

# Udwadia-Kalaba 方法在四足机器人单腿轨迹跟踪控制违约问题的应用<sup>\*</sup>

刘珺 张欣刚 张树翠 姚文莉<sup>†</sup>

(青岛理工大学 理学院, 青岛 266525)

**摘要** 针对四足机器人由于初始条件与约束方程不相容和数值积分对低阶约束造成的违约的问题,提出了一种基于 Udwadia-Kalaba 方法以解决以上四足机器人单腿动力学违约问题的轨迹跟踪控制方法,该方法利用拉格朗日方程建立无约束的动力学方程,将系统的预定轨迹视为系统的约束关系,联系正运动学得到的末端位置建立约束方程。首先,对于初值违约问题,设置了各关节不为零的初角速度,基于 Udwadia-Kalaba 方法所进行的末端轨迹跟踪误差较大,利用 Baumgarte 稳定性方法以减小系统误差,并与 PID 控制下得到的末端轨迹进行对比,验证了对于修正初值违约问题, Baumgarte 稳定性方法的优越性;接着,考虑数值积分对低阶约束造成的违约的问题,将其中一个约束轨迹设置为和时间有关的线性方程,利用 Udwadia-Kalaba 方法进行轨迹跟踪控制,发现其轨迹偏差较大,而后利用 Baumgarte 稳定性方法对末端轨迹进行修正,达到了使末端轨迹与轨迹规划贴合的目的。

**关键词** 分析力学, Udwadia-Kalaba 方法, 轨迹跟踪控制, 约束稳定化方法

**中图分类号:** O316

**文献标志码:** A

## The Application of the Udwadia-Kalaba Method in Addressing Constraint Violations in Single-Leg Trajectory Tracking Control of Quadruped Robots<sup>\*</sup>

Liu Jun Zhang Xingang Zhang Shucui Yao Wenli<sup>†</sup>

(School of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao 266525, China)

**Abstract** In response to the issue of violation in trajectory tracking of single leg dynamics for quadruped robots due to the incompatibility between initial conditions and constraint equations, as well as the violation caused by numerical integration on low-order constraints, a trajectory tracking control method based on the Udwadia-Kalaba method is proposed. This method utilizes the Lagrangian equation to establish unconstrained dynamic equations, considers the predetermined trajectory of the system as a constraint relationship, and establishes constraint equations based on the end position obtained from direct kinematics. Firstly, to address the problem of initial value violation, non-zero initial angular velocities of each joint are set. It is found that the trajectory tracking error based on the Udwadia-Kalaba method is relatively large. To mitigate this issue, the Baumgarte stability method is employed to reduce system errors, and a comparison with the end trajectory obtained under PID control is conducted, validating the superiority of the Baumgarte stability method in correcting initial value violations. Subsequently, considering the violation caused by numerical integration on low-order constraints, one of the constraint trajectories is set as a time-dependent linear equation. Trajectory tracking control is performed using the Udwadia-Kalaba method, which results in significant trajectory deviation. Then, the Baumgarte stability

2024-02-26 收到第 1 稿, 2024-04-28 收到修改稿。

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金项目(12272197, 12202224), 山东省自然科学基金项目(ZR2022MA066), National Natural Science Foundation of China (12272197, 12202224), Shandong Province Nature Fund Project(ZR2022MA066)。

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail: wenli.yao@qut.edu.cn

ty method is utilized to correct the end trajectory, achieving the goal of aligning the end trajectory with the trajectory planning.

**Key words** analytical mechanics, Udwadia-Kalaba method, trajectory tracking control, constraint stabilization method

## 引言

四足机器人具有结构简单、稳定性好、带载能力强的特点,近年来一直是国内外机器人领域的研究热点之一。在样机方面,上海交通大学的仿生小象四足机器人<sup>[1]</sup>,上海大学的 XDog<sup>[2]</sup>,波士顿动力公司(Boston Dynamics)的 BigDog、LittleDog<sup>[3,4]</sup>,以及麻省理工学院(MIT)的 Cheetah<sup>[5]</sup>等,都是很典型的四足机器人。

