

参激微机械谐振器幅频响应的翘尾效应 及其电热调控*

刘中华¹ 徐友良¹ 宦荣华^{2,3†}

(1. 厦门大学 建筑与土木工程学院, 厦门 361005)

(2. 浙江大学 应用力学研究所, 浙江省软体机器人与智能器件研究重点实验室, 杭州 310027)

(3. 浣江实验室, 绍兴 311800)

摘要 静电参激的微机械谐振器具有响应幅值大、相位噪声小等优势, 近年来成为 MEMS 动力学领域研究热点. 本文研究了微机械梁谐振器在强静电参激下的高阶非线性响应及基于电热电流的响应调控方法. 首先, 实验发现强静电力参数激励下微机械梁谐振器的幅频响应不再是 Duffing 硬化曲线, 而在响应后半段出现“翘尾”现象. 接着, 建立了非线性谐振器的参激动力学模型, 理论分析表明“翘尾”现象是由非线性阻尼和高阶非线性刚度共同作用引起. 然后, 研究了梁本体的电热电流对参激响应的影响规律, 电热电流的引入会增加微谐振器的热弹性阻尼和轴向应力, 从而实现响应幅值和共振区间的大幅调控.

关键词 MEMS 谐振器, 参激共振, 非线性, 幅频响应

中图分类号: O322

文献标志码: A

The Tail-up Effect of Amplitude-Frequency Response and Its Electrothermal Control of Parametrically Excited Microelectromechanical Resonators*

Liu Zhonghua¹ Xu Youliang¹ Huan Ronghua^{2,3†}

(1. School of Architecture and Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

(2. Department of Mechanics, Key Laboratory of Soft Machines and Smart Devices of Zhejiang Province, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

(3. Huanjiang Laboratory, Shaoxing 311800, China)

Abstract In recent years, parametrically MEMS resonators, characterized by their large response amplitude and low phase noise, have emerged as a focal point in the field of MEMS dynamics. This paper investigates the high-order nonlinear response of micro-mechanical beam resonators under strong parametric excitation, as well as the influence of electrothermal currents on parametric resonance response. Firstly, experimental data reveal that under strong parametric excitation, the amplitude-frequency response of micro-mechanical beam resonators no longer follows the Duffing hardening curve but exhibits a “tail-up” phenomenon in the latter half of the response curve. Subsequently to these observations, a parametric dynamic model of the nonlinear resonator is established. Theoretical analysis indicates that the “tail-up” phenomenon arises from the combined effects of nonlinear damping and high-order nonlinear stiffness. Furthermore, the paper investigates the influence of electrothermal currents on the parametric response of the beam. It is demonstrated that the introduction of electrothermal current increases the

thermal elastic damping and axial stress of the micro-resonator, thereby significantly adjusting the response amplitude and resonance range.

Key words MEMS resonator, parametric resonance, nonlinear, amplitude-frequency response

引言

微机电系统(MEMS)谐振器,由于其微小的尺寸、出色的可靠性、优越的稳定性以及与CMOS制造工艺良好的兼容性,在传感、射频通信、导航定位以及信号处理等领域有着广泛的应用^[1-5].受到尺度效应的影响,MEMS谐振器在很小的激励下就会出现明显的非线性现象,比如硬化^[6]、软化^[7],或者是软硬混合^[8]等.已有大量研究表明,非线性效应一方面会限制谐振器输出响应信噪比、增加相位噪声,另一方面,部分非线性效应也可以利用起来提高谐振器输出信号灵敏度和频率稳定性等^[9].因此,深入研究MEMS谐振器的非线性动力学行为具有重要意义.

与普通的外激共振相比,参激共振在放大响应、降低相位噪声、提高传感器灵敏度等方面有着明显的优势^[10,11],近期成为N/MEMS动力学领域研究的热点^[12].Harish等^[13]利用参激放大技术,通过调整参数激励的参数取值,将环状陀螺仪的旋转速率信号放大了四倍.Lee等^[14]在一个二硫化钼(MoS₂)二维原子薄膜制成的NEMS谐振器中实现了巨大参数放大和光谱线宽缩窄现象,通过光热调制谐振器的刚度,以其谐振频率的两倍进行参数放大,实现了3605(71dB)的参数放大,并将光谱线宽缩窄因子提高到 1.8×10^5 .Li等^[15]提出了一种基于参数调制的高灵敏度温度计,通过振动模态之间的能量传递制造了一个高灵敏度的工作区域,显著提高了灵敏度并降低噪声.由于较大的响应幅值,参数共振系统往往很容易出现非线性现象,非线性的存在不但抑制了参数共振响应^[16]的无界增长,同时也导致参激系统的幅频响应出现迟滞效应^[17].然而,以往的研究中激励强度一般较小,参激系统的响应往往是以典型的Duffing形式出现^[18,19],而MEMS谐振器在强参数激励下的响应特性较少研究.

