第 22 卷第 9 期
2024 年 9 月

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 22 No. 9
Sep. 2024

文章编号:1672-6553-2024-22(9)-001-015

DOI:10.6052/1672-6553-2024-043

# 高维非线性动力系统降维理论综述*

桑瑞涓[1] 龚坚[2] 路宽[1†] 靳玉林[3] 张康宇[1] 王衡[1]

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院,西安 710000)

(2. 中国人民解放军 91911 部队,三亚 572000)

(3. 西南交通大学 机械工程学院,成都 611756)

**摘要** 工程领域中的结构和机构具有高维、非线性及强耦合等特性,导致其动态行为十分复杂.在相关研究领域中,降维方法对高维复杂非线性的动力学系统研究具有重要意义.它可以降低数据的复杂性,克服动力学系统的维数灾难,提高计算效率;也可以将高维数据的特征进行压缩和重构,提取出其核心特征,更好地揭示数据的内在规律和本质特征;还可以帮助简化模型,降低模型的复杂性,提高模型的稳定性和可解释性.近年来,降维方法体系逐渐发展完善,很多学者利用降维方法实现了高维复杂系统理论研究.基于此,针对非线性高维系统的降维理论进行了综述.重点介绍了基于中心流形理论的降维方法,Lyapunov-Schmidt 方法,本征正交分解方法(Proper Orthogonal Decomposition)和非线性 Galerkin 方法等降维方法的基本思想、应用现状及各自的优缺点.此外,还简要介绍了实际问题中其他降维方法的应用.最后,针对现有降维方法存在的问题,提出了可能的改进方案和未来研究方向的展望.

**关键词** 动力学系统, 降维方法, 中心流形, L-S 方法, POD 方法, Galerkin 方法

**中图分类号**:O322 **文献标志码**:A

# Dimension Reduction Theory Review of High-dimensional Nonlinear Dynamical Systems*

Sang Ruijuan[1] Gong Jian[2] Lu Kuan[1†] Jin Yulin[3] Zhang Kangyu[1] Wang Heng[1]

(1. School of Mechanics and Civil Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710000, China)

(2. Chinese People's Liberation Army 91911 Unit, Sanya 572000, China)

(3. School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

**Abstract** Structures and mechanisms in the engineering field possess characteristics such as high dimensions, nonlinearity, and strong coupling, leading to complex dynamic behaviors. In the related research field, the dimensionality reduction method is of great significance for the study of high-dimensional complex nonlinear dynamical systems. These methods can reduce the complexity of data, overcome the "curse of dimensionality" in dynamical systems, and improve computational efficiency. They can also compress and reconstruct the characteristics of high-dimensional data, extracting core characteristics to better reveal its inherent laws and features. Furthermore, they can simplify models, reduce model complexity, and improve model stability and interpretability. In recent years, the dimension reduction method system has gradually developed and improved, and many scholars have utilized them to achieve theo-

2024-02-29 收到第 1 稿,2024-05-16 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(U2241243,12072263),KGJ 国防技术基础国家重点资助项目(JSZL2022213A001),中央高校基本科研业务费(HYGJZN20232),National Natural Science Foudation of China (U2241243,12072263), KGJ national defense technology foundation (JSZL2022213A001), Fundamental Research Funds for the Central Universities(HYGJZN20232).

† 通信作者 E-mail:lukuan@nwpu.edu.cn

retical research on high-dimensional complex systems. Based on this, this paper summarizes the dimension reduction theory for nonlinear high-dimensional systems. It focuses on introducing the basic ideas, application status, and advantages and disadvantages of dimension reduction methods such as Central Manifold Theorem dimension reduction method, Lyapunov-Schmidt method, Proper Orthogonal Decomposition method (POD), and nonlinear Galerkin method. Additionally, it briefly introduces the application of other dimension reduction methods in practical problems. Finally, aiming at the problems existing in current dimension reduction methods, it proposes possible improvement plans and prospects for future research directions.

