第 22 卷第 9 期
2024 年 9 月

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 22 No. 9
Sep. 2024

文章编号:1672-6553-2024-22(9)-029-008

DOI:10.6052/1672-6553-2024-022

分数阶时滞反馈下 Rayleigh-Duffing 系统的主共振*

王媛媛[1]　陈聚峰[1†]　张静[2]

(1. 石家庄铁道大学 数理系,石家庄　050043)

(2. 石家庄邮电职业技术学院 基础部,石家庄　050021)

摘要　利用平均法研究了在参数激励和外激励下,具分数阶时滞反馈的 Rayleigh-Duffing 系统的主共振.首先,通过平均法求得系统的近似解析解,并且通过数值方法验证了解析解的准确性.建立了稳态响应的幅频方程,并基于 Lyapunov 稳定性理论得到了稳态解的稳定性条件.最后通过数值仿真并结合幅频曲线分析了系统参数对系统动力学行为的影响.结果表明:参激幅值和外激励幅值造成的多解现象并不相同;时滞对系统幅频曲线的影响具有周期性.

关键词　分数阶导数,　时滞,　平均法,　参数激励,　Rayleigh-Duffing 系统

中图分类号:O175.14　　　　**文献标志码**:A

Primary Resonance of Rayleigh-Duffing Systems under Fractional-Order Delayed Feedback*

Wang Yuanyuan[1]　Chen Jufeng[1†]　Zhang Jing[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang　050043, China)

(2. Department of Basic Teaching, Shijiazhuang Posts and Telecommunications Technical College, Shijiazhuang　050021, China)

Abstract　The primary resonance of Rayleigh-Duffing system with fractional time-delay feedback under parametric excitation and external excitation is studied by the averaging method. Firstly, the approximate analytical solution of the system is obtained by the averaging method, and the accuracy of the analytical solution is verified by numerical method. The amplitude-frequency equation of steady-state response is established, and the stability condition of steady-state solution is obtained based on Lyapunov stability theory. Finally, the influence of system parameters on the dynamic behavior of the system is analyzed by numerical simulation and amplitude-frequency curve. The results show that the multiple solutions due to parametric excitation amplitude and external excitation amplitude are not the same. The effect of time-delay on the amplitude-frequency curve of the system is periodic.

Key words　fractional derivative,　time-delay,　averaging method,　parametric excitation,　Rayleigh-Duffing system

引言

分数阶微积分已经有 300 多年的历史,但是近年来,它在物理、力学、生物学、材料学等各领域备受关注[1-7].近些年来,随着分数阶微积分理论的不断发展[8-12],许多专家学者利用近似解析方法对分

2023-09-08 收到第 1 稿,2023-10-02 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(U1934201,12172233),国家重点实验室自主课题项目(ZZ2021-14),National Natural Science Foundation of China (U1934201,12172233), Independent Project of State Key Laboratory (ZZ2021-14).

† 通信作者 E-mail:jufeng_chen@163.com

数阶系统进行研究,比如,Chen[13]基于平均法研究了分数阶时滞负反馈和强迫激励下 van der Pol 振子的主共振,并发现了分数阶时滞反馈不仅具有速度反馈的性质,还有位移反馈的作用;Shen[14]利用多尺度法研究了分数阶 Duffing 系统的主－亚谐联合共振,分析了分数阶导数项对系统的影响,揭示了分数阶导数项的作用机理;Xing[15]研究了分数阶 Duffing 振子在谐波激励下发生混沌运动的必要条件,基于 Melnikov 方法建立了 Smale 马蹄意义下混沌存在的必要条件,并且发现分数阶导数系数对混沌运动阈值的影响较大.

与整数阶系统相比,分数阶系统能更精确地描述实际的工程问题,而分数阶时滞控制的可调参数更多,能更好地控制和优化振动系统.时滞在实际生活中无处不在,它的存在会使系统的性能下降进而导致系统失稳,而另一方面也可以通过研究时滞来控制系统,减小实际的损耗[16-19].目前,关于分数阶时滞系统的相关研究得到越来越多的关注,例如,Niu[20]利用 KBM 法研究了基于位移反馈的微分控制器,分析了控制器对 Duffing 振子的影响,发现选择合适的参数能够充分利用时滞的优势;Wang[21]研究了具有时滞的分数阶混沌系统的混合投影同步问题,提出了一种用于同步的非线性控制器,并证明了该控制器的有效性和鲁棒性;Kandasamy[22]研究了广义时滞分数阶系统的改进定时稳定性问题,并通过构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 函数,推导出了保证寻址分数阶神经网络定时同步的代数条件;王荣浩等[23]针对一类子系统具有分数阶特性的时变切换系统,提出了一种基于模型依赖平均驻留时间方法的有限时间稳定性条件及异步切换控制策略;Mao 等[24,25]针对不同的非线性时滞系统,提出了不同的有限时间采样数据输出反馈算法,并通过电路实验验证了方法的有效性.