在对四足机器人进行轨迹跟踪时,鲁棒、精确的机器人数学模型对于提高控制精度具有重要的影响。事实上,以位置信号为控制对象的模型控制方法很难有效地规避机器人因受力原因导致的位置误差。在动力学建模方法中,应用最多的是拉格朗日法和拉格朗日乘子法,拉格朗日法适用于自由度较少的模型,对于一些复杂模型可以使用拉格朗日乘子法,但拉格朗日乘子不易得到且不能直接表示成约束力矩的形式。

基于 Udwadia-Kalaba 方法的伺服约束控制理论可以较好地应用在机械系统的轨迹跟踪控制中<sup>[6,7]</sup>,该方法可以相对直观地建立完整约束和非完整约束下的系统运动方程,且在不引入辅助变量的情况下得到加速度的显式方程。因其在表达上的简洁性和一般性而受到不同领域的关注和应用<sup>[8-10]</sup>。2014年,长安大学的张新荣等人<sup>[11]</sup>利用 Udwadia-Kalaba 方程提出了一项创新的机械臂伺服约束跟踪控制方法。该方法具备在时变系统中实时计算系统所需关节约束力矩(即关节控制力矩)的能力。在2020年,韩江等人<sup>[12]</sup>采用了层级建模的方法,并结合 Udwadia-Kalaba 方法,成功地建立了机器人的动力学方程。2022年,董方方等人<sup>[13]</sup>应用 Udwadia-Kalaba 方法对双移动机械臂空间协作搬运进行建模,证明了该方法无需引入拉格朗日乘子或辅助变量,就能够得到约束力的解析解,并且求解过程相对简洁。

伺服约束控制可以随物体运动的位置、速度、加

速度等变化量的变化而变化,从而对机体进行有效地控制。但是,Udwadia-Kalaba 方程要求初始条件必须是相容的,在伺服约束控制的过程中,约束系统动力学模型的数值积分会对低阶约束产生违约,因初始条件与约束方程不相容所引起的控制偏差也会出现约束违约现象。

最常见的修正方法有两种:直接约束稳定方法和违约消去法。违约消去法直接对积分得到的速度和位置进行修正,以确保它们符合速度和位置约束方程。其中,比较常用的消去方法包括几何正交投影法<sup>[14-16]</sup>,质量正交投影方法<sup>[17]</sup>,物理正交投影方法<sup>[18]</sup>,速度与位置直接修正法<sup>[19]</sup>等。间接违约修正方法和直接违约修正方法有很大的不同,前者是直接更改系统的约束方程,不能直接控制违约,后者只是对积分得到的速度和位置进行修正,可控制违约阈值达到机器精度。Baumgarte 约束稳定方法<sup>[20]</sup>(以下用 BSM 来代指)是最为典型、应用最为广泛的修正方法,该方法利用反馈控制理论,将位移约束和速度约束引入加速度约束方程,通过约束修正得到稳定化的动力学方程。刘颖<sup>[21]</sup>基于 BSM 提出一种反馈参数自适应的约束违约稳定法,该方法可以实现和的自适应选择,为计算带来了便利。

本文以四足机器人为研究对象,基于 Udwadia-Kalaba 方法的伺服约束控制,将系统的预设轨迹转化为系统的约束,从而获得机械腿在预定轨迹下所需要的驱动力矩的解析表达式及相应的解析动力学方程。同时,考虑数值积分对低阶约束产生的违约现象,以及当系统初始条件与轨迹约束出现不相容的情况,采用 Baumgarte 稳定性方法修正数值违约问题,最终获得修正的机械腿解析动力学模型,并通过数值仿真验证了该模型的正确性。