在参数激励的MEMS谐振器中,由共振状态引起的大幅振动以及利用压阻效应进行响应检测

都可能会导致电热效应^[20].电热效应是指当电流通过导体时,由于导体内部存在电阻而产生热能的物理现象.由于原理简单且适用性强,电热效应成为MEMS谐振器常用的响应调控手段,并成功应用于温度调控以及精准频率调谐等方面^[21].Matthew等^[22]设计了一种特殊的折叠弹簧用于悬浮装置的机械隔离,他们对折叠弹簧进行电热加热,实现了对微机械谐振器的温度控制.Pu等^[23]构建了两个不同频率的耦合式音叉(DETF)谐振器,利用电热对振荡器频率的精确调控,以实现超谐同步的频率匹配.

本文主要通过理论分析和实验来研究微机械梁谐振器在强静电参激下幅频响应的“翘尾”效应及其电热调控方法,主要开展了以下几个方面的工作:(1)实验观察并验证了微机械梁谐振器在强静电力参数激励下出现的幅频响应“翘尾”现象;(2)通过理论分析,解释“翘尾”现象的形成机理,揭示其由非线性阻尼与高阶非线性刚度共同作用所致;(3)进一步研究了电热电流对参激响应的调控效果,实现了对响应幅值和共振区间的显著调节.

1 实验概述

本文研究对象是两端固支的微型梁式谐振器,其结构如图1所示.该梁配有一个激励电极和一个检测电极.结构是采用传统的SOI(Silicon on Insulator)制造工艺制造的.微谐振器的尺寸为长 $800\mu\text{m}$,宽 $10\mu\text{m}$,厚 $25\mu\text{m}$,其余参数见表1.微谐振器的两端被固定并连接到金电极上,金电极与外部电源相连.为了使微梁结构处于谐振状态,本文在微谐振器的上极板上施加电压 $V_{DC} + V_{AC} \cos(\Omega t)$ 来产生周期性的静电激励,其中 V_{DC} 是静态偏置电压, $V_{AC} \cos(\Omega t)$ 为动态电压,且 $V_{AC} \ll V_{DC}$.在谐振器的下极板上施加静态偏置电压 V_{D1} .设置静电偏置电压的目的是增加静电力强度,因为静电驱动力大小通常与偏置电压和动态电压的乘积成正比.当微梁谐振器在动态电压驱动下产生振动时,检测端的电容极板间距也会发生周期变

化,从而引起极板上的电荷变化.检测电路测量极板上电荷变化量即可实现谐振器振动的实时测量.静电力施加和振动的检测通过锁相放大器设备(HF2LI)完成.在谐振器的左右两端金电极上施加静态电压 $\pm V_{TH}$,电压差会在微梁本体产生电流.电热效应会改变梁本体的温度分布从而改变梁的振动响应.

由于梁的尺寸较小,为了尽量减少空气阻尼的影响,微谐振器被封闭在一个气压小于 0.1Pa 的真空箱中.下面全部实验都是在真空箱中完成.

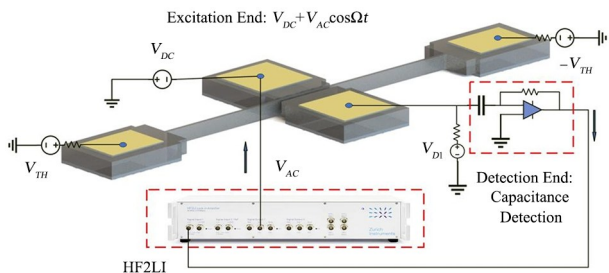


图 1 实验器件和相关电路图

Fig. 1 Experimental devices and related circuit

表 1 微谐振器的热参数和力学参数

Table 1 Thermal and mechanical parameters of microresonator

Parameters	Reference data	Notes
L	800 μm	Length
b	10 μm	Width
h	25 μm	Thickness
d_0	3 μm	Electrode gap
E	170GPa	Young's modulus
ρ	2329kg/m ³	Density
ρ_0	2.11 $\times 10^{-2}$ Ω/mK	Resistivity at room temperature
k_{th}	70.69W/mK	Thermal conductivity
C_p	730J/(kg·K)	Specific heat capacity
η	0.01127	Temperature coefficient of resistance
κ	8.86 $\times 10^{-6}$ m ² ·s ⁻¹	Thermal diffusion coefficient
T_0	20 $^{\circ}\text{C}$	Initial temperature

2 参激响应

对于一阶或主参共振,激励频率与系统固有频率之间满足 $\Omega = 2\omega_0$. 同时,由于阻尼的影响,参激共振往往存在一个激励阈值,只有参数激励频率落在不稳定区域内且激励强度超过这个阈值时,参激共振才能发生^[24,25].