**Key words** dynamical systems, dimension reduction method, central manifold, Lyapunov-Schmidt method, Proper Orthogonal Decomposition, Galerkin method

## 引言

实际工程中的结构和机构,如航空航天飞行器、水下航行器、土木建筑结构、桥梁结构、微电子机械结构、高精度机床等动力系统往往具有高维、非线性[1]及强耦合等特性.这些特性的产生主要源于以下几个方面:首先,这些系统和结构通常由多个部件和组件组成,每个部件都有其自身的结构和功能性要求,各部分具有不同的物理属性,从而整个系统状态空间维度是大规模的,其动态行为表现出十分复杂的特性.例如,即便一个简单的机械臂[2]可能有多个关节,每个关节都有其自由度,从而使得整个机械臂的运动状态是高维的.其次,实际结构和系统的动态行为往往是非线性的,这时非线性因素,如材料属性[3]、几何形状[4]、摩擦和碰撞[5,6]等在系统中起着重要作用,决定系统的动态特性.最后,系统和结构中的各个部件之间通常存在强烈的耦合作用,这种耦合作用使得系统的动态行为不仅取决于单个部件的状态,还取决于各个部件之间的相互作用.例如,飞行器机翼[7]的振动可能会影响尾翼的运动,桥梁的位移[8]可能会影响其结构内力的分布.

这些因素共同作用,使得实际工程中的结构和机构具有高维、非线性和强耦合等复杂动力学特性,需要深入的理论分析和实验研究以确保其稳定性和可靠性.然而,直接采用数值方法研究高维系统的非线性动力学行为存在着数值解收敛难、算法稳定性差、计算机时长等困难[9].与此同时,现有的非线性理论[10]往往只适用于低维系统,采用解析方法研究系统的稳定性、分岔与混沌则更为困难.所以寻求适当的降维方法,用低维流形表征大型复杂的动力学系统,利用现代非线性动力学的理论方法探究降维后系统的动力学行为[11],就显得至关重要.针对复杂结构或机构系统,基于模态综合法[12]的线性系统降维方法,于20世纪80年代就已发展成熟,并在工程上获得了广泛的应用.它的基本思想是基于模态分解来降维,通过对线性系统的模态进行分解和综合截断,将复杂结构系统投影到一个低维模态空间中.然而对于存在非线性因素的复杂结构来说,模态综合法的降维效果非常有限.

在解决实际工程问题中,常用于研究非线性动力系统的降维方法有:中心流形法,Lyapunov-Schmidt方法,本征正交分解方法(Proper Orthogonal Decomposition, POD)和非线性Galerkin方法等,本文将分别介绍上述方法的降维基本原理,研究应用现状及各自的优点和局限性.

## 1 基于中心流形理论的降维方法

中心流形理论广泛应用于高维非线性动力系统的复杂动态行为研究,该方法可以有效降低动力系统的维数.高维非线性状态空间内部分为稳定流形和不稳定流形,当系统状态对应于相平面上的点随时间改变的移动轨迹(相轨迹)在稳定流形上运动时,系统不发生突变现象.相反,当相轨迹在不稳定流形上运动时,系统发生分岔现象.因此,可以用相轨迹在不稳定流形上的变化来代表整个高维系统的本质变化,中心流形理论正是基于这一原理进行降维.

中心流形定理[13]主要关注自治系统(时不变系统)在平衡点附近的动态行为.通过在平衡点处对高维系统线性化处理,利用雅可比矩阵的特征值判断系统的局部动态特性.如果系统函数 $f(x)$ 是

$r$ 阶连续可导，则在任意平衡点处，存在唯一的 $r$ 阶连续可导的稳定流形、唯一的 $r$ 阶连续可导的不稳定流形，以及存在（不一定唯一）$r-1$ 阶连续可导的中心流形.

考虑自治系统

$$\dot{x}=f(x) \tag{1}$$

其中 $f:\boldsymbol{D}\rightarrow\boldsymbol{R}^n$ 是连续可微的，且 $\boldsymbol{D}\in\boldsymbol{R}^n$ 是包含原点 $x=0$ 的定义域. 假设原点是上述方程的平衡点. 将函数 $f$ 在原点线性化，可得

$$\boldsymbol{A}=\frac{\partial f}{\partial x}(x)\bigg|_{x=0} \tag{2}$$

(1) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有特征值都具有负实部，则原点是渐近稳定的；

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有实部为正的特征值，则原点是不稳定的；

(3) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一部分特征值为 0，其余特征值具有负实部，则不能应用线性化来确定原点的稳定性，此时为了确定原点的稳定性，需要分析 $n$ 阶非线性系统.