## 1 动力学建模

受猫、狗等四足动物的步态和形体机构的启发,可将四足机器人划分为躯干和左前腿、左后腿、右前腿、右后腿五个部分,每条腿又可划分为侧摆髌关

节、髋关节、前后摆髋关节、大腿、膝关节和小腿六部分,如图 1 所示。

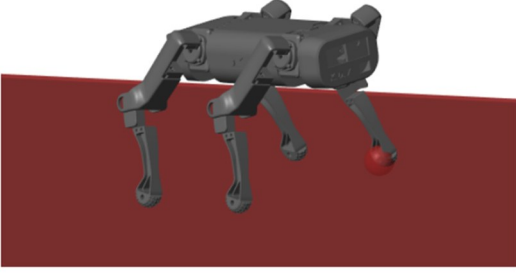


图 1 单腿 3 自由度的四足机器人  
Fig. 1 A 3-DOF of single leg quadruped robot

为了便于研究,将四足机器人的机械腿简化为如图 2 所示的多体系统。以杆件 1 与躯干的交点为原点,建立大地坐标系,  $q = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$  代表机械腿的三个广义坐标。以各关节中心为原点  $O$ ,  $X$  轴建立在各杆件的延伸方向,  $Z$  轴建立在关节轴的一侧。此外,  $X_0$  的方向竖直向下,  $Z_0$  的方向水平向右。杆的长度分别用  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$  表示,质量分别用  $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$  表示。

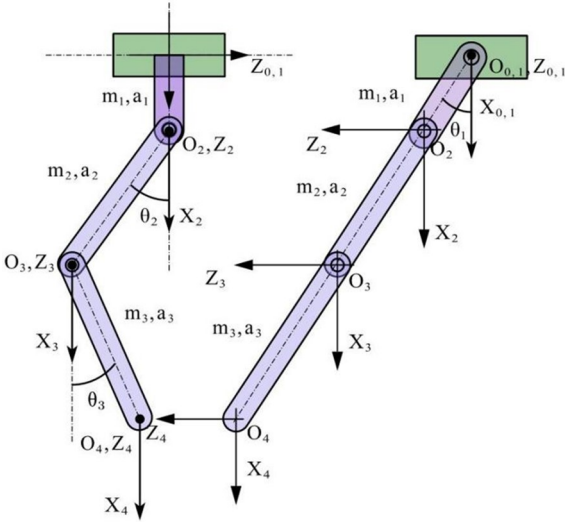


图 2 单腿正视图和单腿侧视图  
Fig. 2 Front elevation and side elevation of single leg

### 1.1 无约束的单腿动力学

机械腿的动力学模型可表示为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (1)$$

式中:  $q$  为广义坐标,  $\dot{q}$  为广义速度,  $\tau$  为广义的力向量,  $M$  为质量矩阵,  $C$  为科氏力和向心力矩阵,  $G$  为重力矩阵。

由拉格朗日法导出系统的动力学方程,由于是无约束的机械腿动力学方程,所以令  $\tau = 0$ 。

$$\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \quad (2)$$

拉格朗日函数的表达式  $L$  为

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \quad (3)$$

式中,  $T$  为所有杆件的动能,  $U$  为所有杆件的重力势能。通过计算可化成公式的形式。

### 1.2 运动约束

采用 D-H 法,对四足机器人单腿进行运动学分析,建立运动学模型。

从图 2 得到的机械腿的运动学正解为

$${}^0_4T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T \quad (4)$$

式中,  ${}^i_jT$  为坐标系  $\{j\}$  在  $\{i\}$  中的描述

$$\begin{aligned} {}^0_1T &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ {}^2_3T &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $s_i = \sin\theta_i$ ,  $c_i = \cos\theta_i$ 。

由公式(4)可将足端位置表示为

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \\ 1 \end{cases} = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T \begin{cases} a_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x = a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1 c_{23} \\ y = a_1 s_1 + a_2 s_1 c_2 + a_3 s_1 c_{23} \\ z = a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ ,  $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$ 。

设机械腿摆动相所受末端运动轨迹的轨迹方程为:

$$\begin{cases} x_d = x_0 - H \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda T}\right) \right] \\ y_d = Y \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{\lambda T}\right) \right] + y_0 \\ z_d = S \left[ \frac{t}{\lambda T} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{\lambda T}\right) \right] + z_0 \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $x_d$ 、 $y_d$ 、 $z_d$  为期望轨迹坐标,  $x_0$ 、 $y_0$ 、 $z_0$  为初始末端坐标,  $H$ 、 $Y$ 、 $S$  分别为抬腿高度、 $y$  方向偏移距离、步长,为腾空率,  $T$  为步态周期。