首先,通过扫频获得微梁谐振器的固有频率约为 123.5kHz. 设置静电偏置电压 $V_{D1} = V_{DC} = 20\text{V}$,动态激励电压的频率 Ω 为固有频率的两倍(即 247kHz 附近),通过扫频获得微梁谐振器的参激共振幅频响应,如图 2 所示. 图 2(a)为动态电压 V_{AC} 由 300mV 增大到 700mV 时所得参激共振幅频响应曲线. 可以看出,在 300mV 较小激励下,谐振梁没有明显的共振响应. 当动态电压增大到 400mV 时,在系统固有频率 123.5kHz 附近出现明显的参激共振响应,并且随着动态电压的增加,参激共振响应的幅值和响应带宽也持续增加. 说明参激共振存在一个激励强度阈值,只有当激励强度超过这个阈值时参激共振才会发生. 固定一个参数激励频率,逐渐增大参数激励电压幅值直到发生参激共振,便可找到这个频率对应的电压阈值. 对每一个参数激励频率都对应一个电压阈值,从而画出激励频率—驱动电压参数域内的参数共振区间如图 2(b)所示. 可以看出,参数共振区整体呈倒三角形形状,随着激励强度的增加区间逐渐增大. 从图 2(a)还可以看出,参激共振幅频响应曲线呈现明显的右偏现象,这与传统 Duffing 硬弹簧非线性系统的幅频曲线类似. 然而,随着幅值的增加,参激共振的幅频曲线并没有像 Duffing 系统一样呈现抛物线形状,而是在曲线尾端出现“翘尾”现象.

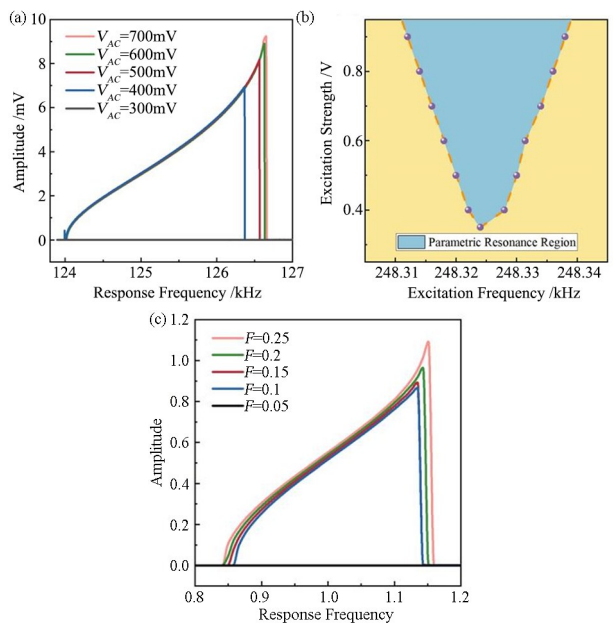


图 2 不同激励强度下的谐振器参激共振响应特性:

(a) 实验幅频响应曲线; (b) 参激共振区域; (c) 仿真幅频响应曲线
Fig. 2 Parametric resonance response characteristics of resonators under different excitation intensities: (a) Experimental amplitude frequency response curve; (b) Parametric resonance region; (c) Simulation amplitude frequency response curve

对于 Duffing 硬弹簧非线性系统,其振动频率与幅值之间是二次非线性依赖关系,对于图 2(a)的幅频曲线,在幅值较小阶段,振动频率与幅值之间还是基本维持二次非线性依赖关系,然而在较大幅值区间,由于“翘尾”现象的出现,二次非线性依赖打破,出现更高阶的依赖关系,说明在参激共振激发了微谐振梁结构的高阶非线性响应。

在幅频曲线“翘尾”阶段,幅值对频率的变化更为敏感,可以为基于高阶非线性的高性能 MEMS 谐振式传感器设计提供新的思路。

3 理论分析

为了阐述“翘尾”现象产生的动力学机理,我们建立了静电参激下非线性微梁谐振器的动力学模型。模型中我们考虑了五次高阶非线性刚度项。由于参激振动发生在系统不稳定区,为了获得稳定的谐振,模型中必然含有非线性阻尼项^[26]。此外,为了探究电热电流对参激共振响应的影响规律,由电热膨胀引起的轴向力也引入到系统动力学模型中。动力学方程如下^[27]:

$$m\ddot{u} + \epsilon c_1 \dot{u} + \epsilon c_2 u^2 \dot{u} + k_1 u - \epsilon f \cos(\Omega t) u - \epsilon N_{TH} u + \epsilon k_3 u^3 - \epsilon k_5 u^5 = 0 \quad (1)$$

