

工程中非线性效应浅谈*

陈予恕^{1,2†} 张华彪³ 曹树谦^{1,2} 郭虎伦^{1,2}

(1. 天津大学 机械工程学院, 天津 300350)

(2. 天津市非线性动力学与控制重点实验室, 天津 300350)

(3. 天津商业大学 机械工程学院, 天津 300134)

摘要 第 25 届中国科协年会提出了 10 个前沿科学问题, 其中第四个重大问题难题是“非线性效应会随尺度变化吗?”. 本文重点叙述工程领域的非线性效应(现象), 以及工程领域中建模中的一些非线性因素, 包括结构或者材料变形的非线性、非光滑系统、转轴裂纹、滑动轴承和滚动轴承非线性力、结构的滞回非线性、电路非线性、流致振动等, 为探索该问题提供某些参考.

关键词 非线性效应, 非线性现象, 非线性因素, 综述

中图分类号: O322; TH113

文献标志码: A

Brief Introduction to Nonlinear Effects in Engineering*

Chen Yushu^{1,2†} Zhang Huabiao³ Cao Shuqian^{1,2} Guo Hulun^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

(2. Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Control, Tianjin 300350, China)

(3. School of Mechanics Engineering, Tianjin University of Commerce, Tianjin 300134, China)

Abstract The 25th Annual Meeting of the China Association for Science and Technology raised 10 cutting-edge scientific questions, of which the fourth major problem was “Will nonlinear effects change with scale?” This paper focuses on nonlinear effects (phenomena) in the engineering field, as well as some nonlinear factors in the modeling of engineering, including nonlinearities of structural or material deformation, non-smooth systems, shaft cracks, nonlinear forces of sliding and rolling bearings, structural hysteretic nonlinearity, circuit nonlinearity, flow-induced vibration, etc., providing some references for exploring this problem.

Key words nonlinear effects, nonlinear phenomena, nonlinear factors, review

引言

第 25 届中国科协年会提出了 10 个前沿科学问题, 其中第四个重大问题难题是“非线性效应会随尺度变化吗?”. 本问题的重要意义是——在自然

科学和工程领域, 绝大多数问题的本质都是非线性的, 对非线性效应的研究在物理、数学和工程等学科中都占有极其重要的地位. 本问题是由不同学科交叉衍生出的重要共性前沿问题, 将推动各相关学科进一步交叉和协同发展. 探索本问题, 有望在更

小的极端尺度上理解、掌握、运用非线性效应,实现颠覆性新型功能器件,带来全新科技突破和经济效益.

本文重点叙述工程领域中的非线性效应(现象),及引发其产生的某些非线性力,为探索该问题提供某些参考.

1 工程领域中典型的非线性现象

(1)多稳态:非线性系统可以具有多个不同的平衡位置和稳态运动,系统的动力学行为既取决于这些平衡位置和稳态运动的稳定性,也与初始条件有关.系统参数的变化或者外界的扰动都可能使系统发生平衡位置和稳态运动的改变,导致系统的响应发生跳跃或者突变^[1-3].

(2)亚/超谐共振:亚/超谐共振是在非线性振动系统中出现的特殊共振现象,引发共振的外部激励的频率并不与系统的固有频率接近,而是高于系统的固有频率(亚谐共振),或者低于系统的固有频率(超谐共振),且往往和系统的固有频率成倍数或者分数关系^[1,2].

(3)组合共振:组合共振是当系统同时受到两个或多个不同频率的外部激励时,外部激励的频率之间以及和系统固有频率之间存在特定的数学关系,导致系统表现出的非线性共振行为^[1,2].

(4)内共振:对于复杂系统,系统内部的不同自由度之间由于系统内部的非线性耦合导致的不同自由度的响应相互激发,引起的共振现象^[1,2].

(5)自激振动(极限环):自激振动是除自由振动和受迫振动之外工程中大量存在的另一种振动形式.自激振动依靠系统外的恒定的能源来补充能量,系统依靠自身运动状态的反馈作用(非线性因素)调节能量输入,从而维持不衰减的持续振动.通常自激振动表现为稳定或者不稳定的极限环^[3].