对公式(8)求时间的二阶导数,其加速度的轨迹方程可表示为

$$\begin{cases} \ddot{x}_d = -2H\left(\frac{\pi}{\lambda T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda T}\right) \\ \ddot{y}_d = \frac{1}{2}Y\left(\frac{\pi}{\lambda T}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi t}{\lambda T}\right) \\ \ddot{z}_d = \frac{2\pi S}{(\lambda T)^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\lambda T}\right) \end{cases} \quad (9)$$

### 1.3 动力学方程

无约束的机械系统可以描述为:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{q}$  为描述系统的  $n$  维广义坐标,  $\mathbf{M}$  为  $n \times n$  维对称正定广义质量矩阵,  $\mathbf{Q}$  为广义力向量。

设系统受到  $m$  个约束,其中包括系统的运动轨迹和系统自身的几何约束,约束方程可表示为

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \quad (11)$$

将公式(11)对时间求导可得到  $m$  个广义加速度形式的约束方程

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (12)$$

$$\begin{cases} \mathbf{b}(1,1) = a_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - a_2 (-\cos\theta_1 \cos\theta_2 \dot{\theta}_1^2 - 2\sin\theta_1 \sin\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2^2) - a_3 [-\cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + 2\sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - \cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2] - 2H\left(\frac{\pi}{\lambda T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda T}\right) \\ \mathbf{b}(2,1) = a_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - a_2 (-\cos\theta_2 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - \sin\theta_2 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \sin\theta_2 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \cos\theta_2 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2) + a_3 [-\sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 - 2\cos\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - \sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2] + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\lambda T}\right)^2 Y \cos\left(\frac{\pi t}{\lambda T}\right) \\ \mathbf{b}(3,1) = -a_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{2\pi S}{(\lambda T)^2} \sin\left(\frac{2\pi T}{\lambda T}\right) \end{cases} \quad (14)$$

添加约束条件后系统的运动方程可表示为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_c \quad (15)$$

式中,  $\mathbf{Q}_c$  为无约束系统满足约束方程所需的伺服控制力。若初始条件与约束方程(12)相容,则有

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{A} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}})^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}) \quad (16)$$

式中,角标“+”表示 Moore-Penrose 广义逆。

上述约束控制方法要求系统初始条件与轨迹约束相容,即初始条件不满足时会出现违约问题。

另外,此方法在应用时,要将约束方程表示成加速度形式,在数值积分过程中会出现低阶约束无法满足的情况,从而使轨迹跟踪控制的误差增大。

### 1.4 反馈参数自适应的违约稳定法

Baumgarte 约束违约稳定法方程为

$$\ddot{\Phi} + 2\alpha \dot{\Phi} + \beta^2 \Phi = 0 \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{A}$  是系统的雅可比矩阵,  $\mathbf{b}$  为  $m$  维加速度余项。

将由正运动学求得的  $x, y, z$  对时间求二阶导代入公式(7),并将除二次项外的其余项移到等式右边写成公式(12)的形式,得到约束矩阵。

其中

$$\begin{cases} \mathbf{A}(1,1) = -a_1 \sin\theta_1 - a_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 - a_3 \sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ \mathbf{A}(1,2) = -a_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 - a_3 \cos\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ \mathbf{A}(1,3) = -a_3 \cos\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ \mathbf{A}(2,1) = -a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + a_3 \cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ \mathbf{A}(2,2) = -a_2 \sin\theta_1 \sin\theta_1 - 2a_3 \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ \mathbf{A}(2,3) = a_3 \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ \mathbf{A}(3,1) = 0 \\ \mathbf{A}(3,2) = -a_2 \cos\theta_2 - a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ \mathbf{A}(3,3) = a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{cases} \quad (13)$$

式中,  $\ddot{\Phi}$  为加速度约束方程,  $\dot{\Phi}$  为速度约束方程,  $\Phi$  为位移约束方程;  $\alpha$  和  $\beta$  为反馈控制参数。

