

基于超细长弹性杆模型的斜拉索参数振动分析^{*}

管永乐 王鹏[†] 刘百强

(济南大学 土木建筑学院, 济南 250022)

摘要 将超细长弹性杆力学模型应用于描述大跨度斜拉桥拉索的非线性振动行为. 首先, 在假设拉索静态位形为悬链线型的基础上, 考虑斜拉索的几何非线性、垂度和抗弯刚度, 推导了拉索在轴向激励作用下的多模态非线性振动方程. 其次, 通过多尺度法对该振动方程求解, 得到拉索发生主共振、主参数共振和 3:1 次共振的常解存在条件; 再根据 Lyapunov 近似稳定性判据进一步揭示振幅稳态解的渐进稳定条件. 最后, 通过近似解与数值解的对比分析, 研究频率比、激励幅值和拉索阻尼对拉索振动特性的影响关系. 结果表明: 基于弹性杆模型的拉索振幅值略大于弹性梁模型, 且拉索发生主参数共振的最小起振幅值有所降低; 增大阻尼可一定程度上减小拉索的振动, 但抑制效果有限, 故控制激励幅值是减小拉索振动的有效方法.

关键词 Kirchhoff 弹性杆方程, 斜拉索, 轴向激励, 参数振动, 多尺度法

中图分类号: O322; O323

文献标志码: A

Parametric Vibration Analysis of Stay Cables Using a Super-Thin Elastic Rod Model^{*}

Guan Yongle Wang Peng[†] Liu Baiqiang

(School of Civil Engineering and Architecture, University of Jinan, Jinan 250022, China)

Abstract The mechanical model of super-thin elastic rod is applied to describe the nonlinear vibration behavior of the cable of long-span cable-stayed bridge. Firstly, considering the geometric nonlinearity, sag and flexural stiffness of the cable, the multimodal nonlinear vibration equation of the cable under axial excitation is derived on the basis of assuming that the static configuration of the cable is catenary. Secondly, the vibration equation is solved by multiscale method, and the existence conditions of the constant solutions of primary resonance, primary parameter resonance and 3:1 resonance are obtained. The sufficient conditions for the existence of the asymptotic steady solution are further obtained according to the Lyapunov's first approximate stability criterion. Finally, the effects of frequency ratio, excitation amplitude and cable damping on cable vibration characteristics are studied by comparing the approximate solution with the numerical solution. The results show that the amplitude of the cable based on the elastic rod model is slightly larger than that of the elastic beam model, and the minimum amplitude of the main parameter resonance of the cable is reduced. Increasing damping can reduce the vibration of the cable to some extent, but the suppression effect is limited, so controlling the excitation amplitude is an effective method to reduce the vibration of the cable.

Key words Kirchhoff elastic rod equation, stay cable, axial excitation, parametric vibration, multiscale method

2024-04-16 收到第 1 稿, 2024-05-15 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12272148, 11772141), National Natural Science Foundation of China(12272148, 11772141).

[†] 通信作者 E-mail: cea_wangp@ujn.edu.cn

引言

斜拉索是斜拉桥的重要构件,在外荷载作用下易产生振动响应,影响桥梁安全,其中因轴向激励所产生的参数振动是工程中关注的重点.在参数振动的研究方面,李凤臣^[1,2]研究了理想激励下拉索的振动响应,文献[3]在考虑了拉索的自重弦分量,研究了理想轴向激励下大跨度斜拉索的参数振动及稳定性.汪峰等^[4,5]研究了随机激励下受梁塔影响的参数振动特性以及索力和激励幅值对拉索振动的影响,顾明等^[6]研究了轴向窄带随机激励下斜拉索的参数振动,并进行了数值模拟.文献[7]研究了抗弯刚度对拉索激频响应、幅频响应的影响,文献[8]考虑抗弯刚度的影响,研究了拉索长度和直径对索力计算精度的影响.而随着斜拉桥跨度的增大和新材料的使用,拉索越来越细长,受外荷载影响,拉索易产生大范围运动.康厚军和赵跃宇等^[9,10]讨论了大跨度斜拉桥非线性建模方法、力学模型,分析了拉索的非线性动力学行为和拉索主参数共振的稳定性.然而以往关于斜拉索的研究往往采用梁模型,假设拉索静态位形为抛物线.但随着斜拉桥跨度的增大,索长不断增长,其在外荷载作用下表现出几何大变形、大范围运动的柔性行为.从而传统梁不能精确描述其动态变形行为^[11],而 Kirchhoff 超细长弹性杆力学理论^[12]为描述大变形行为提供了理论框架.本文引入 Kirchhoff 超细长弹性杆模型,以悬链线型近似替代拉索初始位形,考虑抗弯刚度对斜拉索振动的影响,分析拉索在轴向位移激励作用下的振动问题.