$\boldsymbol{R}^n$ 上的 $k$ 维流形（$1\leqslant k\leqslant n$）有严格的定义，为此可以完全认为 $k$ 维流形是方程 $\eta(x)=0$ 的解，其中 $\eta:\boldsymbol{R}^n\rightarrow\boldsymbol{R}^{(n-k)}$ 足够光滑（即充分多次连续可微）.

例如，单位圆

$$\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,x_1^2+x_2^2=1\} \tag{3}$$

是在 $\boldsymbol{R}^2$ 上的一维流形. 单位球

$$\left\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\sum\nolimits_{i=1}^{n}x_i^2=1\right\} \tag{4}$$

如果 $\forall\, t\in[0,t_1]\in\boldsymbol{R}$

$$\eta[x(0)]\Rightarrow\eta[x(t)]=0 \tag{5}$$

则称流形 $\eta(x)=0$ 是方程的不变流形.

假设 $f(x)$ 是二次连续可微的，那么方程(1)可以表示为

$$\dot{x}=\boldsymbol{A}x+[f(x)-f'(0)x]=\boldsymbol{A}x+\tilde{f}(x) \tag{6}$$

$$\tilde{f}(x)=f(x)-f'(0)x \tag{7}$$

$\tilde{f}(x)$ 是二次可微的，且

$$\tilde{f}(0)=0,\quad \tilde{f}'(0)=0 \tag{8}$$

我们只对不能线性化的部分感兴趣，假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $k$ 个实部为 0 的特征值，$m=n-k$ 个特征值为负. 我们总可以找到一个相似变换矩阵 $\boldsymbol{T}$（Jordan 矩阵），将 $\boldsymbol{A}$ 转化为分块对角矩阵

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix} \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{A}_1$ 所有特征值的实部为 0，$\boldsymbol{A}_2$ 所有特征值的实部为负. 显然 $\boldsymbol{A}_1$ 是 $k\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{A}_2$ 是 $m\times m$ 矩阵. 应用变量代换可得

$$\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}=T^{-1}x \tag{10}$$

方程(1)可转换为

$$\begin{cases}\dot{y}=\boldsymbol{A}_1+g_1(y,z)\\ \dot{z}=\boldsymbol{A}_2+g_2(y,z)\end{cases} \tag{11}$$

$$g_i(0,0)=0,\frac{\partial g_i}{\partial y}(0,0)=0,\frac{\partial g_i}{\partial z}(0,0)=0 \tag{12}$$

$z=h$ 是方程(11)的不变流形，且 $h$ 是光滑的，则如果

$$h=0,\frac{\partial h}{\partial y}(0)=0 \tag{13}$$

则称 $z$ 为中心流形.

如果 $g_1$，$g_2$ 是二次连续可微的，且满足方程(12)，$\boldsymbol{A}_1$ 所有特征值的实部为 0，$\boldsymbol{A}_2$ 所有特征值的实部为负. 则存在一个常数 $\delta>0$ 和对于所有 $\|y\|<\delta$ 有定义的连续可微函数 $h(y)$，使得 $z=h(y)$ 是方程(11)的中心流形.

降 $k$ 阶系统微分方程为

$$\dot{y}=\boldsymbol{A}_1y+g_1[y,h(y)] \tag{14}$$

若降阶方程(14)表示的系统在原点 $y=0$ 是稳定的，且存在一个连续可微的 Lyapunov 函数 $V(y)$.

在 $y=0$ 的某个领域内满足

$$\dot{V}(t)=\frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}=\frac{\partial V}{\partial y}\{\boldsymbol{A}_1y+g_1[y,h(y)]\}\leqslant 0 \tag{15}$$

则整个方程(11)表示的系统是稳定的.

若降阶系统方程(14)在原点 $y=0$ 是渐近稳定（或非稳定）的，则整个方程(11)表示的系统也是渐近稳定（或非稳定）的.