Rayleigh-Duffing 振子作为 Rayleigh 振子和经典的 Duffing 振子耦合而成的振子,具有丰富的动力学特性,比如,Rui[26]利用不连续动力系统理论研究了具有周期外激励的非光滑 Rayleigh-Duffing 系统的开关动力学行为,分析了 Rayleigh-Duffing 系统的切换机理,并研究了系统在切换边界上的共存和多稳定性现象;Zhang[27]基于分岔理论,提出了改进的 Rayleigh-Duffing 振子的四种混合模式振荡,并研究了系统分岔延迟现象的产生原理;Gine[28]刻画了 Rayleigh-Duffing 振子的达布多项式和指数因子,完整地描述了它的达布可积性和 Liouville 可积性.

目前关于分数阶 Rayleigh-Duffing 系统的相关研究较少[29-31].本文将利用平均法对具有分数阶时滞反馈的 Rayleigh-Duffing 系统发生主共振时的动力学行为进行研究.利用平均法得到了系统的近似解析解,基于 Lyapunov 稳定性理论得到了稳态解的稳定性条件,分析讨论了分数阶时滞项等参数对系统幅频曲线的影响.

1 近似解析解

考虑受参数激励和谐波激励下,具有分数阶时滞反馈的 Rayleigh-Duffing 系统,方程如下

$$\begin{aligned}&m\ddot{x}(t)+kx(t)+\beta[\dot{x}^2(t)-1]\dot{x}(t)+\\&\quad\alpha x^3(t)+2B\cos(2\omega t)x(t)\\&=KD^p[x(t-\tau)]+F\cos(\omega t)\end{aligned}\tag{1}$$

上式中,$m,k,\beta,\alpha,B,F,\omega$ 对应着系统的质量、线性刚度系数、阻尼系数、非线性刚度系数、参数激励幅值、外激励幅值和频率,τ 为控制过程中引入的时滞,$K(K<0)$为分数阶反馈增益,$D^p[x(t-\tau)]$为 $D^p[x(t-\tau)]$为关于 τ 的 p 阶导数$(0<p<1)$.这里采用 Caputo 型导数定义

$$D^p[u(t)]=\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t(t-\tau)^{-p}u'(\tau)\mathrm{d}\tau$$

式中,$\Gamma(\cdot)$表示 Gamma 函数.

为使式(1)从形式上满足平均法的条件,对其进行如下坐标代换

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\ 2\varepsilon\mu=\frac{\beta}{m},\varepsilon\alpha_1=\frac{\alpha}{m},\varepsilon k_1=\frac{K}{m},$$

$$\varepsilon B_1=\frac{B}{m},\varepsilon f=\frac{F}{m}$$

则式(1)变为

$$\begin{aligned}&\ddot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=\varepsilon\{k_1D^p[x(t-\tau)]+\\&\quad f\cos(\omega t)-2B_1\cos(2\omega t)x(t)-\alpha_1x^3(t)-\\&\quad 2\mu[\dot{x}^2(t)-1]\dot{x}(t)\}\end{aligned}\tag{2}$$

其中,ε 为小参数,$0<\varepsilon\ll1$,ω_0 为系统的固有频率.

为研究主共振情况,即 $\omega\approx\omega_0$,引入 $\omega^2=\omega_0^2+\varepsilon\sigma$,则式(2)变为

$$\begin{aligned}&\ddot{x}(t)+\omega^2x(t)=\varepsilon\{k_1D^p[x(t-\tau)]+\\&\quad f\cos(\omega t)+\sigma x(t)-2B_1\cos(2\omega t)x(t)-\\&\quad 2\mu[\dot{x}^2(t)-1]\dot{x}(t)-\alpha_1x^3(t)\}\end{aligned}\tag{3}$$

假设式(3)的解为如下形式

$$x(t)=a\cos\varphi$$
$$\dot{x}(t)=-a\omega\sin\varphi$$
$$x(t-\tau)=a\cos(\varphi-\omega\tau)$$

其中,$\varphi=\omega t+\theta$.

再根据

$$\dot{x}(t)=\dot{a}\cos\varphi-a(\omega+\dot{\theta})\sin\varphi$$
$$\ddot{x}(t)=-\dot{a}\omega\sin\varphi-a\omega(\omega+\dot{\theta})\cos\varphi$$

可得

$$\dot{a}=-\frac{1}{\omega}[P_1(a,\theta)+P_2(a,\theta,\tau)]\sin\varphi$$
$$a\dot{\theta}=-\frac{1}{\omega}[P_1(a,\theta)+P_2(a,\theta,\tau)]\cos\varphi \tag{4}$$

其中,

$$P_1(a,\theta)=\varepsilon\{\sigma a\cos\varphi+f\cos(\varphi-\theta)-a^3\alpha_1\cos^3\varphi+2\mu a\omega\sin\varphi(a^2\omega^2\sin^2\varphi-1)-2aB_1\cos\varphi\cos[2(\varphi-\theta)]\}$$
$$P_2(a,\theta,\tau)=\varepsilon k_1D^p[a\cos(\varphi-\omega\tau)]$$

对式(4)在区间[0,T]上进行积分平均,得

$$\dot{a}=-\frac{1}{T\omega}\int_0^T[P_1(a,\theta)+P_2(a,\theta,\tau)]\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$a\dot{\theta}=-\frac{1}{T\omega}\int_0^T[P_1(a,\theta)+P_2(a,\theta,\tau)]\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \tag{5}$$