式中: c_1 为线性阻尼系数, c_2 为非线性阻尼系数, k_1 为线性刚度系数, k_3 为三次非线性刚度系数, k_5 为五次非线性刚度系数, f 为参数激励大小, Ω 为参数激励的频率, N_{TH} 为由电热膨胀引起的轴向力。

引入小的失谐参数 $\epsilon\Delta$

$$\Omega = \Omega_0 (1 - \epsilon\Delta) \quad (2)$$

其中, Ω_0 为参考频率(一阶参激共振区间的中心频率), $\Omega_0 = 2\omega_0$ 。

$$\text{令 } \tau = \Omega t = \Omega_0 (1 - \epsilon\Delta) t, C_1 = \frac{c_1}{m\Omega_0}, C_2 = \frac{c_2}{m\Omega_0},$$

$$K_1 = \frac{k_1}{m\Omega_0^2}, F = \frac{f}{m\Omega_0^2}, N = \frac{N_{TH}}{m\Omega_0^2}, K_3 = \frac{k_3}{m\Omega_0^2}, K_5 = \frac{k_5}{m\Omega_0^2}. \text{ 可以得到方程(1)的归一化动力学方程:}$$

$$\ddot{u} + \epsilon C_1 \dot{u} + \epsilon C_2 u^2 \dot{u} + K_1 (1 + 2\epsilon\Delta) u - \epsilon F \cos(\tau) u - \epsilon N u + \epsilon K_3 u^3 - \epsilon K_5 u^5 = 0 \quad (3)$$

其中, C_1 为归一化线性阻尼系数; C_2 为归一化非线性阻尼系数; K_1 为归一化线性刚度系数; N 为

归一化的轴向力; K_3 为归一化的三次非线性系数; K_5 为归一化的五次非线性系数; F 为归一化激励强度。

利用平均法对方程进行简化.假设系统方程解有如下形式

$$x = a \cos(\phi) \quad (4)$$

$$\dot{x} = -\frac{a}{2} \sin(\phi) \quad (5)$$

其中 $\phi = \frac{\tau}{2} + \varphi$

将式(4)、式(5)代入运动方程(3)中得:

$$\begin{aligned} \dot{a} \cos\phi &= a \dot{\phi} \sin\phi \quad (6) \\ -\frac{\dot{a}}{2} \sin\phi - \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} + \dot{\varphi} \right) \cos\phi &+ \epsilon C_1 \left(-\frac{a}{2} \sin\phi \right) + \\ \epsilon C_2 (a \cos\phi)^2 \left(-\frac{a}{2} \sin\phi \right) &+ K_1 (1 + 2\epsilon\Delta) a \cos\phi - \\ \epsilon N a \cos\phi - \epsilon F \cos(\tau) a \cos\phi &+ \epsilon K_3 (a \cos\phi)^3 - \\ \epsilon K_5 (a \cos\phi)^5 &= 0 \quad (7) \end{aligned}$$

求解式(6)、式(7)得到关于 \dot{a} 、 $\dot{\varphi}$ 的表达式,由于 \dot{a} 、 $\dot{\varphi}$ 为慢变量,而等式右边均为关于 ϕ 的周期函数,分别对等式右边在一个周期内取平均得:

$$\dot{a} = -\frac{\epsilon C_1}{2} a - \frac{\epsilon C_2}{8} a^3 - \frac{\epsilon F}{2} \sin 2\varphi \quad (8)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\epsilon}{2} \Delta - \epsilon N + \frac{3}{4} \epsilon K_3 a^2 - \frac{5}{8} \epsilon K_5 a^4 - \frac{\epsilon F}{2} \cos 2\varphi \quad (9)$$

系统处于稳态时,令 \dot{a} 、 $\dot{\varphi}$ 分别为 0,联立式(8)、式(9),可得幅频响应满足的方程:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\epsilon F}{2} \right)^2 &= \left(\frac{\epsilon C_1}{2} + \frac{\epsilon C_2}{8} a^2 \right)^2 + \\ \left(\frac{\epsilon}{2} \Delta - \epsilon N + \frac{3}{4} \epsilon K_3 a^2 - \frac{5}{8} \epsilon K_5 a^4 \right)^2 &\quad (10) \end{aligned}$$

求解幅频关系方程(10)可得系统(1)的幅频关系曲线,部分计算结果如图 2(c)所示.若不考虑非线性阻尼,则系统的响应将发散,若不考虑五次非线性,翘尾现象将不会发生.对比图 2(a)和图 2(c),理论结果和实验结果基本吻合,验证了理论模型的正确性,也进一步证实微谐振梁参激响应中的“翘尾”现象是由高阶非线性和非线性阻尼共同作用引起。