刘颖<sup>[21]</sup> 基于 BSM 提出一种多体系统动力学方程的反馈参数自适应的约束违约稳定法,该方法将反馈参数  $\alpha$  和  $\beta$  的选择和计算融入速度约束违约程度  $err_{\dot{\Phi}}$  和位移约束违约程度  $err_{\Phi}$  当中,使计算缓解没有增加额外的复杂计算,不仅保持 BSM 的高效性,而且执行简单。此方法不仅能够获得较好的数值结果,而且适用性强。

记  $t = t_n$  时刻的计算误差为  $err$ , 定义

$$y[err, ec(x)] = 10 \cdot err \cdot ec(x) \quad (18)$$

式中,  $x$  代入上述求得的速度约束违约程度  $err_{\dot{\Phi}}$  和位移约束违约程度  $err_{\Phi}$ 。

其中



$$ec(x) = \begin{cases} 10 & (x \geq -6) \\ 0 & (x \leq -16) \\ 16 + x & (-16 < x < -6) \end{cases} \quad (19)$$

则  $\alpha$  和  $\beta$  的取值可定义为

$$\begin{cases} \alpha = y[err, ec(err_{\phi})] \\ \beta = y[err, ec(err_{\phi})] \end{cases} \quad (20)$$

## 2 仿真分析

### 2.1 无约束情况下的足端轨迹跟踪

假设初始条件为:  $q(0) = [-0.2618; -0.6981; 0.8727; ]$ ,  $\dot{q}(0) = [0; 0; 0; ]$ , 初始笛卡尔坐标由正运动学计算得到. 仿真参数为:  $m_1 = m_2 = m_3 = 0.5\text{kg}$ ,  $a_1 = 0.2\text{m}$ ,  $a_2 = a_3 = 0.5\text{m}$ ,  $g = 9.8\text{N/kg}$ ,  $S = 0.4\text{m}$ ,  $\lambda = 0.25$ ,  $T = 4\text{s}$ ,  $H = 0.3\text{m}$ ,  $Y = 0.3\text{m}$ ,  $e = 1$ ,  $s = 3$ .

足端轨迹跟踪仿真结果如图 3 所示. 数值模拟结果表明, 采用 Udwadia-Kalaba 方程求解动力学方程所得的足端轨迹与期望轨迹吻合, 验证了 Udwadia-Kalaba 方程在对四足机器人单腿的足端进行准确轨迹跟踪控制方面的可行性.

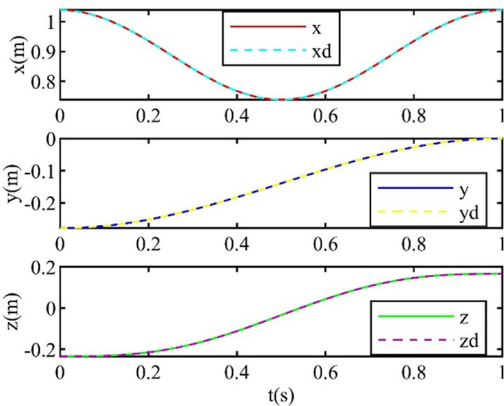


图 3 足端轨迹跟踪  
Fig. 3 Foot trajectory tracking

### 2.2 初始条件与轨迹约束不相容的足端轨迹跟踪

Udwadia-Kalaba 方法无需借助控制器即可实现对四足机器人足端的轨迹跟踪控制, 上一小节验证了其可行性. 然而, Udwadia-Kalaba 方法要求初始条件与约束方程相容, 在实际操作中, 四足机器人在行进过程中可能会出现导致各关节产生非零角速度的情况.

于是令  $\dot{q}(0) = [0.1; 0.1; 0.1; ]$ . 其数值仿真

结果如图 4 所示, 可以看出足端轨迹与预定轨迹误差较大, 并随时间变化误差逐渐增大. 针对这一情况可以利用 BSM 融入加速度约束方程中对其进行修正, 数值仿真结果如图 5 所示.

可以看到, 数值仿真的曲线与预期轨迹曲线较为贴合, 误差较小. 这表明 BSM 对 Udwadia-Kalaba 方法在这类问题上进行修正具有准确性和可行性.