计算式(5)中的第一部分得

$$\dot{a}_1=-\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}P_1(a,\theta)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\varepsilon\mu a-\frac{3}{4}\varepsilon\mu a^3\omega^2-\frac{\varepsilon aB_1}{2\omega}\sin(2\theta)-\frac{\varepsilon f}{2\omega}\sin\theta \tag{6a}$$

$$a\dot{\theta}_1=-\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}P_1(a,\theta)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=-\frac{\varepsilon\sigma a}{2\omega}+\frac{3\varepsilon}{8\omega}a^3\alpha_1+\frac{\varepsilon aB_1}{2\omega}\cos(2\theta)-\frac{\varepsilon f}{2\omega}\cos\theta \tag{6b}$$

利用分数阶导数公式

$$D^p[\cos(ut)]=u^p\cos(ut+\frac{p\pi}{2})$$
$$D^p[\sin(ut)]=u^p\sin(ut+\frac{p\pi}{2})$$

计算式(5)中的第二部分得

$$\dot{a}_2=-\lim_{T\to\infty}\frac{\varepsilon k_1}{T\omega}\int_0^T D^p[a\cos(\omega t+\theta-\omega\tau)]\sin(\omega t+\theta)\mathrm{d}t=-\frac{\varepsilon ak_1}{\omega}\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[\omega^p\cos(\omega t+\theta-\omega\tau+\frac{p\pi}{2})\sin(\omega t+\theta)]\mathrm{d}t=-\frac{\varepsilon ak_1\omega^{p-1}}{2}\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[\sin(2\omega t+2\theta+\frac{p\pi}{2}-\omega\tau)-\sin(\frac{p\pi}{2}-\omega\tau)]\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon ak_1\omega^{p-1}}{2}\sin(\frac{p\pi}{2}-\omega\tau) \tag{7a}$$

同理可得

$$a\dot{\theta}_2=-\frac{\varepsilon ak_1\omega^{p-1}}{2}\cos(\frac{p\pi}{2}-\omega\tau) \tag{7b}$$

联立式(6)和式(7)得

$$\dot{a}=\varepsilon\mu a-\frac{3}{4}\varepsilon\mu a^3\omega^2-\frac{\varepsilon aB_1}{2\omega}\sin(2\theta)-\frac{\varepsilon f}{2\omega}\sin\theta+\frac{\varepsilon ak_1\omega^{p-1}}{2}\sin(\frac{p\pi}{2}-\omega\tau)$$
$$a\dot{\theta}=-\frac{\varepsilon\sigma a}{2\omega}+\frac{3\varepsilon}{8\omega}a^3\alpha_1+\frac{\varepsilon aB_1}{2\omega}\cos(2\theta)-\frac{\varepsilon f}{2\omega}\cos\theta-\frac{\varepsilon ak_1\omega^{p-1}}{2}\cos(\frac{p\pi}{2}-\omega\tau) \tag{8}$$

代入原系统参数得到系统的近似解析解为

$$\dot{a}=\frac{a}{2m}C_e(p)-\frac{3\beta}{8m}a^3\omega^2+\frac{aB}{2\omega m}\sin(2\theta)-\frac{F}{2m\omega}\sin\theta$$
$$a\dot{\theta}=\frac{a}{2m\omega}K_e(p)-\frac{\omega a}{2}+\frac{3a^3\alpha}{8m\omega}+\frac{aB}{2\omega m}\cos(2\theta)-\frac{F}{2m\omega}\cos\theta \tag{9}$$

其中,

$$C_e(p)=-\beta-K\omega^{p-1}\sin(\frac{p\pi}{2}-\omega\tau)$$
$$K_e(p)=k-K\omega^p\cos(\frac{p\pi}{2}-\omega\tau) \tag{10}$$

2　稳定性分析

令(9)式中的 $\dot{a}=0$,$\dot{\theta}=0$ 可得关于系统稳态解($\bar{a}$,$\bar{\theta}$)的方程组

$$\frac{\bar{a}}{2m}C_e(p)-\frac{3\beta}{8m}\bar{a}^3\omega^2+\frac{\bar{a}B}{2\omega m}\sin(2\bar{\theta})-\frac{F}{2m\omega}\sin\bar{\theta}=0$$
$$\frac{\bar{a}}{2m\omega}K_e(p)-\frac{\omega\bar{a}}{2}+\frac{3\bar{a}^3\alpha}{8m\omega}+\frac{\bar{a}B}{2\omega m}\cos(2\bar{\theta})-\frac{F}{2m\omega}\cos\bar{\theta}=0 \tag{11}$$

消除式(11)中的 $\bar{\theta}$,得系统的幅频响应方程为

$$\frac{\bar{a}K_e(p)}{2m\omega}-\frac{\bar{a}\omega}{2}+\frac{3\alpha\bar{a}^3}{8m\omega}+\frac{H^2-2\bar{a}^2B^2F^2}{4m\omega\bar{a}BF^2}-$$

$$\frac{H}{4m\omega\bar{a}B}=0 \tag{12}$$

其中，

$$H=\bar{a}^2B^2+F^2-\frac{1}{16}[4\bar{a}\omega C_e(p)+3\beta\bar{a}^3\omega^3]^2-\frac{1}{16}[4\bar{a}m\omega^2-4\bar{a}K_e(p)-3\alpha\bar{a}^3]^2$$