为求解中心流形，通常将中心流形方程级数展开，得出

$$\boldsymbol{N}[h(y)]\triangleq\frac{\partial h}{\partial y}(y)\cdot\dot{y}-\boldsymbol{A}_2h(y)-g_2(y,z)=0 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{N}[h(y)]\triangleq\frac{\partial h}{\partial y}(y)\cdot\{\boldsymbol{A}_1y+g_1[y,h(y)]\}-\boldsymbol{A}_2\cdot h(y)-g_2[y,h(y)]=0 \tag{17}$$

边界条件：

$$h=0,\frac{\partial h}{\partial y}(0)=0 \tag{18}$$

将 $h'(y)$ 泰勒级数展开可得

$$h(y)=h_2y^2+h_3y^3+\cdots \tag{19}$$

将边界条件代入中心流形方程，通过比较 $y$ 的相同次幂系数，可以求解出未知系数 $h_2,h_3,\cdots$

依次从 $h(y)=o(y^2)$，$h(y)=h_2y^2+o(y^3)$，$h(y)=h_2y^2+h_3y^3+o(y^4)$ 代入降维系统. 降维系统形式为

$$\dot{y}=ay^P+o(y^{P+1}) \tag{20}$$

直到能够判断出方程(14)表示的降维系统稳定性为止.

有限维的中心流形定理的应用研究工作可追溯到 Kelley 等[14]学者，其它相关工作可参考于 Guckenheimer 和 Holmes[15]、Hassard[16]、Carr 等[17]. 近年来，在动力学系统的振动控制领域，中心流形理论应用广泛. 张军柯[18]在研究动力系统的局部分岔的过程中运用中心流形理论简化动力系统，对进一步研究板壳磁弹性体非线性振动具有重要的理论意义. 王艺等[19]利用中心流形理论的思想推导稳定参数使航天器进入姿态稳定最后通过数值仿真证明了控制方法的有效性. 李晓晨[20]应用中心流形理论计算平板颤振四阶动力系统的中心流形，进一步将其简化为二维系统，结合平板颤振问题具体分析，探究其振动特性. 刘海英[21]将中心流形理论用于高维系统降维和计算覆冰导线舞动非线性动力学模型的中心流形中，为工程实际中导线防舞、减轻以及防舞器的设计提供了理论依据. 陈杰等[22]应用中心流形法对液体火箭 POGO 振动进行计算，通过中心流形理论对系统降维，为分岔方程建立，系统 Hopf 分岔点求解及抑制液体火箭 POGO 振动的发生提供了相关求解方法理论基础. 在二元机翼非线性颤振分析问题中，何东平等[23]对二自由度非线性机翼系统的极限环颤振和混沌运动进行研究，利用中心流形理论将四维一阶常微分方程转化为二维一阶常微分方程，为进一步分叉点及稳定性讨论奠定基础. 郑国勇[24]在研究不可压缩流作用下两个自由度的机翼颤振的分支问题中，应用中心流形理论将四维系统降为二维系统，进一步简化求解. 在非线性动力学系统的分岔与混沌行为研究中，刘富豪等[25]应用中心流形理论和分岔理论，研究系统余维二分岔，并对系统的混沌运动规律进行分析. 范丽等[26]根据中心流形、规范型理论和泛函微分方程 Hopf 分支定理，利用解析方法讨论了该类时滞系统的稳定性和分支问题. 黄岚[27]针对不同类型的三维连续时间动力系统，应用中心流形定理降低系统维数，探讨了平衡点分枝附近产生的周期簇发行为.

中心流形理论作为一种降维方法，它具有很多优点. 首先，中心流形法为分析非线性系统的局部动态行为提供了有效的工具. 在平衡点附近，非线性系统可以简化为线性系统，此时我们可以运用线性系统的理论来解释系统行为. 其次，中心流形法为预测系统的长期行为提供了有力的依据. 由于稳定流形和不稳定流形的存在，我们可以预测系统在长期内会趋向于哪个状态. 最后，中心流形法为理解非线性系统的分岔行为提供了有用的方法. 系统经历分岔时，其动态行为会发生变化，我们可以通过分析中心流形来理解这种行为的变化.