(6)参数振动:参数振动由外界激励产生,但激励不是以外力形式直接施加于系统,而是通过系统内参数的周期性改变间接地实现.系统在参数激励的作用下可能响应很微弱,也可能出现剧烈的共振现象,这取决于系统响应的稳定性^[3].

(7)分岔和混沌:分岔是非线性系统中参数变化引起系统行为发生定性的改变.混沌是在确定系统中出现的类似随机的过程.混沌在宏观表现为无序无律,有内随机性、非周期和局部不稳定性(初

值敏感),在微观上又表现为有序有律,具有无穷嵌套的自相似结构,存在一定的普适规律和自然常数^[4,5].

2 工程领域中建模的一些非线性因素

2.1 结构或者材料变形的非线性

工程中最常见的非线性是由结构或者材料变形引起的,主要包括材料非线性和几何非线性^[6,7].如果系统的非线性是由于材料应力与应变关系的非线性引起的,则称为材料非线性,即材料的应力—应变关系不再是直线,如工程上一些人造纤维、塑料、复合材料等具有非线性的材料本构关系.如果材料的应变很小,应力与应变关系仍然满足虎克定律,而结构发生了大变形使系统的受力状态发生了显著的变化,以至不能适用线性的分析方法时就称为几何非线性.工程中的几何非线性主要发生在一些薄壁、细长零部件中,包括梁、浅拱、索、轴、板、壳的大变形、大挠度等问题,例如卫星太阳能帆板和飞机机翼的大变形.

2.2 非光滑系统

非光滑动力系统大体可以分为三类:分段光滑系统、Filippov 系统、刚性碰撞系统^[8].

分段光滑系统的向量场连续但雅可比矩阵在分段点处间断,转子的碰摩是工程中最常见的分段光滑系统.转子碰摩一般发生在两个位置,篦齿密封^[9]和叶尖密封^[10],两种情况的碰摩力都是由接触力和摩擦力组合而成,其中摩擦力可用库仑摩擦力或者与接触点速度有关的非线性摩擦力描述,摩擦力的方向和接触点速度的方向相反.在没有发生接触的时候,接触力为零,在发生接触后两者接触力的处理是不同的.对于篦齿密封的碰摩,一般可以简化为两个圆柱面的碰摩处理,其接触力可以考虑为变形量的线性函数或按赫兹接触理论处理.对于叶尖密封,当前研究主要将叶片考虑为悬臂梁或者利用有限元模型,其接触力表达式的确定,既需要考虑机匣的变形,这种变形可以描述为接触力的线性函数或按赫兹接触理论处理,还需要考虑到叶片在接触力和摩擦力作用下的弯曲变形导致的轴向长度的变化,将两种变形量综合形成叶片碰摩导致的总的变形量,进而确定接触力的表达式.此外

由于叶尖是离散的状态,需要分别计算每一个叶尖的位置来判断该叶片是否发生接触。

Filippov 系统的状态空间连续,但其向量场和雅可比矩阵是不连续的,典型的如干摩擦系统^[11],两摩擦物体有相对运动时,动摩擦力方向与相对速度方向相反;当相对速度为零时,两摩擦物体之间存在静摩擦力,静摩擦力的大小介于零和临界摩擦力之间,方向与相对运动趋势相反。摩擦力变化由黏滞(静摩擦)到滑移(动摩擦)的变化是不连续的。目前对于干摩擦的描述一般采用非线性摩擦力的简化模型或者库伦摩擦模型。其中非线性摩擦模型考虑了动摩擦系数与摩擦表面相对速度的依赖关系,且最大静摩擦到动摩擦的转变是连续的。库伦摩擦模型由静摩擦系数和较小的动摩擦系数组成,最大静摩擦到动摩擦的转变是不连续的。

工程中刚度较大的物体的碰撞可以简化为刚性碰撞系统处理,刚性碰撞认为碰撞是瞬间完成的,冲击时间为零。刚性碰撞有正碰撞和斜碰撞两种类型^[12,13]。对于正碰撞在碰撞过程中只考虑能量的损失,并利用恢复系数和动量守恒定理得到碰撞前后的瞬时速度关系,因此其在碰撞时刻的向量场是间断的。对于斜碰撞,碰撞物体在接触点不但具有相对法向速度,还有相对切向速度,因此在分析过程中需要考虑相对切向引起的摩擦以及摩擦是否会导致碰撞后切向运动的逆向等问题。工程中常见的刚性碰撞问题包括振动锤、打桩机的振动,以及齿轮的拍击、航天器伸展系统由于关节间隙而发生冲击等等。

