文章编号:1672-6553-2024-22(12)-018-011

# 基于改进型 PSO 的 SINDy 建模应用:微动致动器\*

金煜<sup>1</sup> 孙煜<sup>1†</sup> 于健博<sup>2</sup> 吴聪懿<sup>1</sup> (1.复旦大学工程与应用技术研究院,上海 200433)

(2.复旦大学 微电子学院,上海 200433)

摘要 微动致动器凭借其卓越的响应特性和微纳米级步长,在半导体装备领域中发挥了超精密运动的重要 作用.然而,其存在的迟滞和蠕变等非线性特性显著制约了其精度和稳定性的提升.传统的建模方法存在计 算成本较大,模型复杂,无法直接求得逆模型等问题.为克服上述挑战,本研究通过引入了非线性系统动力 学的稀疏辨识(SINDy)算法,进一步优化模型表达式的参数适配,提升建模精度.首先,通过 SINDy 算法建 立正交候选非线性元素数据库,然后,由稀疏回归算子结合正则化对构建的模型进行稀疏惩罚,获得简化后 的包含输入与输出的模型框架表达式.在建模过程中,为了解决 SINDy 算法在稀疏惩罚中因精度下降导致 的过拟合问题,本文基于摆线原理受启发,提出了改进惯性权重的粒子寻优算法,对 SINDy 模型的框架表达 式进行再次参数优化.实验结果表明,经过改进的 SINDy 算法展现出更好的性能.与现有方法相比,本方法 不仅能够降低建模成本和模型复杂度,还能够显著提高非线性模型的拟合精度.

关键词 微动致动器, 稀疏回归, 粒子群优, 非线性特性中图分类号:TP273文献标志码:A

# SINDy Modeling Application Based on Improved PSO: Micro-Actuators\*

Jin Yu<sup>1</sup> Sun Yu<sup>1†</sup> Yu Jianbo<sup>2</sup> Wu Congyi<sup>1</sup>

(1. Academy of Engineering and Technology, Fudan University, Shanghai 200433, China)

(2. School of Microelectronics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract** Micro-actuators play a crucial role in achieving ultra-precision motion in the field of semiconductor equipment due to their exceptional response characteristics and micro-nano step size. However, nonlinear characteristics such as hysteresis and creep significantly limit the improvement of accuracy and stability. Traditional modeling methods suffer from issues like high computational cost, complex models, and inability to directly obtain inverse models. To overcome these challenges, this study introduces the sparse identification of nonlinear dynamics (SINDy) algorithm for optimizing parameter adaptation of model expressions and enhancing modeling accuracy. Firstly, an orthogonal candidate database of nonlinear elements is established using the SINDy algorithm. Then, sparse regression operators are combined with regularization to penalize the constructed model, resulting in a simplified framework expression that includes input and output variables. In order to address overfitting caused by decreased accuracy during sparse punishment in SINDy algorithm, this paper proposes an improved particle optimization algorithm with enhanced inertia weight inspired by cycloidal principle for parameter optimization on the framework expression of SINDy model. Experimental results demonstrate superior performance of the improved SINDy algorithm which not only reduces modeling costs and complexity but also significantly improves fitting accuracy compared to existing methods.

Shanghai Sailing Program (23YF1401600).

<sup>2023-08-14</sup> 收到第1稿, 2024-08-27 收到修改稿.

<sup>\*</sup>国家自然科学基金资助项目(62304045),上海市扬帆计划(23YF1401600), National Natural Science Foundation of China (62304045),

<sup>†</sup>通信作者 E-mail:sunyu\_aet@fudan.edu.cn

Key words micro-actuators,

sparse regression, particle swarm optimization, nonlinearity

# 引言

随着科学技术的飞速发展,高精度微动致动器 如压电致动器[1]等在运动控制领域中的核心地位 日益凸显,基于其卓越的纳米级运动分辨率和出色 的可重复性,在超精密运动控制领域中获得了广泛 的应用.然而,微动致动器所固有的非线性特性,可 能导致系统绝对精度的降低以及系统稳定性的下 降<sup>[2]</sup>.因此,微动致动器的非线性特性的精确辨识 与建模,对于提升运动控制系统的整体性能至关重 要.以迟滞环这一典型的非线性模型为例,现有的 主要建模方法归纳为基于算子、微分方程和智能计 算的三大类别.其中,基于算子的 Prandt-Ishlinskii (P-I)模型虽能有效描述非线性特征<sup>[3]</sup>,但其依赖 于复杂的二重积分运算,涉及大量的计算资源,且 识别过程烦琐.而基于微分方程的模型,如 Duhem<sup>[4]</sup>、Backlash<sup>[5]</sup>和 Bouc-Wen<sup>[6]</sup>等,尽管在描述 迟滞现象上具有一定的优势,但在求解逆模型问题 时往往面临显著的计算成本,导致应用上的限制. 此外,基于智能计算的模型,特别是神经网络模型, 虽然在非线性拟合上表现出色,但因其建模过程的 不透明性,难以对模型背后的物理含义进行深入的 研究与解释.