4 参激响应的电热调控

4.1 电热对轴向力调控

电流通过半导体会产生电热效应,微谐振梁的

本体温度产生变化,进而由于热膨胀效应在两端固支梁中产生轴向力,我们首先给出了梁本体温度和热膨胀轴向力与电热电压之间的理论关系式。

在稳态时,电热效应产生的热量满足关系式^[28-30]:

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = -\frac{J^2 \rho_e(T)}{k_{th}} \quad (11)$$

其中, $T(x)$ 为与梁位置相关的温度, $\rho_e(T)$ 表示与

$$T(x) = \frac{1 - e^{\frac{\eta \rho_0 (L-x)}{\sqrt{\eta k_{th} \rho_0}}} - e^{\frac{\eta \rho_0 x}{\sqrt{\eta k_{th} \rho_0}}} + \eta T_0 + e^{\frac{\eta \rho_0 L}{\sqrt{\eta k_{th} \rho_0}}} (1 + \eta T_0)}{\left((1 + e^{\frac{\eta \rho_0 L}{\sqrt{\eta k_{th} \rho_0}}}) \right) \eta} \quad (14)$$

在梁跨中处的温度为:

$$T\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1 - e^{\frac{\eta \rho_0 \frac{L}{2}}{\sqrt{\eta k_{th} \rho_0}}} - e^{\frac{\eta \rho_0 \frac{L}{2}}{\sqrt{\eta k_{th} \rho_0}}} + \eta T_0 + e^{\frac{\eta \rho_0 L}{\sqrt{\eta k_{th} \rho_0}}} (1 + \eta T_0)}{\left((1 + e^{\frac{\eta \rho_0 L}{\sqrt{\eta k_{th} \rho_0}}}) \right) \eta} \quad (15)$$

梁由电热膨胀产生的轴向力为:

$$N = EA \int_0^L \frac{\alpha [T(x) - T_0]}{L} dx \quad (16)$$

其中 α 表示热膨胀系数^[31]:

$$\alpha = \{ 3.75 \times [1 - e^{-5.88 \times 10^{-3} \times (T-125)}] + 5.548 \times 10^{-4} \times T \} \times 10^{-6} \quad (17)$$

分别利用上述理论模型和 COMSOL 多物理场仿真软件,模拟了梁的温度与轴向应力变化关系,如图 3 所示. 电阻率、导热系数等参数取值见表 1. 图 3(a) 反映了谐振梁中点温度随着电热电流变化的趋势. 可以看出,随着电热电流增加,梁上温度逐渐增大. 图 3(b) 反映了梁的轴向力随着电热电流的变化. 可以看出,随着电热电流的增加,梁本体的温度升高,由热膨胀引起的轴向力也逐渐增大。

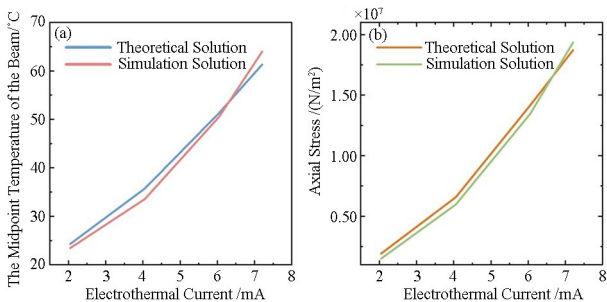


图 3 谐振器的温度以及轴向应力变化图:(a)谐振器中点温度随电热电流的变化情况;(b)谐振器轴向应力随电热电流的变化情况
Fig. 3 The temperature and axial stress variations of the resonator:
(a) The variation of midpoint temperature of resonator with electrothermal current; (b) The variation of axial stress of resonator with electrothermal current

温度相关的电阻率, k_{th} 和 J 分别表示导热性和电流密度,表达式如下所示:

$$J = \frac{V}{\rho_0 L} \quad (12)$$

$$\rho_e(T) = \rho_0 [1 + \eta(T - T_0)] \quad (13)$$

其中 ρ_0 代表室温下的电阻率, η 代表电阻温度系数。

假设梁初始温度为 T_0 , 则通入电热电流后梁的温度分布形式可由式(13)导出:

理论结果和仿真结果基本吻合,验证了理论模型的正确性。

4.2 电热对参激响应调控

首先通过实验研究电热大小对参激共振响应的影响规律. 通过增大两端电极上的电热电压 V_{TH} , 使得谐振器上流经的电热电流由 2.037mA 增大到 7.204mA, 并通过恒温箱确保每组实验中的环境温度保持一致. 测得不同电热电流下微梁谐振器的参激共振响应. 图 4(a) 和 4(b) 分别给出了激励电压 400mV 和 600mV 时微谐振梁的幅频响应曲线随电热电流的变化. 可以看出,随着电热电流的增加,幅频响应曲线整体变宽变矮,即谐振器响应的幅值降低但共振响应区间增大. 图 4(c) 和 4(d) 给出了不同激励电压时幅频曲线的峰值幅值和参激共振区间随电热电流的变化规律. 当 $V_{AC} = 400mV$ 时,随着电热电流的由 2.037mA 增大到 7.204mA, 参激响应幅值由 6.682mV 下降到 4.59mV, 参激响应带宽却出现了拓宽的现象,由 2.377kHz 拓宽到了 3.398kHz, 带宽增大了 1.021kHz.

同时,本文还测量了谐振器品质因子的变化情况,如图 4(a) 中的小图所示. 实验显示,品质因子将随着电热电流的增大而逐渐减小,由 21 507 下降到 11 967. 品质因子是阻尼系数的倒数,这一变

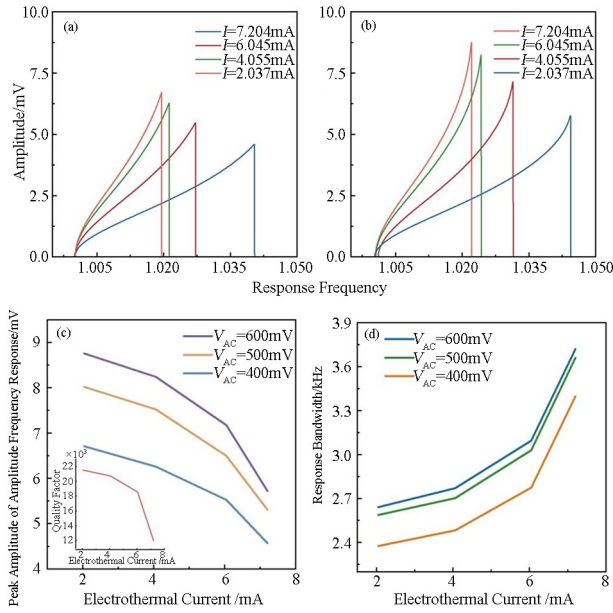


图4 不同电热电流下的参激响应变化实验情况:(a) $V_{AC} = 400\text{mV}$ 时的幅频响应曲线变化图;(b) $V_{AC} = 600\text{mV}$ 时的幅频响应曲线变化图;(c) 参激响应峰值幅值变化图;(d) 参激响应带宽变化图
Fig. 4 The experimental results of parametric responses under different electrothermal currents; (a) Variation of amplitude-frequency response curves under $V_{AC} = 400\text{mV}$; (b) Variation of amplitude-frequency response curves under $V_{AC} = 600\text{mV}$; (c) Peak amplitude variations of parametric excitation responses; (d) Bandwidth variations of parametric excitation responses

化反映出电热电流的增大将导致热弹性阻尼的增大,这是导致响应幅值随电热电流增大而减小的原因。

响应区间为系统开始出现响应与出现最大响应之间的区域,由幅频响应方程(10)可导出响应区间的解析表达式为

$$\epsilon \Delta_{\max} = \epsilon N - \frac{3\epsilon K_3}{4} a_{\max}^2 - \frac{5\epsilon K_5}{8} a_{\max}^4 \quad (18)$$

当 $\Delta = \Delta_{\max}$ 时,方程出现最大解,参数激励响应的峰值幅值为:

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{4(F - C_1)}{C_2}} \quad (19)$$

从等式(18)可以看出,响应区间的宽度不但与幅值相关,也与轴向力相关。当梁上通过的电热电流增大时,由于热膨胀导致轴向应力增大,同时轴向应力对于响应区间的增幅大于幅值下降带来的负面影响,因此出现响应带宽拓宽的现象。与图4中的结论一致。由等式(19)可以看出,响应幅值的大小和阻尼系数直接相关,电热电流增大时,梁上的热弹性阻尼会相应增大,从而降低了响应幅值的大小。

为了进一步验证阻尼和轴向应力对于参激响

应大小和响应带宽的影响,本文通过数值仿真对等式(3)进行了求解,通过加大阻尼系数以及轴向压力,模拟了电热电流作用在谐振器时带来的变化。图5反映了参激响应随阻尼、轴向压力变化趋势。由图5(a)可以看出,当 $F = 0.1$ 时,随着阻尼系数由 0.04 增大到 0.16,响应大小由 0.66 降低到 0.43。由图5(b)可以看出,当 $F = 0.1$ 时,随着轴向应力由 0.12 增加到 0.45,响应带宽拓宽了 0.769。当 $F = 0.15$ 以及 0.2 时,谐振器依旧出现相同的变化趋势。仿真和实验具有很好的一致性,证明了提出的理论模型的正确性。