超细长弹性杆具有广泛的应用领域,如石油钻杆、海底电缆、纳米纤维和植物的杆茎等,特别近年来由于其成功描述了 DNA 分子的超螺旋几何结构及生物生长形态而再次引起研究者的兴趣. Goyal^[13]通过对海底电缆和 DNA 环的分析,研究了 Krichhoff 弹性杆的超螺旋动态问题.刘延柱、薛纭、陈立群等^[14-17]在超细长弹性杆静力学和动力学的分析力学、平面振动及生长弹性杆等方面做了系列工作.文献[18]~文献[23]研究了弹性杆方程的对称性与守恒量以及生长因素对弹性杆屈曲的影响.张琪昌和王炜等^[24,25]提出了一种非对称截面 Kirchhoff 弹性杆的简化方法,研究杆受外力作用时的拓扑状态变化情况.文献[26]研究了不同生长

策略下卷须的运动规律,并通过实验验证了卷须的生长现象.文献[27]做了基于超细长弹性杆模型的斜拉索静力学研究,分析不同条件下弹性拉伸和抗弯刚度对拉索几何构型的影响.但还未见将超细长弹性杆用于斜拉索振动的研究报道.

本工作根据 Kirchhoff 弹性杆理论,推导斜拉索在轴向激励作用下的多模态非线性运动方程.以苏通大桥斜拉索实际参数为例.通过多尺度法求解,得到斜拉索发生主共振、主参数共振和 3 : 1 次共振的幅频响应曲线,再根据 Lyapunov 理论讨论振幅稳态解的渐进稳定条件,并于抛物线型梁模型对比分析.最后通过四阶 Runge-Kutta 法数值解析,分析不同频率比、激励幅值和阻尼比对拉索振动的影响,以期工程中有效抑制拉索振动提供参考数据.

1 斜拉索振动力学模型

如图 1 所示为斜拉索模型,垂直高度为 h ,水平跨度为 l ,拉索两端点的距离为 L , $f(x)$ 表示斜拉索静态的中心线位形,拉索受到 $U\sin(\theta t)$ 的轴向位移激励.将斜拉索看成圆截面超细长弹性细杆,以 O 为原点,沿斜拉索中心线建立弧坐标 S .再以 O 为原点建立空间直角坐标系($O-xyz$),假设坐标

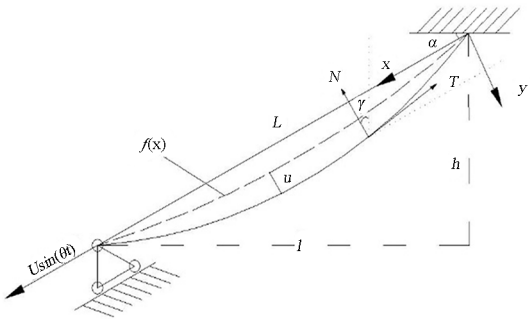


图 1 轴向激励斜拉索模型
Fig. 1 Axial excitation stay cable model

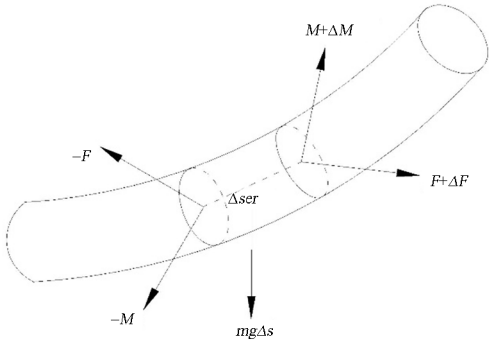


图 2 斜拉索微元段受力图
Fig. 2 Stay cable element force diagram

($O-xyz$)绕 Z 轴旋转 φ 角后的位置作为拉索中心线的 Frenet 坐标系($P-NBT$), N 、 B 和 T 为拉索中心线的法线轴、切线轴和副法线轴.令 Frenet 坐标系与截面主轴坐标系重合,设竖直方向与法线轴 N 的夹角为 γ ,可得 $\gamma=\varphi+\alpha$.图2为超细长弹性杆微元段 Δs 在重力作用下的两端受力图.为便于分析,本文作出以下假设:

- (1)忽略索力沿索长方向的变化;
- (2)不考虑拉索的剪切刚度和抗扭刚度;
- (3)拉索两端约束简化为铰接约束;
- (4)只考虑拉索的面内振动.