下面考虑稳态解的稳定性，令 $a=\bar{a}+\Delta a$，$\theta=\bar{\theta}+\Delta\theta$，将(9)式在($\bar{a}$，$\bar{\theta}$)处进行线性化处理，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Delta a}{\mathrm{d}t}&=\left[-\frac{9\beta}{8m}\bar{a}^2\omega^2+\frac{B\sin(2\bar{\theta})}{2\omega m}-\frac{C_e(p)}{2m}\right]\Delta a+\left(\frac{\bar{a}B\cos(2\bar{\theta})}{\omega m}-\frac{F\cos\bar{\theta}}{2m\omega}\right)\Delta\theta\\ \frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{3\bar{a}\alpha}{4m\omega}+\frac{F\cos\bar{\theta}}{2m\omega\bar{a}^2}\right)\Delta a+\left(\frac{F\sin\bar{\theta}}{2m\omega\bar{a}}-\frac{B\sin(2\bar{\theta})}{\omega m}\right)\Delta\theta\end{aligned} \tag{13}$$

雅可比矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}-\frac{6\beta}{8m}\bar{a}^2\omega^2+\frac{F\sin\bar{\theta}}{2m\omega\bar{a}} & \frac{\bar{a}B\cos(2\bar{\theta})}{\omega m}-\frac{F\cos\bar{\theta}}{2m\omega}\\ \frac{3\bar{a}\alpha}{4m\omega}+\frac{F\cos\bar{\theta}}{2m\omega\bar{a}^2} & -\frac{C_e(p)}{m}-\frac{3\bar{a}^2\omega^2\beta}{4m}-\frac{F\sin\bar{\theta}}{2m\omega\bar{a}}\end{bmatrix} \tag{14}$$

及特征方程

$$\lambda^2-P\lambda+Q=0 \tag{15}$$

其中，$P=\mathrm{tr}\boldsymbol{J}$，$Q=\det\boldsymbol{J}$.

因此，由 Lyapunov 第一方法得，稳态解稳定的充要条件是 $P<0$ 且 $Q>0$.

为验证所求解析解的精确性，利用文献[10]介绍的数值算法对(1)式进行数值仿真，具体迭代格式如下

$$\begin{aligned}x(t_k)&=y(t_{k-1})h-\sum_{i=1}^{k}C_i^1x(t_{k-1})\\ y(t_k)&=\frac{1}{m}\{F\cos(\omega t_k)-\beta[y^2(t_{k-1})-1]y(t_{k-1})-kx(t_k)-\alpha x^3(t_k)-2B\cos(2\omega t_k)x(t_k)-\varepsilon kz(t_{k-1})\}h-\sum_{i=1}^{k}C_i^1y(t_{k-1})\\ z(t_k)&=y(t_k)h^{1-p}-\sum_{i=1}^{k}C_i^{1-p}z(t_{k-1})\end{aligned}$$

其中，$x=x(t)$ 为位移，$y=\dot{x}(t)$ 为速度，$z=D^p[x(t)]$为位移的 p 阶微分项.

选取一组基本系统参数，$m=4$，$k=10$，$\beta=1$，$\alpha=2$，$K_1=-0.1$，$p=0.4$，$\tau=0.3$，$B=0.1$，$F=1$，对每个给定的激励频率 ω，仿真时长为 200s，步长为 0.01s，将计算结果的前 90% 响应值略去，取后 10% 响应的幅值作为稳态幅值 $\bar{x}$，由式(12)和式(13)计算稳态响应的幅频特性，由式(14)和式(15)判断稳定性，所得数值结果如图 1 中小圆圈所示. 其中黑色表示解析解，红色代表数值解，圆圈和实线表示稳定周期解，虚线表示不稳定周期解，可见近似解与数值解吻合较好，这验证了本方法所得结果的正确性和准确性.