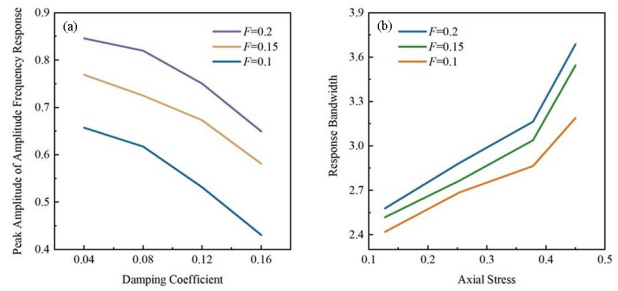


图5 不同阻尼、轴向应力作用下参激响应的仿真结果:
(a) 参激响应峰值幅值随阻尼变化;(b) 参激响应区间随阻尼变化
Fig. 5 The simulation results of parametric responses under different damping and axial stress conditions; (a) Variations of peak amplitude of parametric responses with damping; (b) Variations of parametric responses range with damping

5 结论

本文通过理论和实验研究了微机械梁谐振器在参数激励下的高阶非线性响应,并揭示了电热对参数共振响应的影响规律。首先,论文在实验中发现了微谐振器在两倍于固有频率的静电力作用下的参激共振响应,给出了不同激励频率下的参数共振阈值电压;在参激共振幅频响应曲线中发现了不同于传统 Duffing 系统的“翘尾”现象。“翘尾”阶段,幅值对频率具有更高的敏感度,可以为基于高阶非线性的 MEMS 传感设计提供新思路。接着,建立了微机械谐振器参数共振动力学模型,通过理论模型揭示了幅频响应“翘尾”的产生机理,五次高阶非线性和非线性阻尼的共同作用导致了该现象的出现。随后,研究了电热电流对参激响应的影响规律,随着电热电流的增大,参激共振响应的幅值降低而共振区间大幅增加。当 $V_{AC} = 400\text{mV}$ 时,电热电流由 2.037mA 增大到 7.204mA,参激响应幅值由 6.682mV 下降到 4.59mV,而参激响应区间则由 2.377kHz 增大到了 3.398kHz,拓宽 1kHz 以

上.最后,给出了参激共振区间和峰值幅值的解析模型,基于这一模型对上述现象进行了解释:电热电流引起的热弹性阻尼和轴向应力增大是导致响应幅值和共振区间变化的原因.论文的研究成果一方面丰富了微系统非线性动力学,另一方面也可以为基于高阶非线性的高性能 MEMS 谐振式传感器设计提供新思路.

参考文献

- [1] 王琪,冯建国,马渊明,等.基于双螺旋式加热器的柔性 MEMS 流量传感器[J].传感器与微系统,2024,43(2):41-44.
WANG Q, FENG J G, MA Y M, et al. Flexible MEMS flow sensor based on double-helix heater [J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2024, 43(2): 41-44. (in Chinese)
- [2] CHEN D Y, ZHANG H M, SUN J K, et al. Ultra-sensitive resonant electrometry utilizing micromechanical oscillators [J]. Physical Review Applied, 2020, 14(1): 014001.
- [3] 刘志强,夏磊,张猛,等. MEMS 力平衡加速度传感器以测量误差最小为目标的控制算法[J].动力学与控制学报,2022,20(6):94-100.
LIU Z Q, XIA L, ZHANG M, et al. Control algorithm of a mems force-balance accelerometer for minimizing the measurement error [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(6): 94-100. (in Chinese)
- [4] WANG X F, WEI X Y, PU D, et al. Single-electron detection utilizing coupled nonlinear microresonators [J]. Microsystems & Nanoengineering, 2020, 6: 78.
- [5] PU D, WEI X Y, ZHU W X, et al. Amplifying charge-sensing in micromechanical oscillators based on synchronization [J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2022, 339: 113517.
- [6] BOUCHAALA A, NAYFEH A H, JABER N, et al. Mass and position determination in MEMS mass sensors: a theoretical and an experimental investigation [J]. Journal of Micromechanics and Microengineering, 2016, 26(10): 105009.
- [7] TAUSIFF M, OUKAD H M, ALQAHTANI H, et al. Local nonlinear dynamics of MEMS arches actuated by fringing-field electrostatic actuation [J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95(4): 2907-2921.
- [8] XIAO Z H, SHI Z, WANG X F, et al. Dual-jump amplification in an electric-thermal adjusted arch beam micro-resonator [J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2024, 365: 114925.
- [9] AGRAWAL D K, WOODHOUSE J, SESHIA A A. Observation of locked phase dynamics and enhanced frequency stability in synchronized micromechanical oscillators [J]. Physical Review Letters, 2013, 111(8): 084101.
- [10] KRYLOV S, GERSON Y, NACHMIAS T, et al. Excitation of large-amplitude parametric resonance by the mechanical stiffness modulation of a microstructure [J]. Journal of Micromechanics and Microengineering, 2010, 20(1): 015041.
- [11] 魏梦可,韩修静.慢变参数激励 Duffing 系统中的延迟分岔现象及其诱发的簇发振荡[J].动力学与控制学报,2023,21(8):49-54.
WEI M K, HAN X J. Bifurcation delay behaviors and bursting oscillations in a parametrically excited duffing's system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 49-54. (in Chinese)
- [12] VILLANUEVA L G, KARABALIN R B, MATHENY M H, et al. A nanoscale parametric feedback oscillator [J]. Nano Letters, 2011, 11(11): 5054-5059.
- [13] HARISH K M, GALLACHER B J, BURDESS J S, et al. Experimental investigation of parametric and externally forced motion in resonant MEMS sensors [J]. Journal of Micromechanics and Microengineering, 2009, 19(1): 015021.
- [14] LEE J, SHAW S W, FENG P X L. Giant parametric amplification and spectral narrowing in atomically thin MoS₂ nanomechanical resonators [J]. Applied Physics Reviews, 2022, 9(1): 011404.
- [15] LI C X, XI J Q, WANG Y, et al. On enhancing the sensitivity of resonant thermometers based on parametric modulation [J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 2021, 30(4): 539-549.
- [16] SHMULEVICH S, GRINBERG I H, ELATA D. A MEMS implementation of a classic parametric resonator [J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 2015, 24(5): 1285-1292.
- [17] ZHANG W M, MENG G. Nonlinear dynamic analysis of electrostatically actuated resonant MEMS sensors under parametric excitation [J]. IEEE sensors journal, 2007, 7(3): 370-380.
- [18] PRASAD P, ARORA N, NAIK A K. Parametric