2.3 结构的滞回非线性

滞回非线性是很常见的系统非线性特性,其主要特点是多值性和非光滑性,非常容易产生分岔、混沌等复杂动力学行为^[14]。在实际工程中,呈现滞回非线性的材料有很多种,包括粘弹性材料、金属橡胶、钢丝绳、压电陶瓷、形状记忆合金等。当系统存在滞回非线性时,其力一位移曲线或应力—应变曲线就会形成滞回线。滞回线一般可分解为两部分:一部分是滞回线的基架线,表示弹性力,它一般不随频率变化,并且不消耗能量;另一部分是纯滞回环,表示阻尼力,可以用不同种类的阻尼来描述,滞回环的面积等于消耗的能量。正阻尼时与负阻尼时滞回线的走向相反,前者为顺时针,后者为逆时

针。滞回非线性的数学模型有很多种,到目前为止,具有代表性的有双线性模型^[15]、Bouc-Wen 模型^[16]、迹法模型^[17]、Bingham 模型^[18]等。

2.4 电路中的非线性

非线性电路理论是非线性科学研究的重要分支之一。早在 1920 年范德波就研究了三极管的非线性振荡,提出了著名的范德波方程。蔡绍棠在 1984 年提出了“蔡氏电路”,该电路由四个线性元件(两个电容、一个电感、一个电阻)和一个被称为蔡氏二极管的非线性电阻组成。蔡氏二极管具有三段分段线性。在此基础上,人们通过更换电路中的非线性元件,实现了更高阶数的蔡氏电路^[19]。近年来随着电子信息产业的发展,半导体器件受到了越来越多的重视。半导体器件通过控制端直流偏置的不同使器件上的 PN 结处于各异状态从而实现器件的性能。随着器件工作频率和功率的增大,一些半导体自身特性与器件结构上的寄生电容效应导致其非线性特性逐渐显露,进而产生频谱泄露、谐波失真等非线性现象。电路中常见的非线性元件有:(1)非线性电阻,最为典型的非线性电阻有忆阻器,它由蔡绍棠提出,是表示磁通与电荷关系的电路器件,具有电阻的量纲,但它的阻值是由流经它的电荷确定。通过测定忆阻的阻值,便可知道流经它的电荷量。此外压敏电阻,半导体二极管、晶体管、场效应管等器件都是非线性电阻。(2)非线性电感,如铁芯电感,其电感量与通过电流的频率相关。(3)非线性电容,其 U-Q 曲线表现为一条曲线,常见的晶体管、变容二极管都可以看作非线性电容。此外,一些电力电子器件由于包括很多非线性元件,也表现出很强的非线性特性,如 DC-DC 变换器、更复杂的功率因数校正器(PFC)和逆变器系统等。

2.5 流致振动

工程中空气、水等流体流经固体结构时会对固体表面施加交替相间的非线性流体力,从而导致结构发生振动。常见的流致振动主要有涡激振动和驰振^[20]。由于流体黏性作用使得其在绕流柱体后侧产生了交替脱落的漩涡,从而引起了柱体横向的往复运动,被称为涡激振动。涡激振动通常发生在圆柱体结构上,比较经典的当属桥梁悬索的涡激振

动。涡激振动是一个双向耦合的复杂问题,其具有非线性、自激性、自限性等多个特点。对于非圆柱体,也可能发生涡激振动,但是更常见的是驰振。驰振是一种自激振动,当流体绕过非圆柱体时,会在非圆柱体上产生升力,升力随流速增大而增大。而当来流速度达到某一临界值时,升力将克服结构的阻尼作用而发生高幅、低频振动,此时的振动即为驰振。输电线路大幅舞动以及飞机机翼的颤振是工程中典型的驰振现象。

2.6 微纳尺度下的非线性因素(极端尺度结构非线性力)