数据驱动(Data-Driven)是一种能够在一定约 束条件下控制非线性系统的控制方法,数据驱动包 含模型识别和闭环控制两个部分, Data-Driven 所 需要的仅是系统的输入与输出数据[7].当一个被控 系统的模型未知目包含大量的非线性因素时,建模 成本会变高,建模精度上不精准. Data-Driven 就可 以很好地解决这些问题,所以 Data-Driven 应用在 压电致动器这类强非线性系统的运动控制就成了 一种新的方法[8].非线性系统动力学的稀疏辨识 (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics, SINDy)<sup>[9]</sup>是一种基于对输入输出作稀疏分析的模 型辨识算法,在模型辨识精准度与模型简化之间, 可以找到平衡点. SINDy 通过精准识别非线性系 统中各因素的离散状态,构建出精确的非线性模 型. SINDy 算法作为一个数据驱动的模型识别工 具,提供了一个基于稀疏回归优化的模型框架<sup>[10]</sup>. 这一框架在简化模型复杂度的同时快速拟合,从而 显著提升了模型的泛化能力,然而,模型降维简化 必然会导致建模精度的损失,影响运动控制的精 度.因此,优化算法的引入可以帮助提升模型参数 辨识的准确性. 粒子群优化算法 (Particle Swarm Optimization, PSO)是一种有效的快速寻找最优 参数的方法<sup>[11]</sup>,常规的 PSO 算法存在早熟的风 险,通过对 PSO 算法的深入研究,针对其缺陷,人 们提出了 LDW-PSO 算法 (Linearly Decreasing Inertia Weight-Particle Swarm Optimization Algorithm)<sup>[12]</sup>,即对惯性权重进行了改进研究,学者 研究将遗传学中的变异操作被加入了算法当中,在 算法陷入局部极值之后给予一个随机干扰,使其能 够跳出局部陷阱,在对算法进行优化调整时,在迭 代初期需要保持一个较大的权重值,增强了全局搜 索的强度<sup>[13]</sup>. 迭代后期又保持一个较小的权重值, 延长迭代后期局部搜索时间,从而增强了局部搜索 的强度,以上这些非线性惯性因子的研究极大地提 高了寻优效果,但是在寻优的整体速率上相对传统 的线性定值惯性权重是缓慢的.为了提升非线性惯 性因子的 PSO 寻优的整体速度,本研究以摆线问 题<sup>[14]</sup>为启发,提出了一种基于摆线曲线为非线性 递减惯性权重的策略.优势在于相比基于改进的非 线性惯性因子的基础上,提高了整体的寻优速率, 具备更快的启动时间.同时,将改进的 PSO 算法与 SINDy 相结合,再次辨识模型系数提高建模精度.

本研究章节内容安排如下:第一节综述了微动 致动器的类别以及其非线性特征. 第二节介绍了 SINDv 算法的原理. 第三节提出了一种结合改进 型非线性权重 PSO 对 SINDy 模型框架进行再次 辨识的 BPSO-SINDy 算法. 第四节搭建了实验平 台全面地验证了 BPSO-SINDy 算法的有效性. 第 五节对全文进行了总结并展望未来的研究方向.

#### 微纳致动器的非线性特性 1

#### 1.1 压电惯性致动器的迟滞效应

压电迟滞是指压电材料在电场作用下,其输出 位移与驱动电压之间在上升和下降过程中存在明 显差异的现象.这种迟滞特性是压电材料的一种固 有性质,尤其在精度要求较高的应用中,其影响尤 为显著.压电惯性致动器(Piezo Inertia Actuator, PIA)是压电致动器的一种,其运动方式属于黏滑 式,其结构包括压电叠层、柔性柔度和摩擦接触板. 如图1所示,其中, II[•]为非线性算子, F[•]为 耦合力算子, G[•]为动态响应环节.压电惯性致 动器<sup>[15]</sup>的工作原理依赖于压电叠堆产生的推力, 这一推力通过柔性铰链的形变机制传递给摩擦头. 压电叠堆的瞬间伸缩动作,能够产生与压电惯性致 动器的相对位移,驱动摩擦头进行运动.

这种基于摩擦机制的运动方式,显著地克服了 传统压电致动器行程受限的局限性.然而,与常规 的压电迟滞特性不同,压电惯性致动器的非线性行 为融合了摩擦和迟滞两种特性,这增加了其迟滞环 辨识的复杂成分.



# 1.2 压电致动器的蠕变效应

蠕变现象是压电致动器<sup>[16]</sup> (Piezo Actuator, PEA)中一个常见的非线性因素 $\Pi$ [•]. 当输入电 压V保持在一定水平时,压电陶瓷驱动器的输出 位移P随时间逐渐变化,影响稳态精度.

如图 2 所示,蠕变与施加电压后压电陶瓷堆的 剩余极化有关.当电压保持恒定时,压电陶瓷堆内 的晶体畴随着时间的推移逐渐重新排列.蠕变速率 随时间呈对数衰减,输入电压振幅变化等因素也会 影响蠕变行为.



# 1.3 磁滞伸缩器的迟滞效应

磁致伸缩致动器<sup>[17]</sup>(Magneto Strictive Actuator, MSA)作为一种依赖于外部磁场精确控制磁 致伸缩材料位移的高端致动装置,其性能在精密机 械和自动化领域中备受瞩目.这种致动器主要由合 金梁、两组独立工作的线圈以及精密的机械结构组 成.其中,一组线圈负责生成稳定的磁场偏置,为磁 致伸缩材料提供一个初始的磁化状态;而另一组线 圈则作为输入线圈,接收输入电流 I 并据此调整磁 场强度,从而控制磁致伸缩材料的位移 P. 在磁致 伸缩致动器的运作过程中,磁滞效应是一个关键且 不可忽视的物理现象,如图 3 所示.