除了 Udwadia-Kalaba 方法, 还可以使用一些控制器来对系统进行轨迹跟踪控制, PID 控制方法即为其中一种典型的控制方法, 其通过比例-积分-微分的形式来对系统进行控制, 使其贴合预期轨迹. 为验证利用 BSM 对 Udwadia-Kalaba 方法修正的优越性, 令其与 PID 控制下拉格朗日方程建立的动力学方程的数值模拟的结果(图 6)进行对比, 表明 PID 方法虽然也可以解决此类问题, 但曲线的波动较大, 对系统而言可能会存在一些稳定性问题. 相比较而言, 利用 BSM 修正后的 Udwadia-Kalaba 方法控制下的足端轨迹曲线更为平缓, 验证了利用 BSM 修正后的 Udwadia-Kalaba 方法在处理此类情况下的轨迹跟踪控制的优越性.

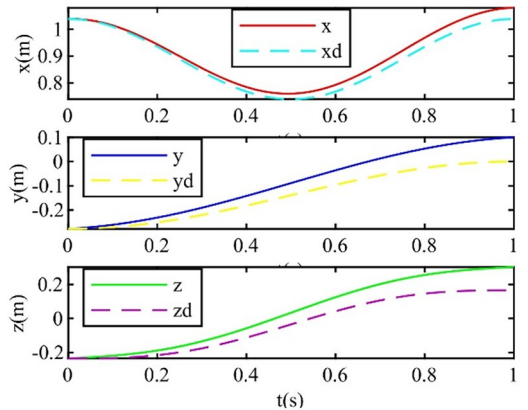


图 4 初值违约的足端轨迹跟踪  
Fig. 4 Foot trajectory tracking of initial condition's default

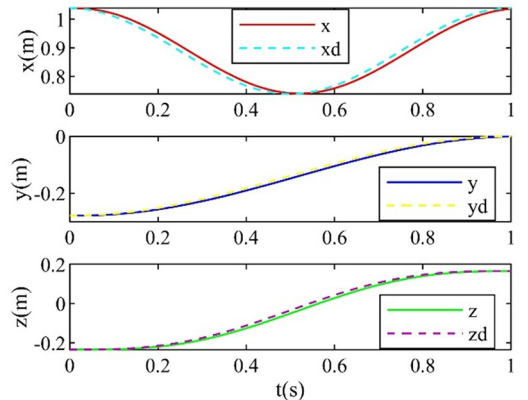


图 5 修正后的初值违约的足端轨迹跟踪  
Fig. 5 Modified foot trajectory tracking of initial condition's default

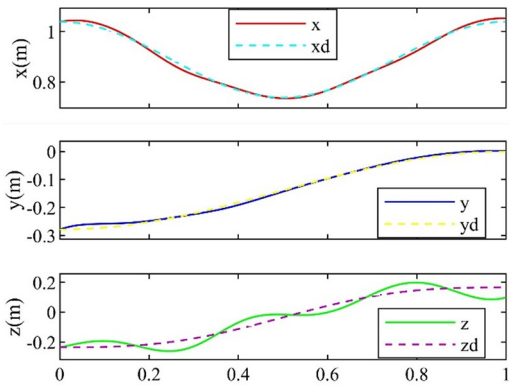


图6 PID控制的初值违约足端轨迹跟踪  
Fig. 6 Foot trajectory tracking of initial condition's default of PID control

2.3 低阶轨迹约束式不满足的足端轨迹跟踪

通过 1.3 小节对 Udwadia-Kalaba 方程的叙述, 可以了解到, 在位移约束方程融入 Udwadia-Kalaba 方程中时, 需要将位移约束方程变为加速度形式. 因此, 当位移约束方程为一阶方程时, 在数值积分的过程中会导致约束失效. 考虑到此类情况, 令  $y$  方向的足端轨迹方程改为公式(21)所示, 其余方向不变, 对四足机器人单腿足端轨迹跟踪控制进行数值仿真.