微机电系统的尺寸通常是微米级甚至纳米级,由于尺寸缩小的影响,许多物理现象表现与宏观世界有很大区别,与微结构特征尺寸高次方成正比的力,如重力、惯性力、电磁力等的作用相对减弱,而与微结构特征尺寸低次方成正比的力,如静电力、弹性力等的作用显著增加。微结构的几何尺度越小,其表面积与体积之比越大,表面力与体积力之比也越大,在传统机械中常常被忽略的表面力,如静电力、范德华力、摩擦力等成为了主导作用力。常见的微尺度情况下的非线性力包括静电力、范德华力、卡西米尔力、气体压膜阻尼力等等^[21,22]。带电物体间产生相互吸引的静电力,常见的平行板电容的静电力与平行板面积成正比,与平行板间距的平方成反比。范德华力是分子和原子间的弱相互作用力,范德华力分为引力和斥力,当距离大于 0.4 nm 时表现为引力,当距离低于 0.4 nm 时,表现为斥力。在微纳机电系统中,范德华力以引力形式存在,其大小与间距的3次方成反比。根据量子电动力学,真空能量以粒子的形态出现,真空中充满着几乎各种波长的粒子,若使两个金属板紧靠在一起,当金属板之间的距离小于真空中的粒子的波长时,长波排除,金属板外的其他波就会产生一种使它们相互聚拢的力。两者距离越近,吸引力越大,即卡西米尔效应。卡西米尔力的大小与距离的4次方成反比。此外,在微机电系统中,如果系统内不为真空,相对运行的平行板之间将存在气体压膜阻尼力。压膜阻尼力和平板间距的三次方成反比,与相对运动速度成正比。

2.7 转轴裂纹^[23]

裂纹产生的原因主要是由于转子材料本身缺

陷或长时间的服役产生疲劳裂纹。裂纹的存在使转轴发生刚度周期性变化,从而使转子系统产生了高频振动现象。为分析裂纹转子的振动特性,研究者提出了各不相同的裂纹模型。现有的裂纹模型一般来说可分为两大类:常开裂纹模型和开闭裂纹模型,其中开闭裂纹又可分为重力决定开闭的模型和裂纹面应力决定开闭的模型。常开裂纹适用于裂纹表面上始终受拉应力的转子,对转轴刚度的影响主要是产生一个局部的不对称定值削弱。开闭裂纹适用于裂纹面上时而受拉应力、时而受压应力的裂纹转子。目前对于开闭裂纹转子刚度的计算一般是通过计算裂纹引起的附加柔度来求出刚度变化的幅值,然后用数值方法求解方程。附加柔度的计算方法主要有三种:用切出长度等于裂纹深度的开裂弓形部分的轴段来等效计算裂纹的影响;利用断裂力学能量释放率(应变能)来计算裂纹的附加柔度;考虑一个宽度与裂纹深度相等或是裂纹深度的2倍且以裂纹面为对称中心的裂纹圆柱,用有限元或边界元方法直接计算其柔度。不同的刚度模型,不同的计算附加柔度方法,得到的裂纹转子的运动微分方程及其求解方法也不同。在用柔度系数法求出裂纹段的刚度变化后,利用开关函数来模拟裂纹的展开和闭合。开关函数是人为设想的裂纹开闭的函数,目前主要有以下几种:方波模型,即认为裂纹的开闭及轴刚度的变化可用阶跃函数来表示;余弦波模型,该模型粗略考虑了裂纹半开半闭的过渡过程;综合模型,该模型综合了方波模型和余弦波模型的优点,给出了裂纹开闭状态及过渡过程与裂纹深度、转轴在裂纹开闭处的挠曲状态之间的关系;非线性模型,考虑了系统非线性涡动时裂纹和轴心位移之间关系对裂纹开闭的影响,这种模型同样适用于重力占优、非重力占优、协调和非协调响应的情况,也是利用轴心位移矢量与裂纹方向之间的夹角来判断裂纹的开闭;插值函数模型,即先求得裂纹在完全张开和半开半闭两种情形下的局部柔度矩阵,再用插值法求得裂纹在其他状态下引起的局部柔度的变化。