磁滞环的形成是由于磁致伸缩材料内部磁畴 的重新排列和固定所导致的.在磁场改变时,磁畴 需要一定的时间来重新排列以适应新的磁场方向, 这个过程中就会产生磁滞效应.此外,磁畴的重新 排列并不总是完全可逆的,因此即使在磁场恢复到 原来的强度时,磁化强度也可能无法完全恢复到初 始状态,这就形成了磁滞环的残留.由于磁滞效应, 输入电流与输出位移之间不再是简单的线性关系, 而是会出现明显的非线性迟滞现象∏[•].这种迟 滞现象不仅会降低致动器的精度和响应速度,还可 能导致系统的不稳定和不可预测性.



Fig. 3 Magneto-strictive actuator

# 2 非线性动力学的稀疏辨识(SINDy)

复杂的动态系统通常包含非线性组件和约束, 使其模态复杂化. Brunton 等人提出了 SINDy 算 法<sup>[18]</sup>.该算法为使用数据驱动方法识别混合模型 提供了基础. SINDy 算法可以识别非线性分量,并 成功提出了闭环反馈控制方法. SINDy 算法的核 心是系统模型的稀疏识别. 压电致动器的非线性系 统模型表达式可以定义如下:

 $\dot{\mathbf{x}} = f(x,u)$  (1) 式(1)中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$  为系统状态, $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^m$  为系统状态 的微分, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$  为系统输入, $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}^m$  为非线性 动态系统,其中,n 和m 为正整数.用 SINDy 算法 对非线性系统 f(x,u)进行识别.同时,我们定义 了压电系统状态阶次m 和输入电压u.假设系统的 状态空间由状态矩阵  $X \in \mathbb{R}^{p \times m}$  和输入矩阵  $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$  组成. SINDy 算法的变量定义如下: $P_{ai} \in \mathbb{R}^{m}$ 和 $P_{ap} \in \mathbb{R}^{m}$ ; $V_{ai} \in \mathbb{R}^{m}$  和 $V_{an} \in \mathbb{R}^{m}$ 

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{a1}(t_1) & \cdots & \boldsymbol{P}_{a1}(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{P}_{ai}(t_1) & \cdots & \boldsymbol{P}_{ai}(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{P}_{ap}(t_1) & \cdots & \boldsymbol{P}_{ap}(t_m) \end{bmatrix}$$
(2)  
$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{a1}(t_1) & \cdots & \boldsymbol{V}_{a1}(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{V}_{ai}(t_1) & \cdots & \boldsymbol{V}_{ai}(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{V}_{an}(t_1) & \cdots & \boldsymbol{V}_{an}(t_m) \end{bmatrix}$$
(3)

数据采集完成后, $\Theta(X,U) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是一个包含许多非线性元素的候选矩阵,其中, $\otimes$ 为 Kronecker 积. 它包括任意常数、多项式和三角函数.式 (4)由式(2)和式(3)中的 Kronecker 积代入候选矩 阵 $\Theta(X,U)$ 得到

$$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} 1\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}\\ (\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}\cdots\sin(\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\sin(\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}\\\sin(\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}\cdots\end{cases}$$
(4)

此时,根据式(2),压电致动器的导数状态矩阵表示为

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{P}}_{a1}(t_1) & \cdots & \dot{\mathbf{P}}_{a1}(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\mathbf{P}}_{ai}(t_1) & \cdots & \mathbf{P}_{ai}(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\mathbf{P}}_{ap}(t_1) & \cdots & \dot{\mathbf{P}}_{ap}(t_m) \end{pmatrix}$$
(5)

则,式(5)可改写为式(6)

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) \tag{6}$$

式(6)中, $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{R}^{p \times 1}$ 为稀疏回归系数矩阵

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2 \boldsymbol{\xi}_3 \cdots \boldsymbol{\xi}_p \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
(7)

 $\xi_p$ 的表达式是将包含微分变量与转置稀疏候选矩阵之差的2范数与具有稀疏回归系数的 $L_1$ 范数相加,即最小绝对收缩选择算子(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator, LASSO).

$$\boldsymbol{\xi}_{p} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\xi}_{p}} || \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{X}_{p} - \boldsymbol{\xi}_{p} \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) ||_{2}^{2} + l || \boldsymbol{\xi}_{p} ||_{1}$$
(8)

式(8)中, $\dot{X}_{p}$ 表示 $\dot{X}$ 的第p行, $\xi_{p}$ 的第p行.l为平 衡模型识别精度和简化的稀疏调整系数.当动态模 型中包含系数较小且非线性特征不显著的因素时, LASSO 算子可以将这些项缩减为零,从而实现识别系统的降维.因此,非线性候选矩阵元素 Θ(X, U)越多,所表达的压电致动器回滞模型越精确.经 过稀疏回归后,得到相应的迟滞模型为

$$\dot{\boldsymbol{P}}_r = \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})\boldsymbol{\xi}_1 \tag{9}$$

SINDy 算法在以下四个方面具备优势:

(1)特征选择方面:智能地识别和选定那些与 目标变量关联性最强的特征,同时有效地消除非必 要特征和噪声特征对模型的影响,使模型结构更为 精简.

(2)过拟合风险方面:稀疏回归算法通过整合 L<sub>1</sub> 正则化策略,成功地降低了模型的复杂程度,进 而减少了模型过度拟合数据的可能性.引导模型在 训练时更倾向于寻求全局最优解,而非陷入局部 最优.

(3)建模效率方面:通过数据降维,稀疏化技术 显著提升了算法的计算效率,进而加快了建模的速 度.这一优势使 SINDy 算法在处理庞大数据集时 具有很高的实用性.

(4)可解释性方面:SINDy 算法能够精准筛选 出与目标变量关联最紧密的特征,这使得模型的输 出结果更容易被分析和预测.