将斜拉索所受阻尼力视作分布力,不考虑阻尼所产生的弯矩,令 $\Delta s \rightarrow 0$,根据弹性杆动力学方程可得:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} + \omega \times \mathbf{F} + mg + c\mathbf{v} - \rho S \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \omega \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_T \times \mathbf{F} - \frac{\partial}{\partial t} (J \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \times (J \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad (2)$$

其中 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{F}$ 为作用在截面上的主矩和主矢, ρ 、 m 、 S 、 c 为拉索的密度、单位长度质量、截面积和阻尼系数; ω 为弯扭度^[12], J 表示单位长度杆的惯性张量, $\boldsymbol{\Omega}$ 为杆截面的角速度.拉索只在面内振动,且无原始曲率,则:

$$\omega_N = 0, \omega_B = \varphi', \omega_T = 0, \mathbf{M} = EI\gamma' \mathbf{e}_B \quad (3)$$

把上式代入式(1),并向 Frenet 坐标轴投影,整理后得:

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}'_N + \mathbf{F}_T \gamma' - \rho S \left(\frac{\partial \mathbf{v}_N}{\partial t} + \mathbf{v}_T \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) - \\ & \mathbf{F}_{Td} = \frac{EAU}{L} \sin(\theta t) + \sum_i \frac{\pi^2 i^2 EAY_i^2}{2L^2} + \sum_i \frac{i\pi EAT_2 Y_i \{e^{T_2} [1 - e^{-2T_2} \cos(i\pi)] - e^{-T_2} [1 - e^{2T_2} \cos(i\pi)]\}}{L(4T_2^2 + i^2 \pi^2)} \end{aligned} \quad (11)$$

由小垂度假定令 $ds=dx$,将式(8)、式(11)代入式(5)中,用 Galerkin 法对其进行离散化处理,将公式两端同乘 $\sin(n\pi x/L)$,对 x 在 $(0,L)$ 进行积分,简化后得

$$\begin{aligned} & \ddot{Y}_n + 2\omega_n \xi \dot{Y}_n + \left[\omega_n^2 + \frac{n^2 \pi^2 EA}{mL^3} U \sin(\theta t) \right] Y_n + \frac{2n\pi EAT_2 \{e^{T_2} [1 - e^{-2T_2} \cos(n\pi)] - e^{-T_2} [1 - e^{2T_2} \cos(n\pi)]\}}{mL(4T_2^2 + n^2 \pi^2)} \times \\ & \frac{T_2}{L} \sum_{i \neq n}^N \frac{i\pi EAT_2 \{e^{T_2} [1 - e^{-2T_2} \cos(i\pi)] - e^{-T_2} [1 - e^{2T_2} \cos(i\pi)]\}}{4T_2^2 + n^2 \pi^2} Y_i + \\ & \sum_i^N \frac{i n^2 \pi^3 EAT_2 \{e^{T_2} [1 - e^{-2T_2} \cos(i\pi)] - e^{-T_2} [1 - e^{2T_2} \cos(i\pi)]\}}{mL^3 (4T_2^2 + i^2 \pi^2)} Y_i Y_n + \\ & \sum_i^N \frac{n i^2 \pi^3 EAT_2 \{e^{T_2} [1 - e^{-2T_2} \cos(n\pi)] - e^{-T_2} [1 - e^{2T_2} \cos(n\pi)]\}}{2mL^3 (4T_2^2 + n^2 \pi^2)} Y_i^2 + \end{aligned}$$

$$c\mathbf{v}_N - mg \cos \gamma = 0 \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}'_T + \mathbf{F}_N \gamma' - \rho S \left(\frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial t} + \mathbf{v}_N \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) - \\ & c\mathbf{v}_T - mg \cos \gamma = 0 \end{aligned} \quad (4b)$$

$$EI\gamma'' + \mathbf{F}_N - \mathbf{J}_N \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_B}{\partial t} = 0 \quad (4c)$$

将式(4a)、式(4b)分别乘与 $\cos \varphi$ 、 $\sin \varphi$ 后相加,再向 y 轴投影得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{F}_T \sin \varphi + \mathbf{F}_N \cos \varphi)' - \rho S \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial t} - \\ & c\mathbf{v}_y - mg \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

假设斜拉索静力位形为悬链线^[28]

$$f(x) = \frac{1}{T_1} [\text{ch}(T_2) - \text{ch}(T_1 - T_2)] \quad (6)$$

$$\text{其中, } T_1 = \frac{mg}{F_0 \cos \alpha}, T_2 = \frac{LT_1}{2}.$$

令 $\mathbf{F}_{N0}$ 、 $\mathbf{F}_{T0}$ 为静张力, $\mathbf{F}_{Nd}$ 、 $\mathbf{F}_{Td}$ 为附加动张力

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_{T0} + \mathbf{F}_{Td}, \mathbf{F}_N = \mathbf{F}_{N0} + \mathbf{F}_{Nd} \quad (7)$$

根据静力平衡条件得

$$(\mathbf{F}_{T0} \frac{df}{ds} + \mathbf{F}_{N0} \cos \varphi)' = mg \cos \alpha \quad (8)$$

设斜拉索发生振动时在 y 方向上振幅为 u ,取斜拉索振动时的微元杆段 dp ,根据几何关系^[29]:

$$\mathbf{F}_{Td} \frac{dp}{ds} \approx EA \left[\frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \right] \quad (9)$$

近似取斜拉索振动模态为标准弦振动模态

$$u(x, t) = \sum_i Y_i(t) \cdot \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (10)$$