中心流形理论也具有一些局限性. 首先，中心流形法在处理高维非线性系统时，需要解决复杂的微分方程组，这使得计算变得非常复杂. 其次，中心流形法在处理具有多个平衡点系统时可能会遇到困难. 每个平衡点都有不同的中心流形，这使得分析变得非常复杂. 最后，中心流形法只提供了在平衡点附近的局部分析，无法预测系统在远离平衡点的行为.

## 2 Lyapunov-Schmidt 方法(L-S 方法)

Lyapunov-Schmidt 约化方法[28](L-S 方法)是将高维或无限维非线性方程化为低维方程的降维方法. 它降维的基本思想是把空间表示为两个互补的子空间之子和，并将方程投影到这两个子空间上，这样就能得到两个较低维的方程. 如果其中一个方程有唯一解，则原方程的求解问题就等价于另一个低维方程的求解问题. 这个过程是通过构造一个投影算子实现的，该算子将高维系统的解映射到低维系统的解上. 利用这个投影算子，将高维系统的微分方程转化为低维系统的微分方程. 这样就可以利用低维系统的微分方程来研究高维系统的动态行为. L-S 降维法的关键在于构造一个合适的投影算子，该算子要求能够保留低维系统中的主要动态特征，同时忽略高维系统中的次要动态特征，从而使问题得到简化.

例如,在研究静态分岔时,记 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 分别为 $f(x,\mu)$ 在$(x_0,\mu_0)$处的雅可比矩阵对应零特征值的子空间及其补空间. 利用 L-S 方法可以证明,静态方程 $f(x,\mu)=0$ 与其在子空间 $\boldsymbol{N}$ 上的投影方程问题是等价的,即利用低维约化方程可以得知原系统的平衡点的数目和稳定性,从而实现静态分岔问题的降维处理.

考虑由 $\boldsymbol{C}^r$(其中 $r\geqslant 1$)映射 $\boldsymbol{F}:\boldsymbol{X}\times\mathbb{R}^n\rightarrow\boldsymbol{Y}$ 给出方程

$$\boldsymbol{F}(u,\mu)=0,u\in\boldsymbol{X},\mu\in\mathbb{R}\tag{21}$$

其中,$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 是巴拿赫空间(或是有限维欧氏空间),$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m)$是参数.

设 $\boldsymbol{F}(0,0)=0$,导算子 $\boldsymbol{F}_u(0,0):\boldsymbol{X}\rightarrow\boldsymbol{Y}$ 是零指标的 Fredholm 算子[记 $\boldsymbol{F}_u(0,0)=L$]. 有空间直和分解

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{N}(L)\oplus\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}_0\oplus\boldsymbol{R}(L)\tag{22}$$

其中,$\boldsymbol{N}(L)$为 $L$ 的零空间,$\boldsymbol{R}(L)$为 $L$ 的值域.

定义投影算子 $\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Y}\rightarrow\boldsymbol{R}(L)$和补投影算子 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Y}\rightarrow\boldsymbol{Y}_0$,其中 $\boldsymbol{I}$ 为恒等算子,因此方程(21)等价方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{PF}(u,\mu)=0\\(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{F}(u,\mu)=0\end{cases}\tag{23}$$

根据直和分解,对 $\forall u\in\boldsymbol{X}$,有

$$u=v+w\tag{24}$$

其中,$v\in\boldsymbol{N}(L)$,$w\in\boldsymbol{X}_0$,因此,方程(23)的第一个式子可写成

$$\boldsymbol{\Phi}(v,w,\mu)\equiv\boldsymbol{PF}(v+w,\mu)=0\tag{25}$$

其中映射 $\boldsymbol{\Phi}:\boldsymbol{N}(L)\times\boldsymbol{X}_0\times\mathbb{R}^n\rightarrow\boldsymbol{R}(L)$,由 $\boldsymbol{F}(0,0)=0$,可得 $\boldsymbol{\Phi}(0,0,0)=0$. 考虑到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_w\boldsymbol{\Phi}(0,0,0)&=\boldsymbol{PD}_w\boldsymbol{F}(v+w,\mu)\mid_{(0,0,0)}\\&=\boldsymbol{PF}(0,0)=\boldsymbol{F}_u(0,0)=L\end{aligned}\tag{26}$$