$$y = Yt + y_0 \tag{21}$$

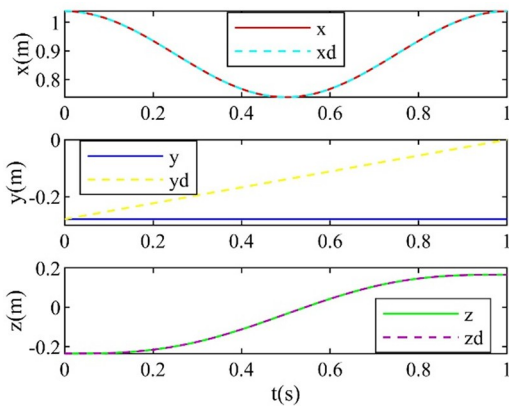


图7 低阶违约的足端轨迹跟踪  
Fig. 7 Foot trajectory tracking of low-level default

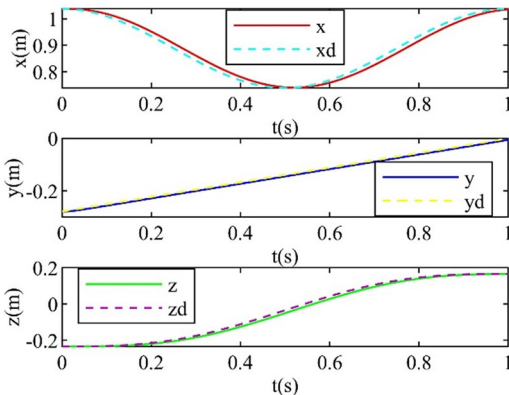


图8 修正后的低阶违约的足端轨迹跟踪  
Fig. 8 Modified foot trajectory tracking of low-level default

数值仿真结果如图 7 所示. 其数值仿真结果表明, 此时  $y$  方向并没有按照预期足端轨迹受到约束, 利用 BSM 对其进行修正, 仿真结果如图 8 所示.

可以看到, 数值仿真的曲线与预期轨迹曲线重合. 这表明 BSM 对 Udwadia-Kalaba 方法在修正数值积分对低阶约束造成违约问题上也具有准确性和可行性.

3 结论

Udwadia-Kalaba (U-K)方法在四足机器人足端轨迹跟踪控制中表现出良好效果, 但该方法要求初始条件与约束方程相容. 然而, 在四足机器人行进过程中, 关节初角速度不为零的情况不可避免, 即初值违约问题. 另外, 将轨迹方程融入 U-K 方程时, 需要对位移约束方程对时间进行两次求导. 当预期轨迹方程为一阶时, 在数值积分过程中可能导致约束失效, 从而产生违约现象. 对于违约问题, Baumgarte 提出了一种违约修正方法, 本文通过数值分析验证了该方法能够有效融入 Udwadia-Kalaba 方程, 并对上述违约问题进行了修正. , 本文提出的约束稳定化方法在处理四足机器人足端轨迹跟踪控制中的违约问题上具有实用价值.

参考文献

[1] 田兴华, 高峰, 陈先宝, 等. 四足仿生机器人混联腿构型设计及比较[J]. 机械工程学报, 2013, 49(6): 81-88.  
TIAN X H, GAO F, CHEN X B, et al. Mechanism design and comparison for quadruped robot with parallel-serial leg [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(6): 81-88. (in Chinese)  
[2] 徐瑞哲. 首个高机动性小型四足机器狗, 能跑会跳有望做导盲犬[EB/OL]. (2015-08-04)[2024-02-26]. <http://sh.eastday.com/m/20150804/u1a8823245.html>.  
XU R Z. The first highly agile small quadruped robot dog, capable of running and jumping, is expected to serve as a guide dog. [EB/OL]. (2015-08-04)[2024-02-26]. <http://sh.eastday.com/m/20150804/u1a8823245.html>. (in Chinese)  
[3] WOODEN D, MALCHANO M, BLANKESPOOR K, et al. Autonomous navigation for BigDog [C]// 2010 IEEE International Conference on Robotics and