把式(6)、式(10)代入式(9),再将其对 x 沿弦长进行积分,根据斜拉索两端边界条件得

$$\sum_i^N \frac{i^2 n^2 \pi^4 EA}{4mL^4} Y_i^2 Y_n + \frac{2n\pi EAT_2 \{e^{T_2} [1 - e^{-2T_2} \cos(n\pi)] - e^{-T_2} [1 - e^{2T_2} \cos(n\pi)]\}}{mL^2 (4T_2^2 + n^2 \pi^2)} U \sin(\theta t) = 0$$

(12)

式中： $\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 F_0}{mL^2} (1 + K_1 + K_2)$

$$K_1 = \frac{EIn^2 \pi^2}{mL^2}, \quad K_2 = \frac{2EAT_2^2 \{e^{T_2} [1 - e^{-2T_2} \cos(n\pi)] - e^{-T_2} [1 - e^{2T_2} \cos(n\pi)]\}^2}{F_0 (4T_2^2 + n^2 \pi^2)^2}$$

其中 K_1, K_2 为拉索抗弯刚度、垂度对第 n 阶模态自振频率的影响系数^[30], $n=1, 2, 3 \cdots N, N$ 为计算时考虑前 N 阶模态. 与抛物线弹性梁模型公式相比, 主要差别在于垂度影响系数 K_2 .

2 多尺度法

采用多尺度法和 Lyapunov 稳定性理论分析上述非线性运动方程, 分别讨论斜拉索发生主共振、主参数共振和 3 : 1 次共振的条件及稳定性. 为方便计算, 下面只分析一阶共振, 将分析结果与抛物线型梁模型^[10] 相对比.

2.1 主共振

拉索参数如表 1 所示, 图 3 为拉索发生主共振的幅频响应曲线. 由图可得, 在相同频率比下基于弹性杆模型的拉索振幅略大于梁模型, 且最大响应幅值对应的频率比不为 1, 而朝频率比更大的方向弯曲, 表现出“硬化”特性. 激励幅值越大, 拉索的响

应幅值越大; 同一激励幅值条件下, 跨中响应幅值随着阻尼比的增大而减小. 在特定频率比区间内, 同一频率值会对应三个不同值的响应幅值, 此区间内的振动不稳定.

根据 Lyapunov 一次近似理论判定, 振幅稳态解 a_0 渐进稳定的条件为:

$$(\omega \xi)^2 + \frac{1}{4\theta^2} \left[(\omega^2 - \theta^2) + \frac{3}{4} a_0^2 \eta_3 \right] \times$$
$$\left[(\omega^2 - \theta^2) + \frac{9}{4} a_0^2 \eta_3 \right] \geq 0$$

(13)

其中 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 分别为参数激励项系数、平方非线性项系数、立方非线性项系数和外激励项系数. 图 3 中虚线部分由于不满足稳定条件, 所以为不稳定解.

2.2 主参数共振

图 4 为主参数共振幅频曲线. 在同一条件下, 基于弹性杆模型的拉索振幅略大于梁模型. 不同阻尼比下会存在一个特定值, 如 $\xi=0.5\%$, 其频率比为 2.012, 当激励频率大于该值, 会对应两个不同的响应幅值; 当激励频率小于该值, 存在唯一响应幅值. 阻尼比越大, 拉索响应幅值上限越小而下限越大; 同一阻尼比条件下, 激励幅值越大, 其响应幅值上限增大而下限降低.

表 1 斜拉索 S36 的参数
Table 1 Parameters of stay cable S36

$m / (\text{kg/m})$	L / m	A / m^2	E / GPa	F_0 / kN	α°
145	594.3	0.017357	205	8572.27	26.48

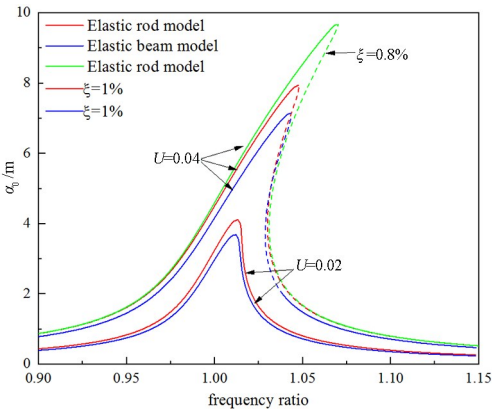


图 3 斜拉索主共振的幅频曲线

Fig. 3 The amplitude frequency curves of the primary resonance of stay cables

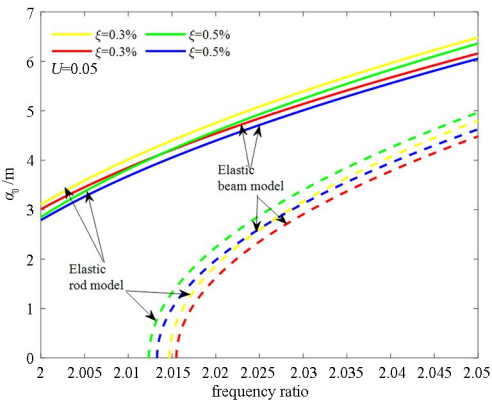


图 4 主参数共振幅频曲线

Fig. 4 The amplitude frequency curves of the primary parameter resonance

根据 Lyapunov 一次近似理论,得出主参数共振振幅稳态解的渐进稳定的条件为:

$$a_0^2 + \frac{4\omega^2}{3\eta_3}(\theta - 2\omega) - \left[\frac{8\eta_4 U}{2(\theta^2 - \omega^2)} \right]^2 \geq 0 \quad (14)$$

在图 4 中的两个振动响应幅值中,数值大的为稳定响应.

