值区间扩大,响应相位受激励频率影响的程度减弱,尤其是对于相频曲线的下支.

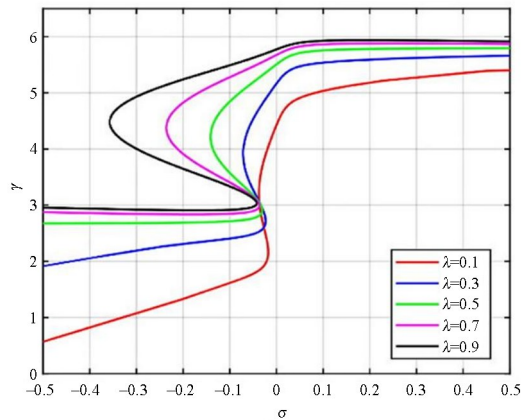


图7 不同激励位置下的幅频响应曲线

Fig. 7 Phase-frequency curves at different excitation positions

3 结论

(1)受中部激励和端部激励共同作用的悬索,激励的幅值比、相位差以及中部激励的位置均不改变幅频曲线的软硬性质.

(2)当中部激励作用于悬索跨中时,中部和端部激励的幅值比越大,悬索响应幅值和相位越大,且向后扫频的跳跃点位置会改变,说明中部激励对于悬索主共振响应的影响相较端部激励更加明显.当中部激励和端部激励的相位差为 π 时,悬索的响应幅值和响应相位达到最小,当二者的相位差偏离时,悬索的主共振响应非线性增大

(3)当中部激励距离端部激励越远,悬索的振动响应越弱,说明两者越远其效应越易相互抵消.

参考文献

- [1] 康厚军,解维东,郭铁丁. CFRP 索斜拉梁面内自由振动建模及参数分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2016, 43(9): 18-25.
KANG H J, XIE W D, GUO T D. Modeling and parameters analysis on in-plane free vibration of cable-stayed beam [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2016, 43(9): 18-25. (in Chinese)
- [2] CONG Y Y, KANG H J, GUO T D. Planar multimodal $1:2:2$ internal resonance analysis of cable-stayed bridge [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 120: 505-523.
- [3] GUO T D, REGA G. Modal dynamics of boundary-interior coupled structures. Part 1: a general approach using components Green's function [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 149: 107230.
- [4] 郭铁丁,康厚军,王连华,等. 工程索结构动力学:非线性建模与分析[J]. 力学与实践, 2016, 38(2): 119-125.
GUO T D, KANG H J, WANG L H, et al. Dynamics of engineering cable: nonlinear modelling and analysis [J]. Mechanics in Engineering, 2016, 38(2): 119-125. (in Chinese)
- [5] 丛云跃,康厚军,郭铁丁,等. CFRP 索斜拉桥面内自由振动的多索梁模型及模态分析[J]. 动力学与控制学报, 2017, 15(6): 494-504.
CONG Y Y, KANG H J, GUO T D, et al. A multiple cable-beam model and modal analysis on in-plane free vibration of cable-stayed bridge with CFRP cables [J]. Journal of Dynamics and Control, 2017, 15(6): 494-504. (in Chinese)
- [6] 赵兆冰,孙测世. 温度变化对端部激励斜拉索共振响应影响[J]. 计算力学学报, 2017, 34(5): 644-649.
- ZHAO Y B, SUN C S. Temperature effects on the resonance responses of stay cables under support excitation [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2017, 34(5): 644-649. (in Chinese)
- [7] 康厚军,赵跃宇,蒋丽忠. 参数振动和强迫振动激励下超长拉索的面内非线性振动[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2011, 42(08): 2439-2445.
KANG H J, ZHAO Y Y, JIANG L Z. In-plane nonlinear vibration of super long stay cables under parametric and forced excitations [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2011, 42(8): 2439-2445. (in Chinese)
- [8] 李聪,孙测世,赵碧航. 端部激励相位差对悬索亚谐波共振响应的影响[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(4): 67-75.
LI C, SUN C S, ZHAO B H. Influence of end excitation phase difference on subharmonic resonant of suspended cable [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(4): 67-75. (in Chinese)
- [9] ZAGHARI B, RUSTIGHI E, TEHRANI M G. Dynamic response of a nonlinear parametrically excited system subject to harmonic base excitation [J]. Journal of Physics: Conference Series, 2016, 744: 012125.
- [10] ZAGHARI B, RUSTIGHI E, GHANDCHI TEHRANI M. Phase dependent nonlinear parametrically excited systems [J]. Journal of Vibration and Control, 2019, 25(3): 497-505.
- [11] EL-ATTAR M, GHOBARAH A, AZIZ T S. Nonlinear cable response to multiple support periodic excitation [J]. Engineering Structures, 2000, 22(10): 1301-1312.
- [12] QIN Q X, TU X, HU Y J, et al. Modeling and loading effect of wind on long-span cross-rope suspended overhead line with suspension insulator [J]. Buildings, 2024, 14(3): 656.
- [13] WANG L H, ZHAO Y Y. Large amplitude motion mechanism and non-planar vibration character of stay cables subject to the support motions [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 327(1/2): 121-133.
- [14] 王志攀. 多索—单梁耦合结构的动力学建模及非线性特性研究[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(4): 41-47.
WANG Z Q. Study on dynamic characteristics and nonlinear characteristics of multi-cable single beam

- coupled structures [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(4): 41–47. (in Chinese)
- [15] 赵珧冰, 彭剑. 温度变化对悬索主共振响应影响分析[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(15): 240–244.
ZHAO Y B, PENG J. Effects of temperature changes on primary resonances of suspended cables [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(15): 240–244. (in Chinese)
- [16] ZHANG W, TANG Y. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, 37(3): 505–526.
- [17] 陈水生, 孙炳楠, 胡隽. 斜拉索受轴向激励引起的面内参数振动分析[J]. *振动工程学报*, 2002, 15(2): 144–150.
CHEN S S, SUN B N, HU J. Analysis of stayed-cable vibration caused by axial excitation [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2002, 15(2): 144–150. (in Chinese)
- [18] 陈自力, 邓瑞基. 集中荷载作用下悬索的主共振分析[J]. *动力学与控制学报*, 2007, 5(4): 350–354.
CHEN Z L, DENG R J. Primary resonance analysis on suspension cable system with a concentrated load [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(4): 350–354. (in Chinese)
- [19] CHEN S M, CHEN Z L, LUO Y S. Non-linear dynamics analysis of in-plane motion for suspended cable under concentrated load [J]. *Journal of Central South University of Technology*, 2008, 15(1): 192–196.
- [20] ZHANG L F, YANG S, CHEN F, et al. Parametric dynamic analysis of a double-hanger system via rigid cross-ties in suspension bridges [J]. *Structures*, 2022, 37: 849–857.
- [21] 唐金琪. 端部激励相位差对斜拉索响应特性影响研究[D]. 重庆: 重庆交通大学, 2020.
TANG J Q. Research on the effect of end excitation phase difference on the response characteristics of stay cables [D]. Chongqing: Chongqing Jiaotong University, 2020. (in Chinese)
- [22] IRVINE H M. *Cable structures*[M]. Cambridge: MIT Press, 1981, 1–152.