# 3 基于权重优化的 PSO 策略

#### 3.1 粒子群优原理

粒子群优化算法是一种拥有高效寻优能力的 算法<sup>[19]</sup>,由 Kennedy 和 Eberthart 于 1995 年提出, 具有简单易行、收敛速度快、参数设置少的优点.在 一个 D 维的粒子空间集合内,存在 N 个粒子.每 个粒子 被 赋 予 个 体 经 验 (Pbest) 和 群 体 经 验 (Gbest),单个粒子有位置信息 X; 和速度信息 V; (*i*=1,2,3…,D)通过循环计算,单个粒子的 D 维 最佳速度和最佳位置都会被更新:

$$v_{id}^{k} = v_{id}^{k-1} + c_{1}r_{1}(\text{Pbest}_{id} - x_{id}^{k-1}) +$$

$$c_2 r_2 (\text{Gbest}_d - x_{id}^*) \tag{10}$$

$$x_{id}^{k} = x_{id}^{k-1} + v_{id}^{k-1}$$
(11)

其中,权重因子 C<sub>1</sub> 和 C<sub>2</sub> 通过分配不同的权重,调 节个体学习与群体学习的比例,r<sub>1</sub> 和 r<sub>2</sub> 为在(0,1) 区间内的随机数.粒子的速度更新过程分为:单个 粒子确认当前速度,个体位置最佳更新以及群体经 验更新.粒子群的数量对于寻优结果影响很大:群 体数过小,会造成局部寻优.群体数过大,则会造成 整体寻优能力好,但是局部寻优在群体数量增长到 一定程度,优化效果不明显.为了加强寻优能力,加 入了惯性因子 w,更新的速度表达式和权重标准表 达式如下:

$$v_{id}^{k} = wv_{id}^{k-1} + c_{1}r_{1}(\text{Pbest}_{id} - x_{id}^{k-1}) + c_{2}r_{2}(\text{Gbest}_{d} - x_{id}^{k-1})$$
(12)

$$w = w_{\text{start}} - \frac{w_{\text{start}} - w_{\text{end}}}{t}t \tag{13}$$

其中,w<sub>start</sub> 为惯性因子初始值,w<sub>end</sub> 为惯性因子的 最终值,t 为当前迭代数,t<sub>max</sub> 为最大迭代数.然而, 标准惯性因子容易陷入局部限制,难以获得全局最 优,为了平衡惯性因子在全局与局部的搜索能力, 本研究提出了受摆线问题所启发的非线性惯性权 重策略.

## 3.2 BC-PSO 权重优化策略

摆线问题(Brachistochrone)最初由伯努利提 出:若A和B是铅直平面上不在同一铅直线上的 两点,在所有连接A和B的平面曲线中,求出一条 曲线,使仅受重力作用且初速度为零的质点从A 点到B点沿这条曲线运动时所需时间最短.其轨迹 表达式如下所示:

$$H = y(1 + dy^{2})$$
 (14)  
受上述方程启发,将新的惯性权重 w 设计为:

$$w = \frac{t_{\text{max}}}{t} \left( 1 + \frac{t'_{\text{max}}^2}{t} \right) \left( w_{\text{start}} - w_{\text{end}} \right) \tag{15}$$

同标准的线性递减权重相比较,改进的惯性权重在 迭代的过程中,具备更快的启动速度.初期兼顾了全 局搜索能力,后期随着迭代次数的增加,惯性权重快 速减小,使得局部寻优可以快速收敛到最佳适应值.

基于上述描述,改进后的 PSO 算法步骤描述为:

(1)初始化所有的参数,随机生成 x<sub>i</sub> 和 v<sub>i</sub>,并且 记录空间内单个个体的 p<sub>i</sub> 以及全局个体中的 p<sub>s</sub>.

(2)评估所有粒子,如果当前适应值优于单个 个体,则更新 p; 的位置信息.同理,评估更新全局 pg 的位置信息,判断是否更新.

(3)更新的速度与位置.

(4)评估适应值是否符合预期,如果未达到预 期,则回到步骤2,继续执行该流程.

# 3.3 基于 BC-PSO 的二次优化

结合上一节,SINDy 算法的优势在于特征选择,降低过拟合风险,输出的模型表达式具有可解

释性.同时也存在一部分劣势.在降低模型复杂度 的同时,过于简化的模型会影响建模精度.其算法 性能也受到正则化参数的选择影响.为了优化 SINDy算法,采用改进的 BCPSO 对模型输出表示 式框架进行再优化.待优化的 SINDy 表达式如下:

 $\dot{P} = C + k_1 P_a + k_2 V_a + k_3 P_a^2 +$ 

 $k_{4}P_{a}V_{a} + k_{5}V_{a}^{2} + k_{6}P_{a}^{3} + \dots + k_{n}V_{a}^{3}$  (16) 其中,各项待优化系数  $[k_{1},k_{2},k_{3},\dots,k_{n}] \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ .

在第2节的研究中,SINDy 算法可以通过稀疏 算子对非线性正交元素库进行惩罚筛选,过滤不必 要的非线性要素.建模时输出由输入与输出相结合 的多项式表达式.当输出表达式经过降维后,随着 模型阶数降低,表达式内的输入输出正交项也会减 少.此时,对于表达式中的各项系数的精度要求就 会提高.SINDy 算法的系数辨识核心基于最小二 乘法,但是为了平衡快速建模等优势,使其在系数 辨识的优化中发挥受到限制.结合 SINDy 算法如 式(16)所示,可以直接提取输出模型的表达式框 架.结合现有系数的缩放,通过再次辨识优化,可以 提高输入输出正交项的系数精确度,从而提高输出 表达式的建模精度.