图 5 为发生主参数共振存在域.主参数共振的发生需要满足最小激励幅值条件,且最小激励幅值随着阻尼比的增大而增大.弹性杆模型的最小起振激励幅值略低于梁模型.

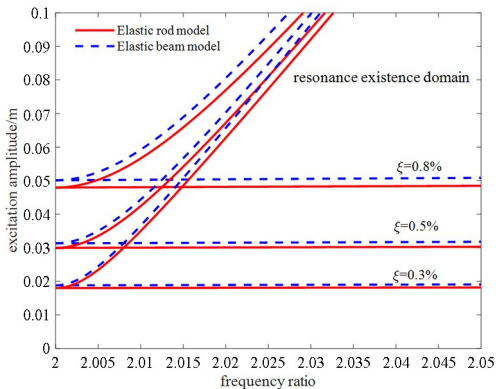


图 5 主参数共振存在域
Fig. 5 Primary parameter resonance existence domain

2.3 3 : 1 次共振

图 6 为 3 : 1 次共振存在域图.3 : 1 次共振的最小激励幅值随阻尼比的增大而增大,阻尼对其有良好的抑制作用.3 : 1 次共振只有在激励幅值较大时才会发生,因此不讨论其稳定性.

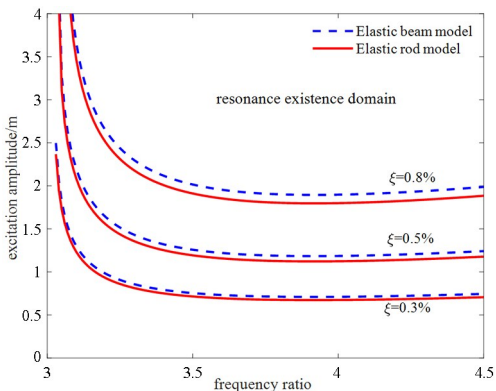


图 6 3 : 1 共振存在域
Fig. 6 3 : 1 resonance existence domain

3 数值验证分析

为分析面内参数对斜拉索振动特性的影响,用标准四阶龙格-库塔法数值求解式(12),并与多尺度法比较验证.拉索基本参数见表 1.

3.1 激励频率的影响

设端部轴向激励幅值 $U=0.06\text{m}$, 阻尼比 $\xi=0.5\%$, 积分时长为 2000 秒.通过数值计算,得到图 7 拉索响应幅值与频率比关系曲线.

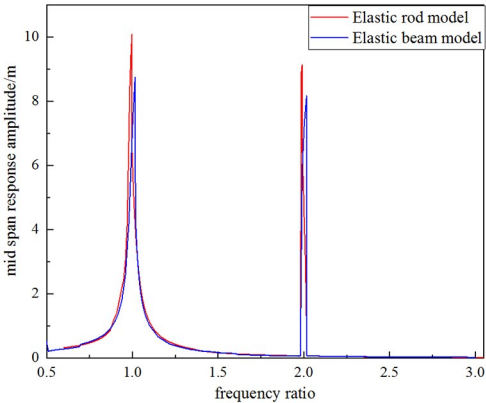


图 7 拉索跨中振幅与频率比关系曲线
Fig. 7 Relationship curve between the amplitude at the mid span and frequency ratio of stay cables

当频率比 θ/ω 在 0.6~3.2 之间,会出现 2 个峰值,且峰值出现在频率比约为 1 和 2 处,且基于弹性杆模型的拉索最大振幅值对应的频率比小于梁模型.主共振现象对应的频率范围最大,而后是主参数共振;同时其对应的响应幅值也较大,因此主共振和主参数共振为拉索振动的主要形式.

图 8 为主共振 $\theta/\omega \approx 1.006$ 和主参数共振 $\theta/\omega \approx 2$ 的时程曲线图.拉索跨中振幅会先呈现“拍”振,随后逐渐变为稳定的周期性振动;拉索发生主共振时达到稳定时所需时间比发生主参数共振更短;拉索发生共振时跨中振幅上下并不对称,其上部振幅小于下部振幅.