且当 $L$ 限制在 $\boldsymbol{X}_0$ 上时,它是可逆的,从而导数 $\boldsymbol{D}_w\boldsymbol{\Phi}(0,0,0)$可逆,由隐函数定理可知,方程(25)在$(v,w,\mu)=(0,0,0)$的某个领域内存在唯一解 $w=w(v,\mu)$,并有 $w(0,0)=0$,将这个解代入方程(23)的第二式中,可得到分岔方程

$$\boldsymbol{\Psi}(v,\mu)\equiv(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{F}[v+w(v,\mu),\mu]=0\tag{27}$$

其中映射 $\boldsymbol{\Phi}:\boldsymbol{N}(L)\times\boldsymbol{X}_0\times\mathbb{R}^n\rightarrow\boldsymbol{R}(L)$,由于在$(v,\mu)=(0,0)$附近,方程(21)和方程(27)的解有一一对应的关系:

$$u=v+w(v,\mu)\tag{28}$$

所以这两个求解问题等价,方程(27)称为方程(21)的分岔方程(或约化方程),方程(27)的维数比方程(21)的维数低,这样就用 L-S 约化方法完成了降维.

作为一种局部降维方法,L-S 方法在分岔理论分析中获得了广泛应用. 陈予恕与 Langford 在 1984 年,将 L-S 约化和奇异性理论相结合,共同提出国际上命名的 Chen-Langford(C-L)方法[29],用于求解非线性动力学系统周期分岔解. 陈晓等[30]利用分岔理论和泛函知识,对有限维的该分岔方程进行了 L-S 约化,获得了三种典型的分岔图形式,同时指出当非齐次项等于零时必然发生分岔. 时培明等[31]利用 L-S 约化方法,通过对高维非线性动力系统降维处理,得到揭示系统非线性动力特性与系统参数的低维等价分岔方程. Zhang 和 Guo[32]利用 L-S 约化方法将超前时滞微分方程约化为具有一定对称性和遗传哈密顿结构的有限维分岔方程. 王培光等[33]利用 L-S 约化方法和奇异性理论,研究了一类中立型神经网络模型的动力学行为. 谭军[34]对中立型微分方程进行 Hopf 分岔分析,利用 L-S 约化方法将高维非线性方程化为低维的分岔方程,对原方程的求解问题进行简化并得到其分岔周期解的近似解析表达式. 在数学方程求解领域,王非之[35]利用 L-S 约化方法和山路引理证明了 $\mathbb{R}^N$ 中一类不定线性项的椭圆方程非平凡解的存在性. 曾纯一[36]研究了边界平衡点附近空间非齐次稳态解的性质,利用 L-S 约化方法和隐函数定理,得到了空间非齐次稳态解的存在性和多重性. 徐珊珊[37]利用指数二分性和 L-S 约化方法推导出了分支函数,为讨论异宿轨道的分支提供理论基础.

L-S 降维方法是一种有效的非线性动力系统分析工具,该方法具有以下优点. 首先,L-S 方法可以将高维非线性系统的动态行为转化为低维系统的动态行为,从而降低了系统的复杂性. 其次,L-S 方法可以用于研究非线性微分方程解的稳定性,特别是对于高维系统,该方法提供了一种有效的分析手段. 最后,L-S 方法可以用于研究非线性系统的分岔行为,例如,通过分析中心流形和不稳定流形的交点来预测分岔的发生.

L-S 降维方法也存在以下局限性. 首先,截断函数的选择对结果的精度有很大影响,选择不当可能导致结果不准确. 其次,该方法只是一种近似方

法,不能给出高维系统动态行为的精确描述.最后,在处理高维非线性系统时,构造合适的投影算子可能会变得非常复杂和困难.