2.8 转轴不对中

转子不对中是旋转机械运行中主要的故障形式。转子不对中存在联轴器不对中和轴承不对中的两种情况。其中,联轴器不对中又可分为平行、偏

角、平行偏角耦合三种不对中情况,而轴承不对中包括偏角不对中和标高变化两种情况^[24]。目前研究对于不对中的描述主要有两种方式:一是根据联轴器不对中的运动几何关系推导不对中力和力矩,引入到系统动力学方程中;二是将联轴器环节视为包含平动和转动运动的 6 自由度节点所组成的单元,组集到转子系统中^[25]。转子系统出现不对中后,会导致转子出现偶数倍频的弯曲振动分量和奇数倍频的扭转振动分量。

2.9 滑动轴承非线性力^[26]

滑动轴承广泛应用于汽轮机、燃气轮机等大型旋转机械中。滑动轴承油膜力是典型的非线性力,转子在轴承里的位置、扰动量速度、转速其存在可能导致转子出现油膜涡动和油膜振荡。油膜涡动和油膜振荡不仅会影响机械的工作精确度和灵敏度,还会对系统自身造成破坏、缩短寿命和降低工作效率等。目前滑动轴承的研究均基于轴承润滑方程——Reynolds 方程,轴承的油膜力通过求解 Reynolds 方程获得。早期的轴承油膜力的描述主要有无限长轴承理论和无限短轴承理论。无限长轴承理论,假设轴承长度为无穷,只保留 Reynolds 方程中的周向压力项;无限短轴承理论,假设轴承长度为零,只保留 Reynolds 方程中的轴向压力项。由于二者均基于极限长径比假设,与实际常用长径比下的有限长轴承油膜力相差较大,因此后续研究者将研究聚焦于有限长轴承油膜力精确计算上。有限长轴承油膜力求解方法主要有两类,解析法和数值法。解析法主要是给定边界条件的分离变量法和正则摄动法,数值法主要是有限差分法和数据库法。此外,挤压油膜阻尼器以及气体滑动轴承和滑动轴承具有相似的非线性因素。

2.10 滚动轴承非线性力

随着近年来国家对航空发动机产业的重视以及两机专项的开展,滚动轴承的非线性因素越来越受到研究者的重视。滚动轴承的非线性主要包括两部分,一是滚动体和内外圈接触的赫兹接触力,二是时变刚度效应,因为滚动体在自转的同时也在绕轴承轴线公转,其位置是随时间变化的,对应每一时刻滚动体接触力的大小和方向都将发生改变^[27,28]。目前对于滚动轴承非线性的考虑,主要假

设滚动体为刚体,只考虑内外圈的变形;滚动体均匀分布且无相对滑动;不考虑润滑的影响;不考虑滚动体自转的影响;滚动体公转速度由设定转速确定,则可确定每一时刻每个滚动体所在位置对应的极角位置,进而确定该滚动体接触力的大小和方向,最后将所有滚动体接触力相加可确定滚动轴承的支承力。

2.11 复杂转子系统的非线性因素

工程中复杂转子系统(两个及以上耦合转子系统)的非线性问题,主要的非线性因素和单转子相同,仍是裂纹、碰摩、轴承等问题。联轴器法兰连接螺旋紧力不均、连接面的间隙和摩擦以及转子各部分的温度分布不均都会产生新的非线性因素。

3 结束语

本文重点叙述工程领域中的非线性效应(现象),及引发其产生的某些非线性力,为探索工程中的非线性问题提供一些参考,但由于工程问题的复杂性以及工程中的新问题不断地涌现,总结未必准确。在工程领域,绝大多数问题的本质都是非线性的,在国民经济、国防工业和工程技术中有大量的重要实际问题迫切需要用非线性动力学理论和方法加以处理。深入开展非线性动力学工程应用研究,针对国家的重大战略需求,将科学理论研究和解决生产实际问题结合起来,切实推进产业的进步,必将为非线性动力学理论的研究和发展提供更为广阔的空间。

参考文献

- [1] 陈予恕. 非线性振动、分叉和混沌理论及其应用[J]. 振动工程学报, 1992(3): 235—250.
CHEN Y S. Theory and applications of nonlinear vibration, bifurcation and chaos [J]. Journal of Vibration Engineering, 1992(3): 235—250. (in Chinese)
- [2] 陈予恕. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
CHEN Y S. Nonlinear vibrations [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese)
- [3] 刘延柱, 陈立群. 非线性动力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000.
LIU Y Z, CHEN L Q. Nonlinear dynamics [M].