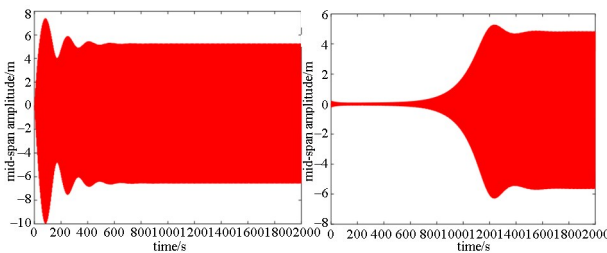


图 8 斜拉索共振时程曲线
Fig. 8 Time history curve of stay cables

3.2 激励幅值的影响

图 9 和图 10 为拉索发生主共振 $\theta/\omega \approx 1.006$ 、主参数共振 $\theta/\omega \approx 2$ 下激励幅值与跨中响应幅值的关系曲线.响应幅值随激励幅值的增大而增大,其中阻尼比越小,拉索跨中响应幅值越大.近似解

和数值解都表明拉索发生主参数共振需要满足最小起振激励幅值条件,且在相同阻尼比下最小起振激励幅值相同,最小起振激励幅值随着阻尼比的增大而增大.在阻尼比不变的情况下,当 $\theta/\omega \leq 2$ 时,不同激励幅值对应的拉索振幅响应有一个稳定解;而当 $\theta/\omega > 2$ 时,在某区间内拉索响应有两个稳态解,其中大值为稳定解.

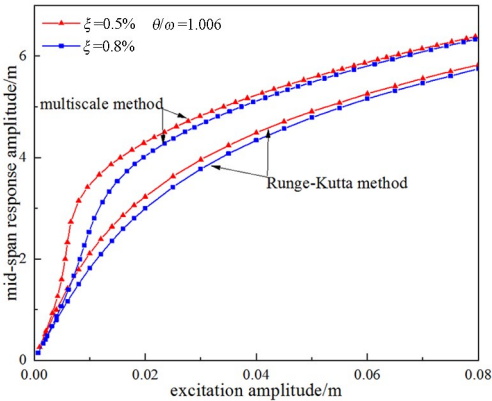


图 9 主共振幅值与激励幅值关系曲线
Fig. 9 Relationship curves between primary resonance amplitude and excitation amplitude

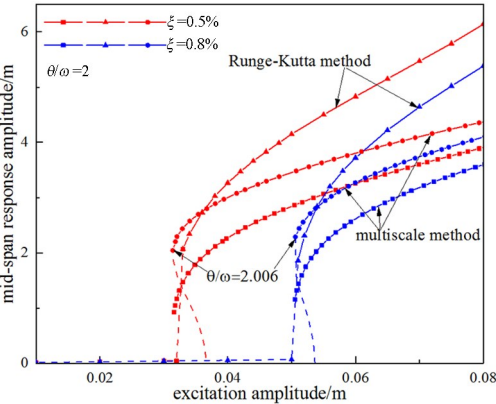


图 10 主参数共振幅值与激励幅值关系曲线
Fig. 10 The relationship curves between the primary parameter resonance amplitude and the excitation amplitude

3.3 拉索阻尼比的影响

图 11 和图 12 为拉索响应幅值与阻尼比关系曲线.通过近似解和数值解的比较,随着阻尼比的增大,拉索振幅的变化趋势相同.阻尼对主共振和主参数共振具有抑制作用.对于主共振,随着阻尼的增大,阻尼对其影响程度不断减小;对于主参数共振,阻尼的抑制作用更加明显,当阻尼增大到一定数值,会使外部激励达不到最小起振激励幅值,从而不会发生主参数共振.

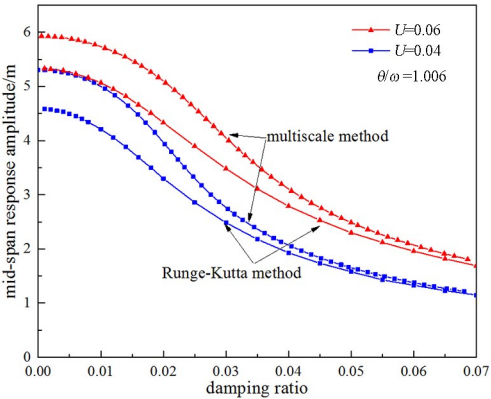


图 11 拉索主共振幅值与阻尼比关系曲线
Fig. 11 Relationship curve between primary resonance amplitude and damping ratio

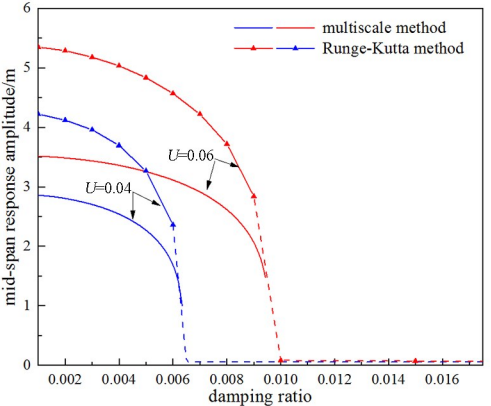


图 12 拉索主参数共振幅值与阻尼比关系曲线
Fig. 12 Relationship curve between primary parameter resonance amplitude and damping ratio