# 4 微动致动器的实验平台搭建

# 4.1 压电惯性电机平台

为验证本文所提出方法,搭建如图 4 所示的压 电惯性电机实验平台.实验装置包括 YG-st YEPC0压电放大器,YG-st压电惯性致动器和模 拟量间隙传感器.具体步骤是将间隙传感器探头固



图 4 PIA 实验平台 Fig. 4 Platform of PIA

定在惯性电机的末端,上位控制器在惯性电机的行 程范围内发送(0~10 V)的电压指令,经由压电驱 动器转化为驱动电压,惯性电机收到电压后完成往 复运动,通过间隙传感器获得惯性电机的位置输 出,并由上位控制器获得迟滞环的数据采集.

## 4.2 压电致动器平台

为了进一步验证本文所提出方法的有效性,本 研究搭建如图 5 所示的压电致动器实验平台.实验 装置包括 YG-st YEPC0203-04 压电放大器、YG-st 压电致动器和 Attocube 激光干涉仪.具体步骤上 位控制器驱动压电致动器停留在行程内的任意位 置,同时,由 Attocube 激光干涉仪采集记录位移运 动完成后压电致动器的蠕变状态并将数据传回上 位控制器,完成数据采集.

当输入电压一定时,蠕变位移在 0.1 s 内发生 变化.在 Krejei 模型中,取蠕变系数  $\gamma(u)$ 为 0.02. 采样记录时间用 t 表示.实验设置为间隔 20 V 的 电压输入,记录周期为 400 s.



# 4.3 磁滞伸缩器平台

为了验证 BCPSO-SINDy 算法对于磁滞环建模的有效性,搭建如图 6 所示的磁滞伸缩器实验平台.其中执行器型号为 YG-st GMA70,由绕线螺线



图 6 MSA 实验平台 Fig. 6 Platform of MSA

管环绕两根 D 棒组成,通过压缩螺栓和弹簧垫做 预载.执行器内部含永磁体,以便提供偏置磁场,通 过电流放大器 AE7228 驱动伸缩器完成运动后,由 米铱电容传感器 CS02 和控制器 DT6530 完成位置 采集.具体步骤上位控制器给电流放大器指令,通 过电流放大器输出电流,驱动磁滞伸缩器完成运 动,最后由电容传感器将位置数据传回上位控制 器,完成数据采集.

# 5 实验与分析

## 5.1 适应值测试与仿真

BC-PSO 的适应值仿真实验使用配备了 Intel(R) Core (TM) i5-12500 CPU 和 16 GB 存的 电脑,运行速度为 3.00 GHz. 操作系统是 Win11-64 位,而 MATLAB-R2022a 作为编程语言. 选取 LDW-PSO, AIW-PSO, BPSO 与 BC-PSO 做性能测 试比对. 迭代次数设置为 100 次,种群数为 10 000.

在针对四种不同 PSO 算法的适应值结果(如图7和表1所示)进行深入分析后,我们发现了 BC-PSO 算法在多个性能评估中相较 AIW-PSO、 BPSO 和 LDW-PSO 展现出了显著的优势.

(1)平均值方面: BC-PSO 算法的平均值为0.501 0,相较于 LDW-PSO 的 0.552 3,AIW-PSO



表1 BC-PSO Table 1 BC-PSO

算法	平均值	最大值	最小值	标准差
LDW-PSO	0.504 9	0.657 5	0.497 1	0.027 9
AIW-PSO	0.528 0	1.883 2	0.497 1	0.168 7
BPSO	0.522 5	0.908 3	0.497 1	0.078 2
BC-PSO	0.501 0	0.602 9	0.497 1	0.014 1

的 0.528 9 和 BPSO 的 0.514 5, BC-PSO 的平均适 应值分别降低了约 9.25%、5.25%和 2.62%.这一 数据清晰地展现了 BC-PSO 算法在多次迭代中更 稳定地收敛至全局最优解的能力.

(2)最大值方面:BC-PSO的最大值为 0.602 9,相较于其他三种算法的最高值,分别降低了约 11.34%、8.76%和 7.02%.这一降低不仅显示了 BC-PSO 算法在避免陷入局部最优解方面的能力, 还进一步证明了其在全局搜索中的优越性.而最小 值方面,虽然 BC-PSO 与其他三种算法均达到了相 同的最低适应值 0.497 1,但考虑到其平均适应值 和最大适应值的显著优势,BC-PSO 在实际应用中 更有可能在全局范围内找到最优解.

(3)标准差方面: BC-PSO的标准差为 0.014 114,相较于LDW-PSO的0.021 3、AIW-PSO的0.0179和BPSO的0.0163,分别降低了 约33.80%、21.23%和13.50%.这一数据直观地 反映了BC-PSO算法在多次迭代的实验中的表现 更为稳定.综上所述,BC-PSO算法在寻优表现上 相较于LDW-PSO、AIW-PSO和BPSO算法具有 显著优势.

#### 5.2 压电惯性电机的迟滞建模

压电惯性电机的迟滞效应会对运动过程中造成精度损失和运动的不稳定性.基于 5.1 节中, BC-PSO 优化算法的优越性已经得到了论证,我们 将结合 SINDy 算法展开研究.P-I 算法被广泛应用 于迟滞拟合.P-I 模型是基于 Preisach 模型中 Play 算子的一种特殊情况. Play 算子仅具有一个阈值. 通过将 Play 算子与权函数相乘,并使用一次积分 来描述输入输出信号之间的迟滞关系,可以得到其 数学表达式(17).

$$w(t) = \prod [v](t) = p_0 v(t) + \int_0^K p(r) F_r[v](t) dr$$
(17)

其中p(r)为权函数,r为切换阈值, $p_0$ 为平均值,  $F_r[v](t)$ 为 P-I 算子. 压电惯性电机的迟滞建模实 验中,我们将 P-I 算子,SINDy 原始算法与 BCPSO-SINDy 作比较,获得的模型表达式如(18)所示.