- Automation, New York: IEEE, 2010: 4736—4741.
- [4] MURPHY M P, SAUNDERS A, MOREIRA C, et al. The LittleDog robot [J]. The International Journal of Robotics Research, 2011, 30(2): 145—149.
- [5] SEOK S, WANG A, CHUAH M Y, et al. Design principles for energy-efficient legged locomotion and implementation on the MIT cheetah robot [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2015, 20(3): 1117—1129.
- [6] UDWADIA F E, KALABA R E. A new perspective on constrained motion [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1992, 439(1906): 407—410.
- [7] UDWADIA F E, KALABA R E. Explicit equations of motion for mechanical systems with nonideal constraints [J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(3): 462—467.
- [8] XU Y R, LIU R. Dynamic modeling of constrained planar multibody systems: a case of lower limbs rehabilitative robot [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2018, 32(7): 3389—3394.
- [9] ZEGZHDA S A, NAUMOVA N V, SOLTAKHANOV S K, et al. Relationship between the Udwadia-Kalaba equations and the generalized Lagrange and Maggi equations [J]. Vestnik St Petersburg University: Mathematics, 2016, 49(1): 81—84.
- [10] 梁斌, 袁亮, 冉腾, 等. 基于 Udwadia-Kalaba 理论的四足机器人单腿动力学分析[J]. 机械传动, 2022, 46(12): 1—6.
- LIANG B, YUAN L, RAN T, et al. Dynamics analysis of a single leg of quadruped robots based on Udwadia-Kalaba theory [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2022, 46(12): 1—6. (in Chinese)
- [11] 张新荣, CHEN Yehwa, 平昭琪. 基于 Udwadia 和 Kalaba 方程的机械臂轨迹跟踪控制[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2014, 34(1): 115—119.
- ZHANG X R, CHEN Y H, PING Z Q. Mechanical manipulator tracking control based on Udwadia and Kalaba equation [J]. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition), 2014, 34(1): 115—119. (in Chinese)
- [12] 韩江, 汪鹏, 董方方, 等. 基于 Udwadia-Kalaba 方法的平面冗余并联机器人建模与轨迹跟踪控制[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(11): 1183—1196.
- HAN J, WANG P, DONG F F, et al. Modeling and control of planar redundant parallel robots based on the Udwadia-Kalaba method [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2020, 41(11): 1183—1196. (in Chinese)
- [13] 董方方, 喻斌, 赵晓敏, 等. 双移动机械臂空间协作动力学建模研究[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(8): 846—856.
- DONG F F, YU B, ZHAO X M, et al. Dynamic modeling of spatial cooperation between dual-arm mobile manipulators [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2022, 43(8): 846—856. (in Chinese)
- [14] EICH E. Convergence results for a coordinate projection method applied to mechanical systems with algebraic constraints [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1993, 30(5): 1467—1482.
- [15] YU Q, CHEN I M. A direct violation correction method in numerical simulation of constrained multibody systems [J]. Computational Mechanics, 2000, 26(1): 52—57.
- [16] YOON S, HOWE R M, GREENWOOD D T. Geometric elimination of constraint violations in numerical simulation of Lagrangian equations [J]. Journal of Mechanical Design, 1994, 116(4): 1058—1064.
- [17] BAYO E, LEDESMA R. Augmented Lagrangian and mass-orthogonal projection methods for constrained multibody dynamics [J]. Nonlinear Dynamics, 1996, 9(1): 113—130.
- [18] BLAJER W. A geometric unification of constrained system dynamics [J]. Multibody System Dynamics, 1997, 1(1): 3—21.
- [19] MARQUES F, SOUTO A P, FLORES P. On the constraints violation in forward dynamics of multibody systems [J]. Multibody System Dynamics, 2017, 39(4): 385—419.
- [20] BAUMGARTE J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1972, 1(1): 1—16.
- [21] 刘颖, 马建敏. 多体系统动力学方程的反馈参数自适应约束违约稳定法[J]. 复旦学报(自然科学版), 2012, 51(4): 432—436+449.
- LIU Y, MA J M. Adaptive feedback parameters for baumgarte's constraint violation stabilization methods of multibody system's equations of motion [J]. Journal of Fudan University (Natural Science), 2012, 51(4): 432—436+449. (in Chinese)