4 结论

本文基于超细长弹性杆模型,假设拉索静态位形为悬链线型,推导了斜拉索在轴向激励作用下的振动方程.通过理论分析和数值求解得到以下结论:

- (1)斜拉索在轴向位移激励作用下会发生参数共振,当拉索发生主共振时,会表现出“硬化”特性和“跳跃”现象;发生主参数共振时,拉索振动存在最小起振激励幅值,当激励幅值满足起振幅值要求后,拉索会迅速产生较大的响应幅值,且最小起振激励幅值随拉索阻尼的增大而增大.
- (2)基于悬链线型的弹性杆模型振动幅值略大于抛物线梁模型,且在主参数共振区间,其最小起振激励幅值有所下降.
- (3)拉索的参数振动特性受频率比、激励幅值和阻尼的影响.拉索响应幅值随激励幅值的增大而增大,呈现出振幅激增后逐渐变缓的趋势.增大阻尼可抑制拉索振动,但抑制效果会不断削弱,故控

制激励幅值是减小拉索振动的有效方法。

本文基于超细长弹性杆模型,只研究了拉索的面内振动,而关于拉索面外振动以及考虑扭转等因素对拉索振动的影响还需要进一步研究。

参考文献

- [1] 李凤臣,杨鸥,田石柱,等.考虑前2阶模态组合的拉索非线性参数共振研究[J].防灾减灾工程学报,2015,35(2):249—255.
LI F C, YANG O, TIAN S Z, et al. Nonlinear parametric resonance of cable in consideration of first two modes combination [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2015, 35 (2): 249—255. (in Chinese)
- [2] 李凤臣,田石柱,欧进萍.大跨度斜拉桥拉索的参数振动[J].沈阳建筑大学学报(自然科学版),2008,24(5):737—742.
LI F C, TIAN S Z, OU J P. Study on the parameter vibration of the large-span cable-stayed bridges [J]. Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science), 2008, 24(5): 737—742. (in Chinese)
- [3] LIU M, ZHENG L F, ZHOU P, et al. Stability and dynamics analysis of in-plane parametric vibration of stay cables in a cable-stayed bridge with superlong spans subjected to axial excitation[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2020, 33 (1): 04019106..
- [4] WANG F, CHEN X H, XIANG H J. Parametric vibration model and response analysis of cable-beam coupling under random excitation [J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2023, 11 (5): 2373—2386.
- [5] 汪峰,周华华,刘章军.考虑塔梁影响的斜拉索随机激励参数振动分析[J].力学季刊,2023,44(2):469—481.
WANG F, ZHOU H H, LIU Z J. Random excitation parameter vibration analysis of stay cable considering the influence of tower beam [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2023, 44(2): 469—481. (in Chinese)
- [6] GU M, REN S Y. Parametric vibration of stay cables under axial narrow-band stochastic excitation [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2013, 13(8): 1350035.
- [7] 吕建根,王荣辉.索梁结构中抗弯刚度斜拉索的非线性响应[J].动力学与控制学报,2019,17(4):326—334.
LV J G, WANG R H. Nonlinear response of stay cables with flexural rigidity in cable-stayed beams [J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17 (4): 326—334. (in Chinese)
- [8] FU Z Q, JI B H, WANG Q D, et al. Cable force calculation using vibration frequency methods based on cable geometric parameters [J]. Journal of Performance of Constructed Facilities, 2017, 31(4): 04017021.
- [9] 康厚军,郭铁丁,赵跃宇.大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展[J].力学学报,2016,48(3):519—535.
KANG H J, GUO T D, ZHAO Y Y. Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(3): 519—535. (in Chinese)
- [10] 赵跃宇,王涛,康厚军.斜拉索主参数共振的稳定性分析[J].动力学与控制学报,2008,6(2):112—117.
ZHAO Y Y, WANG T, KANG H J. Analysis of the stability of principal parametric resonance of stayed-cable [J]. Journal of Dynamics and Control, 2008, 6(2): 112—117. (in Chinese)
- [11] 刘延柱.悬垂弹性细杆的几何形态[J].力学季刊,2011,32(3):295—299.
LIU Y Z. Geometrical shape of a hanging thin elastic rod [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2011, 32(3): 295—299. (in Chinese)
- [12] 刘延柱.弹性细杆的非线性力学——DNA力学模型的理论基础[M].北京:清华大学出版社,2006.
LIU Y Z. Nonlinear mechanics of thin elastic rod—Theoretical basis of mechanical mode of DNA [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. (in Chinese)
- [13] GOYAL S, PERKINS N C, LEE C L. Nonlinear dynamics and loop formation in Kirchhoff rods with implications to the mechanics of DNA and cables [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 209 (1): 371—389.
- [14] 薛纭,翁德玮,陈立群.精确 Cosserat 弹性杆动力学的分析力学方法[J].物理学报,2013,62(4):320—326.
XUE Y, WENG D W, CHEN L Q. Methods of analytical mechanics for exact Cosserat elastic rod dy-