 $\dot{P} = 16.001 \ 1 - 584.283P_a + 23.386V_a + 202.619P_a^2 + 2.266P_aV_a - 0.325V_a^2 - 134.109P_a^3 + 4.137P_a^2V_a$ (18)

基于图 8 和表 2 进行分析, BCPSO-SINDy 算 法相较于 P-I 算法和 SINDy 算法展现出显著的优 势.具体而言,在均方差指标上, BCPSO-SINDy 算 法达到了 0.009 6,相较于 P-I 算法的 0.024 6 降低 了约 61%,与 S 算法的 1.093 1 相比更是实现了约 99%的大幅降低,充分显示了 BCPSO-SINDy 算法 在预测稳定性方面的显著提升.在最大误差方面, BCPSO-SINDy 算法的 0.245 3 远低于 P-I 算法的 1.135 0 和 SINDy 算法的 3.027 9,表明 BCPSO-SINDy 算法在极端情况下的建模表现更为可靠, 具有更好的鲁棒性.尽管 BCPSO-SINDy 算法的相 对误差 0.063 1 略高于 P-I 算法,但与 SINDy 算法 相比仍具有明显优势.综上所述, BCPSO-SINDy 算法在整体性能上表现最佳,展现出了优越的拟合 能力和稳定性.



Fig. 8 BCPSO-SINDy hysteresis model for PIA

表 2	PIA 的 BCPSO-SINDy 模型
Table 2	BCPSO-SINDy model for PIA

算法	P-I	SINDy	BCPSO-SINDy
均方差/µm	0.001 4	0.003 9	0.001 0
最大误差/μm	0.056 7	0.020 4	0.010 2
相对误差/%	2.278 0	0.817 9	0.409 0

#### 5.3 压电致动器的蠕变建模

压电致动器的蠕变效应对于压电致动器在一 些场景下的开环控制会产生精度的漂移.在针对蠕 变的研究中,Krejci根据研究得到的宏观近似模型 被广泛应用,其表达式为:

$$L(t, u) = L_0 \left[ 1 + \gamma(u) \log_{10} \left( \frac{t}{0.1} \right) \right]$$
(19)

 $L_0$  表示输入电压一定时 0.1 秒内的位移变化. 蠕变系数  $\gamma(u)$ 反映了蠕变的影响,变量 t 表示采样记录时间.

从图 9 和表 3 可以发现,由于实际的压电蠕变 曲线并不平滑,所以通过实测获得的 Krejei 近似蠕 变曲线在开始阶段未能很好地拟合,而 SINDy 模 型在处理短线段拼接时体现出了拟合优势,在均方 差的性能上表现显著优于 Krejei 的近似模型,但是 局部的最大误差落后于 Krejei 近似模型. BCPSO-SINDy 凭借模型系数的再优化,进一步地提升了 蠕变曲线的拟合效果,在均方差分别领先 Krejei 模 型和 SINDy 模型 83.4%和 60%.

最大误差的性能测试中,BCPSO-SINDy相比 Krejei和SINDy模型,分别降低了67%和78%,这 证明了 BCPSO-SINDy 在拟合局部突变的模型时, 具有更稳定的预测能力.最后,在相对误差分析中, BCPSO-SINDy的性能表现显著优于其他算法. BCPSO-SINDy的蠕变模型表达式为:

$$\dot{P}_{a} = 16.950 \ 1+7\ 705.\ 425P_{a} - 139\ 705.\ 544P_{a}^{2} + \\ 1\ 117\ 235.\ 97P_{a}^{3} - 5\ 228\ 420.\ 560P_{a}^{4} + \\ 15\ 863\ 360.\ 665P_{a}^{5} - 32\ 601\ 852.\ 226P_{a}^{6} + \\ 45\ 960\ 618.\ 924P_{a}^{7} - 43\ 889\ 717.\ 77P_{a}^{8} + \\ 27\ 174\ 953.\ 071P_{a}^{9} - 9\ 853\ 368.\ 876P_{a}^{10} + \\ 1\ 589\ 184.\ 275P_{a}^{11}$$

表 3 PEA 的 BCPSO-SINDy 模型 Table 3 BCPSO-SINDy model for PEA

算法	Krejei	SINDy	BCPSO-SINDy
均方差/nm	0.121 6	0.049 5	0.019 8
最大误差/nm	38.493 8	56.713 0	12.680 3
相对误差/%	4.550 1	6.7037	1.498 9



Fig. 9 BCPSO-SINDy creep model for PEA

# 5.4 磁滞伸缩器的磁滞建模

与压电惯性电机的迟滞非线性相似,磁滞作为 磁滞伸缩器的典型非线性特征,严重地影响了磁滞 伸缩器的运动精度.磁滞环具有明显的非对称性, Bouc-Wen(BW)属于微分方程类模型,适用于这类非 对称场景.非线性微分方程描述了输出信号与输入 信号的幅度和方向之间的关系,包括输入信号及其 导数.它能够同时模拟与速率无关和与速率相关的 磁滞现象,数学表达式为:

 $\dot{y} = \alpha \dot{u} - \beta \dot{u} |y|^n - \gamma |\dot{u}| |y|^{n-1} y$  (21) 其中, *u* 和 *y* 分别表示输入和输出信号,并被视为 常数,在 BW 模型中,参数 α, β, γ, *n* 对回滞线的形 状产生影响. 通过选择不同的参数值,可以描述各 种类型的磁滞回线. 为了充分验证 BCPSO-SINDy 的性能,实验中,选取 BW 模型与 SINDy 初始模型 会作为实验的模型对比,测试电流分别为 1 A, 3 A, 5 A. 模型表达式如式(22):

$$\begin{split} P_{1A} &= 214\ 323.\ 313\ 1 - 7\ 216.\ 151P_{a} + \\ &78.\ 778P_{a}^{2} - 170.\ 600P_{a} \cdot I_{a} - 0.\ 281P_{a}^{3} + \\ &1.\ 607P_{a}^{2} \cdot I_{a} - 6.\ 179P_{a} \cdot I_{a}^{2} \end{split} \tag{22} \\ \dot{P}_{3A} &= -282\ 148.\ 340\ 1 + 7\ 596.\ 676P_{a} - \\ &52\ 497.\ 537I_{a} - 67.\ 780P_{a}^{2} + 927.\ 418P_{a} \cdot I_{a} - \\ &2\ 751.\ 755I_{a}^{2} + 0.\ 2P_{a}^{3} - 4.\ 055P_{a}^{2} \cdot I_{a} + \\ &23.\ 374P_{a} \cdot I_{a}^{2} - 30.\ 779I_{a}^{3} \end{split} \tag{23}$$

$$\dot{P}_{5A} = -31\ 646.\ 051\ 1+1\ 017.\ 294P_a - \\8\ 931.\ 519I_a - 10.\ 225P_a^2 + 171.\ 163P_a \cdot I_a - \\505.\ 283I_a^2 + 0.\ 033P_a^3 - 0.\ 788P_a^2 \cdot I_a + \\5\ 155P_a \cdot I_a^2 - 19\ 872I^3$$
(24)

通过对图 10 和表 4 的 1 A 电流实验数据分析,对比 BW 算法、SINDy 算法与 BCPSO-SINDy 算法的性能,可以明显看出 BCPSO-SINDy 算法的 优势.具体而言,BCPSO-SINDy 算法的均方差为 0.002 0,相较于 BW 算法的 0.002 1 和 SINDy 算 法的 0.065 5,显示出更高的拟合稳定性,精度上更



MSA 的 BCPSO-SINDy 模型(1 A@20 Hz) 表 4 BCPSO-SINDy model for MSA(1 A@20 Hz) Table 4

算法	Bouc-Wen	SINDy	BCPSO-SINDy
均方差/µm	0.002 1	0.065 5	0.002 0
最大误差/µm	0.155 2	0.176 4	0.138 2
相对误差/%	2.127 5	0.045 0	0.031 6

为出色.在最大误差方面,BCPSO-SINDv 算法为 0.138 2,略优于 BW 算法的 0.155 2,并接近 SINDy 算法的 0.176 4, 表明其在局部突变的情况 下的拟合表现也相对稳定.尤为突出的是, BCPSO-SINDv 算法的相对误差仅为 0.031 6, 远 低于 SINDy 算法的 0.045 和 BW 算法的 2.127 5, 显示出近 88%的优势提升,进一步证明了 BCPSO-SINDy 算法在模型拟合方面的显著性能优势.

在 3A 电流的测试中,基于图 11 和表 5 对比 BW 算法、SINDv 算法与 BCPSO-SINDv 算法的性

115.2

105.0

能,可以发现 BCPSO-SINDy 算法展现出显著优 势.具体而言, BCPSO-SINDy 算法的均方差为 0.0067,相较于 BW 算法的 0.007 9 降低了约 15%,与 SINDv 算法的 0.342 0 相比更是大幅降低 了约 98%,这充分显示了 BCPSO-SINDy 算法在 拟合稳定性方面的优势.在最大误差方面, BCPSO-SINDy 算法为 0.311 1, 不仅优于 BW 算 法的 0.513 8,也低于 SINDy 算法的 0.690 9,表明 BCPSO-SINDv 算法在局部凸点下的建模性能更 为可靠. 尽管 BCPSO-SINDy 算法的相对误差 0.778 6 略高于 BW 算法的 1.836 0,但与 SINDy 算法的 0.344 3 相比仍表现出明显优势,综上所 述,BCPSO-SINDy算法在整体性能上表现最佳, 具有显著的优越性.

最后,在5A电流的测试中,基于图12和表6 的实验结果分析,BCPSO-SINDy算法相较于BW

125.4





125.4

表 5 MSA 的 BCPSO-SINDy 模型(3 A@20 Hz) Table 5 BCPSO-SINDy model for MSA(3 A@20 Hz)

算法	Bouc-Wen	SINDy	BCPSO-SINDy
均方差/µm	0.007 9	0.342 0	0.006 7
最大误差/µm	0.513 8	0.690 9	0.311 1
相对误差/%	1.836 0	0.344 3	0.778 6

表 6 MSA 的 BCPSO-SINDy 模型(5 A@20 Hz) Table 6 BCPSO-SINDy model for MSA(5 A@20 Hz)

算法	Bouc-Wen	SINDy	BCPSO-SINDy
均方差/µm	0.024 6	1.093 1	0.009 6
最大误差/µm	1.135 0	3.027 9	0.245 3
相对误差/%	2.589 8	0.450 9	0.061 3

算法和 SINDy 算法展现出显著的优势. 具体而言, 在均方差指标上, BCPSO-SINDy 算法达到了 0.0096,相较于 BW 算法的 0.0246降低了约 61%,与 SINDy 算法的 1.0931相比更是实现了约 99%的大幅降低,充分显示了 BCPSO-SINDy 算法 在拟合稳定性方面的显著提升. 在最大误差方面, BCPSO-SINDy 算法的 0.2453远低于 BW 算法的 1.1350和 SINDy 算法的 3.0279,表明 BCPSO-SINDy 算法拟合表现更为可靠,具有更好的鲁棒 性.尽管 BCPSO-SINDy 算法的相对误差 0.0631 略高于 BW 算法,但与 SINDy 算法相比仍具有明 显优势.综上所述, BCPSO-SINDy 算法在整体性 能上表现最佳,展现出了优越的预测能力和稳 定性.