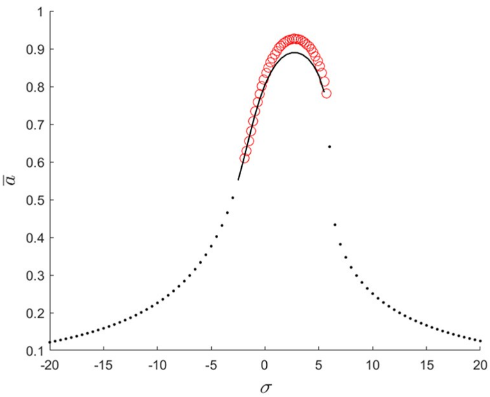


图 1 幅频曲线对比

Fig. 1 Comparison of amplitude-frequency responses

3 系统参数对幅频曲线的影响

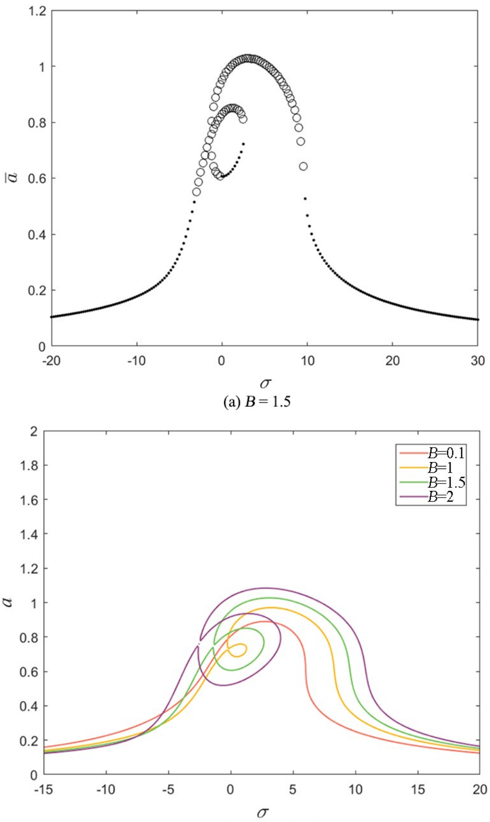
3.1 激励幅值系数的影响

3.1.1 参数激励幅值 B 的影响

选取参数，$m=4$，$k=10$，$\beta=1$，$\alpha=2$，$K_1=-0.1$，$p=0.4$，$\tau=0.3$，$F=1$，考察参激幅值 B 对幅频曲线的影响. 如图 2(a)所示，当 $B=1.5$ 时，在参数激励和外激励的共同作用下，系统幅频曲线出现特有的多解现象. 之后随着时变刚度系数 B 的逐渐增大，系统幅频曲线的拓扑结构发生变化，共振幅值不断变大，共振频率和多解的范围也随之增加.

3.1.2 外激励幅值系数 F 的影响

选取参数，$m=4$，$k=10$，$\beta=1$，$\alpha=2$，$K_1=-0.1$，$p=0.4$，$\tau=0.3$，$B=0.1$，考察外激励幅值 F 对幅频曲线的影响. 如图 3 所示，当 $F=0.1$ 时，幅频曲线出现多解现象，且与时变刚度系数 B 引起的幅频曲线的多解现象并不相同，之后随着幅值 F 的逐渐增大，多解现象消失，系统的拓扑结构发生改变，共振幅值不断增加.

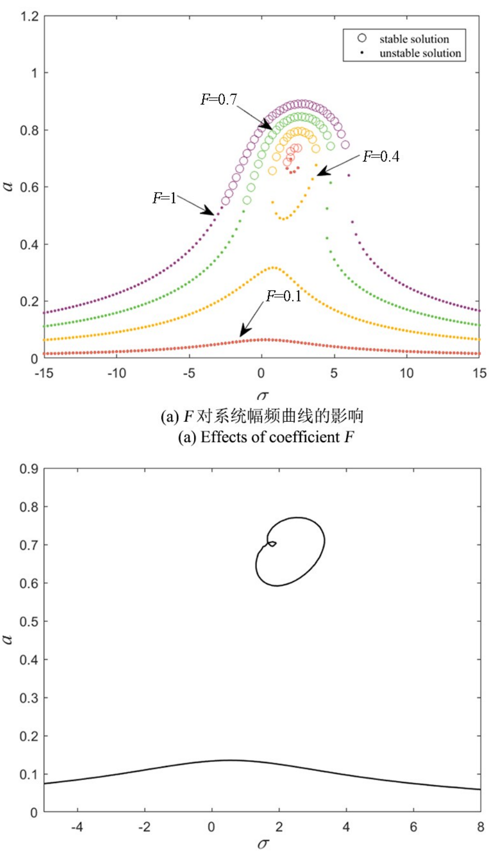


(a) $B=1.5$

(b) B 的不同取值

图 2　参激幅值 B 的影响

Fig. 2　Effects of coefficient B



(a) F 对系统幅频曲线的影响

(a) Effects of coefficient F

(b) $B=0.2$, $F=0.2$

图 3　幅值 B 和 F 的影响

Fig. 3　Effects of coefficient B and F

此外,当其它参数取定不变时,取 $B=0.2$,$F=0.2$ 时,发现在参激幅值 B 充分大以及外激励幅值 F 充分小时,对幅频曲线造成的多解现象同时发生,此时小范围内存在一组参数使得同时存在五个稳态解的现象.

3.2　分数阶项的影响

3.2.1　分数阶阶次 p 的影响

选取参数,$m=4$,$k=10$,$\beta=1$,$\alpha=2$,$K_1=-0.1$,$\tau=0.3$,$B=0.1$,$F=0.4$,考察分数阶阶次对幅频曲线的影响.如图 4 所示,随着分数阶阶次 p 的不断增大,等效阻尼会逐渐减小,从而系统的幅值也会不断降低,而等效刚度会随着 p 的增大而逐渐变大,从而幅频曲线逐渐向高频方向移动.