- Shanghai: High Education Press, 2000. (in Chinese)
- [4] 陈予恕. 非线性振动系统的分叉与混沌理论[M]. 北京: 高教出版社, 1993.
- CHEN Y S. Bifurcation and chaos theory of nonlinear vibration system [M]. Beijing: High Education Press, 1993. (in Chinese)
- [5] 朱照宣. 非线性动力学中的混沌[J]. 力学进展, 1984(2): 129—146.
- ZHU Z X. Chaos in nonlinear dynamics [J]. Advances in Mechanics, 1984(2): 129—146. (in Chinese)
- [6] 钱伟长. 关于非线性力学[J]. 力学进展, 1983(2): 117—118.
- QIAN W Z. On nonlinear mechanics [J]. Advances in Mechanics, 1983(2): 117—118. (in Chinese)
- [7] 施泽华, 戚冠华. 非线性力学及其现状[J]. 华水科技情报, 1983(2): 15—17.
- SHI Z H, QI G H. Nonlinear mechanics and its current situation [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 1983(2): 15—17. (in Chinese)
- [8] 李双宝, 马茜茜, 张伟. 非光滑系统全局动力学 Melnikov 方法的研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(2): 9—20.
- LI S B, MA Q Q, ZHANG W. Research progress in Melnikov method for global dynamics of non-smooth systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(2): 9—20. (in Chinese)
- [9] 江俊, 陈艳华. 转子与定子碰摩的非线性动力学研究[J]. 力学进展, 2013, 43(1): 132—148.
- JIANG J, CHEN Y H. Advances in the research on nonlinear phenomena in rotor/stator rubbing system [J]. Advances in Mechanics, 2013, 43(1): 132—148. (in Chinese)
- [10] 马辉, 太兴宇, 李焕军, 等. 旋转叶片—机匣碰摩模型及试验研究综述[J]. 航空动力学报, 2013, 28(9): 2055—2069.
- MA H, TAI X Y, LI H J, et al. Literature survey of rub-impact model and experiment of rotating blade and casing [J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(9): 2055—2069. (in Chinese)
- [11] 丁千, 翟红梅. 机械系统摩擦动力学研究进展[J]. 力学进展, 2013, 43(1): 112—131.
- DING Q, ZHAI H M. The advance in researches of friction dynamics in mechanics system [J]. Advances in Mechanics, 2013, 43(1): 112—131. (in Chinese)
- [12] 韩维, 胡海岩, 金栋平, 等. 斜碰撞振动研究的若干进展[C]//首届全国航空航天领域中的力学问题学术研讨会论文集(下册). 北京: 北京航空航天大学, 2004: 5.
- HAN W, HU H Y, JIN D P, et al. Review and some results of the oblique-impact vibrating system [C]//Proceedings of the First National Symposium on Mechanics in the Field of Aerospace (Volume 2). Beijing: Beihang University, 2004: 5. (in Chinese)
- [13] 乐源. 多自由度碰撞振动系统的对称性、分岔与混沌研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2008.
- YUE Y. Research on symmetry, bifurcation and chaos of multi-degree-of-freedom collision vibration systems [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2008. (in Chinese)
- [14] 李韶华, 杨绍普. 滞后非线性模型的研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2006, 4(1): 8—15.
- LI S H, YANG S P. Research status of hysteretic non-linear models [J]. Journal of Dynamics and Control, 2006, 4(1): 8—15. (in Chinese)
- [15] 吴志强, 张振华, 郝颖. 双线性双滞后环系统的约束分岔[J]. 物理学报, 2011, 60(12): 71—78.
- WU Z Q, ZHANG Z H, HAO Y. Constrained bifurcations of the system with double-loop bilinear hysteresis [J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(12): 71—78. (in Chinese)
- [16] 牛牧青, 陈立群. 含绞制梁结构的非线性隔振系统建模与仿真[J]. 振动与冲击, 2020, 39(20): 42—46.
- NIU M, CHEN L Q. Modelling and simulation of a wire rope based nonlinear vibration isolation system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(20): 42—46. (in Chinese)
- [17] 林瑞霖, 黄次浩, 陈国钧. 迟滞非线性弹性元件动力特性数学模型[J]. 海军工程大学学报, 2000(1): 28.
- LIN R L, HUANG C H, CHEN G J. Mathematical models for dynamical characteristics of hysteretic non-linearity on elastic elements [J]. Journal of Naval University of Engineering, 2000(1): 28. (in Chinese)
- [18] 李韶华, 杨绍普, 郭树起. 采用改进 Bingham 模型的两自由度汽车悬架动力分析[J]. 科技导报, 2009, 27(2): 33—37.
- LI S H, YANG S P, GUO S Q. Dynamical analysis of two DOF vehicle suspension system using revised Bingham model [J]. Science & Technology Review, 2009, 27(2): 33—37. (in Chinese)