# 6 结论

针对微动致动器的非线性特征,本文提出了一种基于改进型 PSO 优化的 SINDy 建模算法.首先,提出了一种非线性动力学的稀疏辨识方法.其次,利用 SINDy 的柔性特性建立合适的非线性库,准确描述滞回环模型,稀疏惩罚去除高阶非线性项,得到描述滞回环的多项式方程.最后,通过对已获得 SINDy 模型表达式进行再次框架系数的辨识,提升了 SINDy 的模型精度,并且在压电惯性电机,压电致动器和磁滞伸缩器平台上进行了实验对比和验证,充分证明了 BCPSO-SINDy 算法在对率相关的非线性场景下的建模展开更深入的研究.

# 参考文献

- [1] 岳承宇,王立峰,赵永辉.基于压电作动器/传感器的升力面颤振主动抑制[J].动力学与控制学报,2015,13(05):367-376.
  YUE C Y, WANG L F, ZHAO Y H. Active flutter suppression of a lifting surface based on piezoelectric actuators/sensors [J]. Journal of Dynamics and Control, 2015, 13(05): 367-376. (in Chinese)
- [2] LI Z L, YU J B, WANG Z H, et al. A mobile switched attention network for defects classification on co-fired piezoelectric actuators [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2023, 73: 5004009.
- [3] LI Z, ZHANG X Y. Model order reduction for the Krasnoselskii-Pokrovskii (KP) model [J]. Smart Material Structures, 2019, 28(9): 095001.
- [4] LI Z, LIU S N, SU C Y. A novel analytical inverse compensation approach for preisach model[C]//International conference on intelligent robotics and applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013: 656-665.
- [5] KREBS S. Modeling of a clamping-based piezo actuator in triangular configuration [C]//2022 IEEE
   17th International Conference on Advanced Motion Control (AMC). New York: IEEE, 2022: 150-156.
- [6] LI Z, SHAN J J, GABBERT U. A direct inverse model for hysteresis compensation [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2021, 68 (5): 4173-4181.
- [7] ZHU J, CHEN N, SHEN C Q. A new data-driven transferable remaining useful life prediction approach for bearing under different working conditions [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 139: 106602.
- [8] ZHU J, CHEN N, PENG W W. Estimation of bearing remaining useful life based on multiscale convolutional neural network [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66 (4): 3208-3216.
- [9] JIN Y, WANG X C, XU Y L, et al. Hysteresis modeling and compensation of piezo actuator with sparse regression [J/OL]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2024, 99: 1-14[2024-08-14]. https://ieeexplore. ieee. org/document/

10413964. DOI:10.23919/jsee.2023.000172.

- [10] MANGAN N M, ASKHAM T, BRUNTON S L, et al. Model selection for hybrid dynamical systems via sparse regression [J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2019, 475(2223): 20180534.
- [11] 朱馨渝,马平. 基于改进 PSO-BP 神经网络的 PID 参数优化方法[J].现代电子技术,2022,45(21):
   127-130.

ZHU X Y, MA P. PID parameter optimization method based on improved PSO-BP neural network [J]. Modern Electronics Technique. 2022, 45(21): 127-130. (in Chinese)

- [12] WANG Y, ZHAO J, JIANG K, et al. Prediction of TBM operation parameters using machine learning models based on BPSO [J]. Advanced Engineering Informatics, 2023, 56: 101955.
- [13] TANG S, LU J X, SUN B W, et al. Optimal design of self-shielded biplanar coil assembly with miniaturized structure [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2023, 72: 9005209.
- [14] GLADKOV S O. A new approach to the brachistochrone problem with allowance for dry friction [J/ OL]. Technical Physics Letters, 2024 [2024-08-

14]. https://link. springer. com/article/10. 1134/ S1063785024700457.

- [15] ZHANG Z M, AN Q, LI J W, et al. Piezoelectric friction-inertia actuator-a critical review and future perspective [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2012, 62(5): 669-685.
- [16] JIN Y, YU J B, XU Y L, et al. Enhancing sparse regression modeling of hysteresis with optimized PIO algorithm in piezo actuator [J]. Smart Materials and Structures, 2024, 33(3): 035042.
- LIU Z D, LIU W K, WANG P, et al. High-precision position tracking control of giant magnetostrictive actuators using fractional-order sliding mode control with inverse prandtl-ishlinskii compensator
   [J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2023, 24(3): 379-393.
- [18] PURNOMO A, HAYASHIBE M. Sparse identification of Lagrangian for nonlinear dynamical systems via proximal gradient method [J]. Scientific Reports, 2023, 13: 7919.
- [19] ZOREMSANGA C, HUSSAIN J. Particle swarm optimized deep learning models for rainfall prediction: a case study in aizawl, Mizoram [J]. IEEE Access, 2024, 12: 57172-57184.