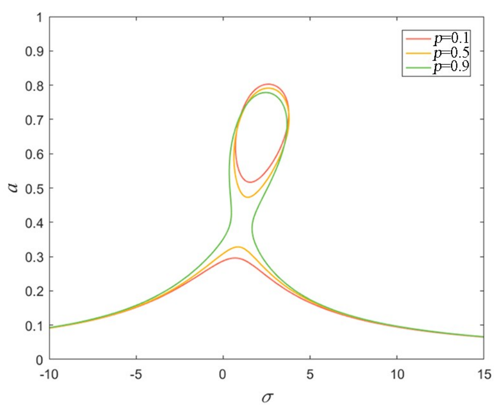


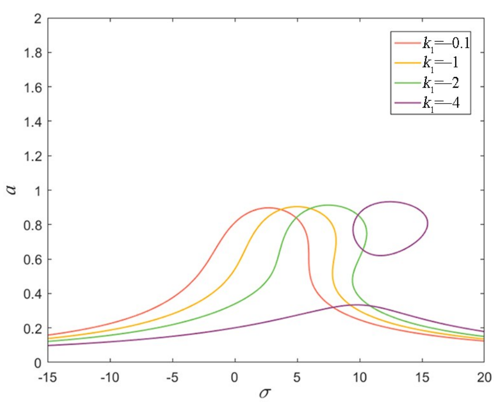
图 4　分数阶阶次 p 的影响

Fig. 4　Effects of fractional order p

3.2.2　分数阶导数项系数 K 的影响

选取参数,$m=4$,$k=10$,$\beta=1$,$\alpha=2$,$\tau=0.3$,$B=0.1$,$F=0.1$,依次选取 p 的值为 $p=0.1$,$p=0.5$,$p=0.9$,分数阶导数项系数 K_1 的值依次选为 $K_1=-0.1$,$K_1=-1$,$K_1=-2$,$K_1=-4$,如图 5 所示.

从图 5 中可以发现,当 $p=0.1$ 时,分数阶导数项等效于非线性刚度,随着分数阶导数项系数的逐



(a) $p=0.1$

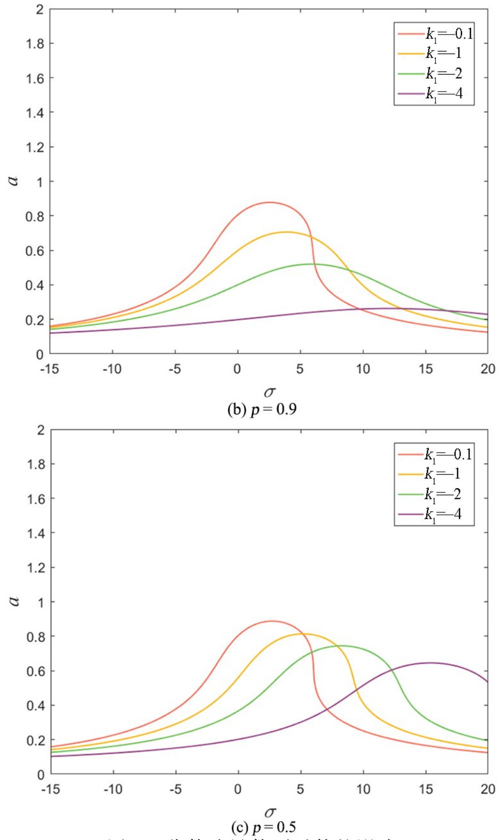


图 5　分数阶导数项系数的影响

Fig. 5　Effects of fractional coefficient

渐增大，多解现象消失，幅频曲线的拓扑结构发生改变，曲线逐渐向左偏移且共振幅值逐渐减小；当 $p=0.9$ 时，分数阶项等效于线性阻尼，当 K_1 逐渐增大时，幅频曲线并未出现多解现象，且共振振幅逐渐增加，共振频率范围逐渐缩小；当 $p=0.5$ 时，分数阶项同时具有阻尼性质和刚度性质，随着分数阶导数项系数的增大，幅频曲线逐渐向左偏移，共振振幅逐渐增加，相比 $p=0.9$ 时，整体趋势变化较小.

3.3　时滞的影响

选取参数，$m=4, k=10, \beta=1, \alpha=2, K_1=-0.1, p=0.4, B=0.1, F=0.1$，考察时滞对幅频曲线的影响. 观察图 6(a)可知，当时滞 τ 从 0.5 增大时，共振幅值也随之逐渐增大，频带逐渐缩小，曲线逐渐向左偏移；从图 6(b)可知，从时滞 τ 继续增大时，共振幅值逐渐减小，多解现象消失，幅频曲线的拓扑结构发生改变；从图 6(c)可知，当时滞 τ 在之前基础上继续增大时，共振幅值逐渐增大，曲线向右偏移，多解现象再次出现；观察图 6(d)可知，此时随着时滞的增大，幅频曲线的变化与图 6(a)类似.