- namics [J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(4): 320—326. (in Chinese)
- [15] 薛纭, 刘延柱, 陈立群. 超细长弹性杆的分析力学问题[J]. *力学学报*, 2005, 37(4): 485—493.
- XUE Y, LIU Y Z, CHEN L Q. On analytical mechanics for a super-thin elastic rod [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(4): 485—493. (in Chinese)
- [16] 刘延柱. 黏性介质中圆截面弹性细杆的平面振动[J]. *物理学报*, 2005, 54(11): 4989—4993.
- LIU Y Z. Planar vibration of a thin elastic rod with circular cross section in viscous medium [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(11): 4989—4993. (in Chinese)
- [17] 刘延柱. 圆截面弹性细杆的平面振动[J]. *力学与实践*, 2005, 27(03): 32—34.
- LIU Y Z. Planar vibrations of a thin elastic rod with circular cross section [J]. *Mechanics and Engineering*, 2005, 27(3): 32—34. (in Chinese)
- [18] 王鹏, 薛纭, 楼智美. 黏性流体中超细长弹性杆的动力学不稳定性[J]. *物理学报*, 2017, 66(9): 248—255.
- WANG P, XUE Y, LOU Z M. Dynamic instability of super-long elastic rod in viscous fluid [J]. *Acta Physica Sinica*, 2017, 66(9): 248—255. (in Chinese)
- [19] WANG P, FENG H R, LOU Z M. Conformal invariance and conserved quantities for Lagrange equation of thin elastic rod [J]. *Acta Physica Polonica A*, 2017, 131(1): 283—287.
- [20] WANG P, XUE Y. Conformal invariance of Mei symmetry and conserved quantities of Lagrange equation of thin elastic rod [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 83(4): 1815—1822.
- [21] WANG P, XUE Y, LIU Y L. Noether symmetry and conserved quantities of the analytical dynamics of a Cosserat thin elastic rod [J]. *Chinese Physics B*, 2013, 22(10): 104503.
- [22] ZHANG Y, ZHANG S, WANG P. Growth induced buckling of morphoelastic rod in viscous medium [J]. *Chinese Physics B*, 2020, 29(5): 415—421.
- [23] 王鹏, 薛纭. 弹性细杆静力学的薛定谔粒子波动比拟[J]. *北京大学学报(自然科学版)*, 2016, 52(4): 676—680.
- WANG P, XUE Y. Dynamics analogy of thin elastic rod and schrödinger particle wave [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2016, 52(4): 676—680. (in Chinese)
- [24] 张琪昌, 赵彬, 王伟. 非对称截面环状 Kirchhoff 弹性细杆的拓扑构型分析[J]. *天津大学学报(自然科学与工程技术版)*, 2013, 46(12): 1089—1094.
- ZHANG Q C, ZHAO B, WANG W. Topological configuration of kirchhoff thin elastic ring rod with asymmetric cross section [J]. *Journal of Tianjin University(Science and Technology)*, 2013, 46(12): 1089—1094. (in Chinese)
- [25] 王伟, 张琪昌, 靳刚. 非对称截面 Kirchhoff 弹性细杆模型简化方法研究[J]. *物理学报*, 2012, 61(6): 352—357.
- WANG W, ZHANG Q C, JIN G. The analytical reduction of the kirchhoff thin elastic rod model with asymmetric cross section [J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(6): 352—357. (in Chinese)
- [26] FENG J J, ZHAO Y W, KANG J Q, et al. Interference morphology of free-growing tendrils and application of self-locking structures [J/OL]. *Soft Robotics*, 2024 (2024—01—29) [2024—04—16]. <https://www.liebertpub.com/doi/10.1089/soro.2023.0052>.
- [27] 陆登科, 王鹏, 王小月, 等. 基于超细长弹性杆模型的斜拉索静力构形分析[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(7): 68—76.
- LU D K, WANG P, WANG X Y, et al. Static configuration analysis of stay cables based on super-thin elastic rod model [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(7): 68—76. (in Chinese)
- [28] 张丽娜, 李凤臣. 大跨度桥梁斜拉索的参数振动研究[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- ZHANG L N, LI F C. Parametric vibration study on stayed cable of large-span bridges [M]. Beijing: Science Press, 2017. (in Chinese)
- [29] 李国强, 顾明, 孙利民. 拉索振动、动力检测与振动控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- LI G Q, GU M, SUN L M. Theory of cable vibration, dynamic detection and vibration control [M]. Beijing: Science Press, 2014. (in Chinese)
- [30] 杨雄伟, 李明水, 李墩. 悬链线型斜拉索风雨激振模型及特性分析[J]. *中国公路学报*, 2019, 32(10): 237—246.
- YANG X W, LI M S, LI T. Wind-rain-induced vibration model and characteristic analysis of catenary type stay cable [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2019, 32(10): 237—246. (in Chinese)