- [19] 张晓芳, 陈章耀, 毕勤胜. 非线性电路系统动力学的研究进展及展望[J]. 电路与系统学报, 2012, 17(5): 124—129.
ZHANG X F, CHEN Z Y, BI Q S. Development and prospect of nonlinear dynamics in electrical system [J]. Journal of Circuits and Systems, 2012, 17(5): 124—129. (in Chinese)
- [20] 练继建, 燕翔, 刘昉. 流致振动能量利用的研究现状与展望[J]. 南水北调与水利科技, 2018, 16(1): 176—188.
LIAN J J, YAN X, LIU F. Development and prospect of study on the energy harness of flow-induced motion [J]. South-to-North Water Transfers and Water Science & Technology, 2018, 16(1): 176—188. (in Chinese)
- [21] 孟光, 张文明. 微机电系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
MENG G, ZHANG W M. Micro-electro-mechanical system dynamics [M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)
- [22] 梁斌斌, 张龙, 王炳雷, 等. 考虑卡西米尔力的静电激励 NEMS 吸合特性及其尺寸效应研究[J]. 固体力学学报, 2016, 37(3): 247—253.
LIANG B B, ZHANG L, WANG B L, et al. Study on the size dependence and pull-in instability of electrostatically actuated NEMS with Casimir force [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2016, 37(3): 247—253. (in Chinese)
- [23] 陈予恕, 张华彪. 航空发动机整机动力学研究进展与展望[J]. 航空学报, 2011, 32(8): 1371—1391.
CHEN Y S, ZHANG H B. Review and prospect on the research of dynamics of complete aero-engine systems [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(8): 1371—1391. (in Chinese)
- [24] 夏松波, 张新江, 刘占生, 等. 旋转机械不对中故障研究综述[J]. 振动、测试与诊断, 1998(3): 3—7, 73.
Xia S B, Zhang X J, Liu Z S, et al. A survey of research on misalignment of rotary machinery [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1998(3): 3—7, 73. (in Chinese)
- [25] 陈果, 杨默哈, 李伦绪, 等. 转子支承不对中故障建模与机理分析[J]. 航空发动机, 2023, 49(3): 75—88.
CHEN G, YANG M H, LI L X, et al. Modeling and mechanism analysis of rotor-bearing misalignment fault [J]. Aeroengine, 2023, 49(3): 75—88. (in Chinese)
- [26] 杨金福. 流体动力润滑及轴承转子系统的稳定性研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2006.
YANG J F. Study on stability of fluid dynamic lubricates and bearing rotor system [D]. Beijing: North China Electric Power University, 2006. (in Chinese)
- [27] 张智勇. 球轴承—转子系统变柔度振动的分岔与滞后行为[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
ZHANG Z Y. Bifurcations and hysteresis of varying compliance vibrations of a ball bearing-rotor system [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015. (in Chinese)
- [28] 胡爱军, 吉新星, 向玲, 等. 滚动轴承非线性时变参数动力学模型与故障机理研究[J]. 机械工程学报, 2022, 58(19): 139—147.
HU A J, JI X X, XIANG L, et al. Nonlinear time-varying parameter dynamic model of rolling bearing and failure mechanism research [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(19): 139—147. (in Chinese)