如图 7 所示，时滞 τ 取值的变化对幅频曲线的影响呈现周期性的状态，这是因为式中所求得的等效阻尼和等效刚度中含有正弦和余弦函数，其中

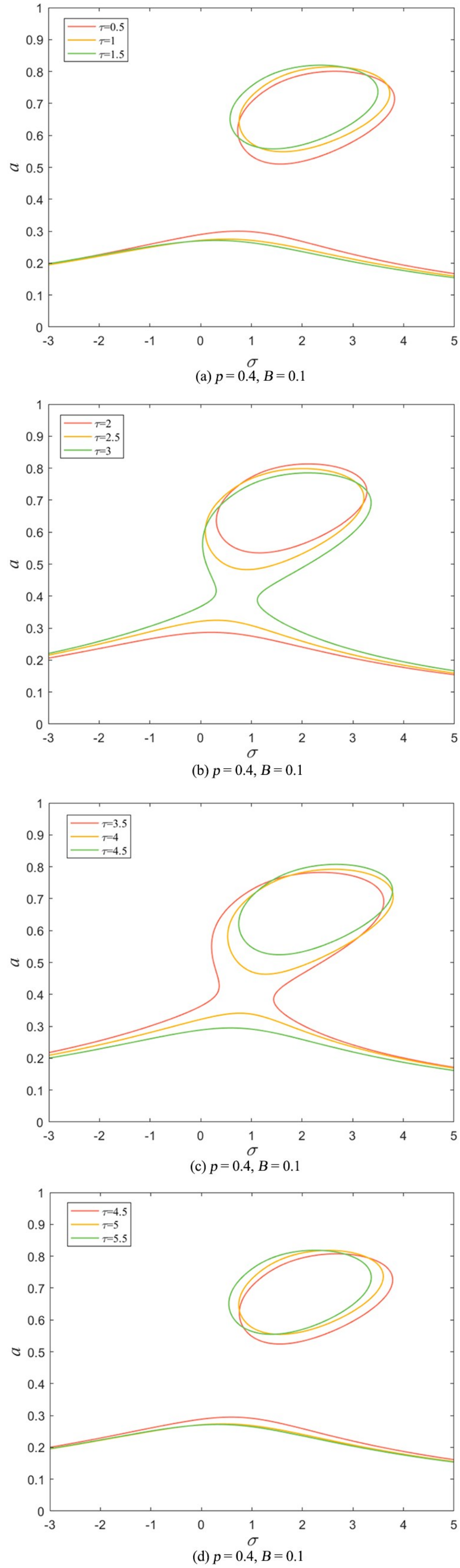


图 6　时滞 τ 的影响

Fig. 6　Effects of time-delay τ

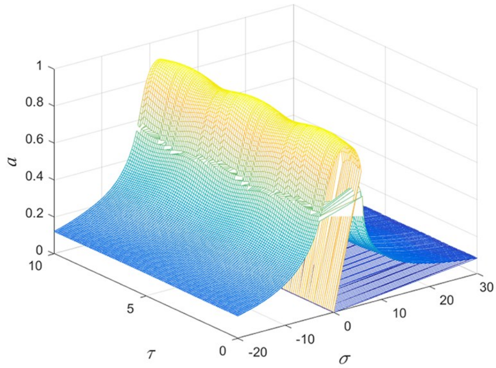


图 7　时滞 τ，频差 σ 与幅值 a 间的关系图

Fig. 7　The relationship between delay τ, frequency difference σ and amplitude a

$T\approx 2\pi/\omega_0\approx 3.9739$，所以在图 6(a)与图 6(d)中，虽然时滞取值范围不同，但对幅频曲线的影响变化大致相同.

4　结论

本文利用平均法研究了在参数激励和谐波激励下，具有分数阶时滞反馈的 Rayleigh-Duffing 系统的主共振. 首先得到了系统主共振时的一次近似解析解，并利用 Lyapunov 第一方法得到了稳态解的稳定性条件，并数值仿真分析，发现求得的解析解和数值解吻合较好，验证了解析解的准确性，最后通过数值仿真考察了系统参数对幅频响应曲线的影响. 结果发现，时变刚度系数和外激励幅值对共振幅值、频率及频带有着重要影响，两者均会造成多解现象的出现，且造成的多解现象并不相同，此外，在分数阶阶次取值不同时，分数阶项有着不同的阻尼和刚度性质，在一定程度上也会影响系统的拓扑结构，而时滞参数对幅频曲线的影响具有周期性性质，这在工程上对于系统参数的取值有很大的参考价值. 在之后的研究中，将考虑在所受激励为随机激励的情况下，分数阶系统所表现的复杂动力学行为.

参考文献

[1]　MAGIN R L. Fractional calculus in bioengineering [M]. Redding, California: Begell House, 2006.

[2]　HILFER R. Applications of fractional calculus in physics [M]. Singapore: World Scientific, 2000.

[3]　CAPONETTO R. Fractional order systems: Modeling and control applications [M]. Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2010.

[4]　YANG X J, GAO F, YANG J. General fractional derivatives with applications in viscoelasticity [M]. Salt Lake City, Utah: Academic Press, 2020.

[5]　IAFFALDANO G, CAPUTO M, MARTINO S. Experimental and theoretical memory diffusion of water in sand [J]. Hydrology and Earth System Sciences, 2006, 10(1): 93－100.