- amplification in MoS₂ drum resonator [J]. *Nanoscale*, 2017, 9(46): 18299–18304.
- [19] DENG J. Numerical simulation of stability and responses of dynamic systems under parametric excitation [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 119: 648–676.
- [20] 李森林. 多晶硅电阻电热激励/压阻检测微谐振式加速度计研究[D]. 杭州: 中国计量学院, 2014.
LI S L. Research on resonant accelerometers based on microresonators electrothermally excited and piezoresistively detected using polysilicon resistors [D]. Hangzhou: China University of Metrology, 2014. (in Chinese)
- [21] TORTEMAN B, KESSLER Y, LIBERZON A, et al. Micro-beam resonator parametrically excited by electro-thermal Joule's heating and its use as a flow sensor [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 98(4): 3051–3065.
- [22] JHA C M, HOPCROFT M A, CHANDORKAR S A, et al. Thermal isolation of encapsulated MEMS resonators [J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2008, 17(1): 175–184.
- [23] PU D, WEI X Y, XU L, et al. Synchronization of electrically coupled micromechanical oscillators with a frequency ratio of 3 : 1 [J]. *Applied Physics Letters*, 2018, 112(1): 013503.
- [24] JIA Y, DU S J, SESHIA A A. Twenty-eight orders of parametric resonance in a microelectromechanical device for multi-band vibration energy harvesting [J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 30167.
- [25] JIA Y, YAN J Z, SOGA K, et al. Parametrically excited MEMS vibration energy harvesters with design approaches to overcome the initiation threshold amplitude [J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2013, 23(11): 114007.
- [26] PIRBODAGHI T, HOSEINI S H, AHMADIAN M T, et al. Duffing equations with cubic and quintic nonlinearities [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2009, 57(3): 500–506.
- [27] LAJIMI S A M, FRISWELL M I. Dynamics of a non-linearly damped microresonator under parametric excitation and its application in developing sensitive inertial sensors with ultra-wide dynamic ranges [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2020, 123: 103491.
- [28] ANSARI M Z, CHO C. An analytical model of joule heating in piezoresistive microcantilevers [J]. *Sensors*, 2010, 10(11): 9668–9686.
- [29] BOUKABACHE A, PONS P. Doping effects on thermal behaviour of silicon resistor [J]. *Electronics Letters*, 2002, 38(7): 342.
- [30] HAJJAJ A Z, RAMINI A, ALCHEIKH N, et al. Electrothermally tunable arch resonator [J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2017, 26(4): 837–845.
- [31] OKADA Y, TOKUMARU Y. Precise determination of lattice parameter and thermal expansion coefficient of silicon between 300 and 1500 K [J]. *Journal of Applied Physics*, 1984, 56(2): 314–320.