[6]　薛定宇. 分数阶微积分学与分数阶控制[M]. 北京：科学出版社，2018.
XUE D Y. Fractional calculus and fractional-order control [M]. Beijing: Science Press, 2018. (in Chinese)

[7]　李永歌，张潇，许勇. 航空发动机分数阶 PID 控制器的参数自整定方法[J]. 动力学与控制学报，2023，21(7)：77－88.
LI Y G, ZHANG X, XU Y. Parameter self-tuning method of fractional order pid controller for the aero engine [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(7): 77－88. (in Chinese)

[8]　PODLUBNY I. Fractional differential equations [M]. New York: Academic Press, 1999.

[9]　CH L. Discretized fractional calculus [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1986, 17(3): 704－719.

[10]　PETRÁŠI. Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011.

[11]　OLDHAM K B, SPANIER J. The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order [M]. Amsterdam: Elsevier, 1974.

[12]　ROSSIKHIN Y A, SHITIKOVA M V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results [J]. Applied Mechanics Reviews, 2010, 63(1): 010801.

[13]　CHEN J F, LI X H, TANG J H, et al. Primary resonance of van der pol oscillator under fractional-order delayed feedback and forced excitation [J]. Shock and Vibration, 2017, 2017: 5975329.

[14]　SHEN Y J, LI H, YANG S P, et al. Primary and subharmonic simultaneous resonance of fractional-order Duffing oscillator [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 102(3): 1485－1497.

[15]　XING W C, CHEN E L, CHANG Y J, et al. Threshold for chaos of a duffing oscillator with fractional-order derivative [J]. Shock and Vibration, 2019, 2019: 1230194.

[16] 孙中奎，金晨. 时滞系统非线性动力学研究进展[J]. 动力学与控制学报，2023，21(8)：6－18.
SUN Z K，JIN C. Advances in nonlinear dynamics for delayed systems [J]. Journal of Dynamics and Control，2023，21(8)：6－18.(in Chinese)

[17] SUN J Q，DING Q. Advances in analysis and control of time-delayed dynamical systems [M]. Beijing：Higher Education，2013：41－54.

[18] 廖晓峰，李传东，郭松涛. 时滞动力学系统的分岔与混沌[M]. 北京：科学出版社，2015.

[19] 唐艺玮，彭剑，符翔，等. 多输入时滞反馈控制下的斜拉梁主共振响应[J]. 动力学与控制学报，2020，18(5)：92－96.
TANG Y W，PENG J，FU X，et al. Primary resonance response of cable-stayed beam under multi-input time-delayed feedback control [J]. Journal of Dynamics and Control，2020，18(5)：92－96. (in Chinese)

[20] NIU J C，SHEN Y J，YANG S P，et al. Analysis of Duffing oscillator with time-delayed fractional-order PID controller [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics，2017，92：66－75.

[21] WANG S，YU Y G，WEN G G. Hybrid projective synchronization of time-delayed fractional order chaotic systems [J]. Nonlinear Analysis：Hybrid Systems，2014，11：129－138.

[22] KANDASAMY U，RIHAN F A，RAJAN R，et al. New fixed-time stability theorems for delayed fractional-order systems and applications [J]. IEEE Access，2022，10：63230－63244.

[23] 王荣浩，吴银平，秦霞. 分数阶时变切换系统有限时间异步控制[J]. 动力学与控制学报，2023，21(3)：44－52.
WANG R H，WU Y P，QIN X. Finite time asynchronous control of fractional order time-varying switched systems [J]. Journal of Dynamics and Control，2023，21(3)：44－52. (in Chinese)

[24] MAO J，ZOU W C，HE W M，et al. Practical finite-time sampled-data output feedback stabilization for a class of upper-triangular nonlinear systems with input delay [J]. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics：Systems，2023，53(6)：3428－3439.

[25] MAO J，ZOU W C，GUO J，et al. Observer-based finite-time sampled-data control for a class of nonlinear time-delay systems [J]. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics：Systems，2024，54(3)：1645－1657.

[26] RUI Z，MIN F H，DOU Y P，et al. Switching mechanism and hardware experiment of a nonsmooth Rayleigh-Duffing system [J]. Chinese Journal of Physics，2023，82：134－148.

[27] ZHANG C，MA X D，BI Q S. Complex mixed-mode oscillations based on a modified Rayleigh-Duffing oscillator driven by low-frequency excitations [J]. Chaos，Solitons & Fractals，2022，160：112184.

[28] GINÉ J，VALLS C. Liouvillian integrability of a general Rayleigh-Duffing oscillator [J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics，2019，26(2)：169－187.

[29] ZHANG Y L，LUO M K. Fractional Rayleigh-Duffing-like system and its synchronization [J]. Nonlinear Dynamics，2012，70(2)：1173－1183.

[30] ZHANG Y L，LI C Q. Fractional modified Duffing-Rayleigh system and its synchronization [J]. Nonlinear Dynamics，2017，88(4)：3023－3041.

[31] CHEN L C，LIANG X，ZHU W Q，et al. Stochastic averaging technique for SDOF strongly nonlinear systems with delayed feedback fractional-order PD controller [J]. Science China Technological Sciences，2019，62(2)：287－297.