## 3 POD方法

本征正交分解(POD)方法,也称为K-L展开或奇异值分解(SVD)方法,是一种源于数据统计分析的降维方法.广泛应用于数据降维、流场分析中.其作用是用低维近似描述高维复杂系统,同时保留高维数据中的主要特征和能量分布.它降维的基本思想是收集数据样本,构造数据自相关矩阵,其中矩阵的每一行代表一个样本,每个样本由多个特征组成.接着对数据自相关矩阵进行奇异值分解,得到一组正交基函数,即本征函数.这些本征函数是按照重要性排序的,前面的本征函数包含了数据中大部分的能量,后面的本征函数包含的能量逐渐减小.选择合适的本征函数数量,将数据矩阵投影到这些本征函数上,即可得到低维表示.

通过POD方法,可以实现两个主要目标.首先,将高维数据投影到低维空间,构建降阶计算模型,这样可以大大降低计算的复杂度.其次,通过揭示数据中隐藏的相关结构,可以完成数据特征信息的分析.

连续型POD方法的基本原理推导[38]如下:

定义高维数据或流场 $x$ 的空间域为 $\boldsymbol{\Omega}$

$$L^2(\boldsymbol{\Omega})=\left\{f(x):\int f^2\mathrm{d}x<\infty,x\in\boldsymbol{\Omega}\right\} \tag{29}$$

定义流场分布 $\boldsymbol{N}(x,\delta),(x,\delta)\in\boldsymbol{\Omega}\times[\delta_a,\delta_b]$,在定义域内取 $L$ 个空间分布 $\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2,\cdots,\boldsymbol{N}_L$,即有

$$\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{N}(x,\delta_i),(x,\delta_i)\in\boldsymbol{\Omega}\times[\delta_a,\delta_b] \tag{30}$$

定义 $L^2$ 空间的内积

$$\langle f,g\rangle=\int fg\,\mathrm{d}x,\forall f,g\in L^2(\boldsymbol{\Omega}) \tag{31}$$

定义范数

$$\|f\|_{L^2}=(f,f)^{1/2} \tag{32}$$

假设 $\{\boldsymbol{N}_i\}_{i=1}^L$ 张成的空间维数为 $l$,可用标准正交基形式表示流场分布为

$$\boldsymbol{N}_i=\sum_{j=1}^{l}\langle\boldsymbol{N}_i,\varphi_j\rangle_{L^2}\varphi_j,\quad i=1,\cdots,L \tag{33}$$

POD方法[39]是要寻求一个正交基,满足

$$\min\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\|\hat{\boldsymbol{N}}_i-\sum_{i=1}^{d}\langle\boldsymbol{N}_i,\varphi_j\rangle_{L^2}\varphi_j\right\|_{L^2}^2 \tag{34}$$

其中,

$$\langle\varphi_i(x),\varphi_j(x)\rangle_{L^2}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases} \tag{35}$$

由于 $\varphi_j$ 具有标准正交性,方程(34)等价于寻求函数 $\varphi(x)$,满足如下方程

$$\max\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}|\langle\boldsymbol{N}_i,\varphi(x)\rangle| \tag{36}$$

其中,

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{L}\alpha_i(\delta)\boldsymbol{N}_i(x) \tag{37}$$

$\alpha_i(\delta)$ 为方程(36)取得最大值时对应的系数.

问题等价于在约束条件 $\|\varphi\|^2=1$ 时,求方程(36)的泛函极值问题.利用Lagrange乘子法,将方程等价描述为

$$J[\varphi]=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}|\langle\hat{\boldsymbol{N}}_i,\varphi_j\rangle|^2-\lambda(\|\varphi\|^2-1) \tag{38}$$

其达到极值的必要条件是 $\forall\varphi+\delta\varphi,\delta\in\boldsymbol{R}$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\delta}J[\varphi+\delta\varphi]_{\delta=0}=0 \tag{39}$$

方程(38)的求极值问题可简化为求方程(40)的求特征值问题

$$\sum_{i=1}^{L}\left[\frac{1}{L}\int\boldsymbol{N}_i(x')\boldsymbol{N}_j(x')\mathrm{d}x\alpha_k-\lambda\alpha_i\right]=0$$
$$i=1,2,\cdots,L \tag{40}$$

化简为矩阵形式

$$\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$$
$$\boldsymbol{A}_{ij}=\frac{1}{L}\int\boldsymbol{N}_i(x')\boldsymbol{N}_j(x')\mathrm{d}x'$$
$$\alpha=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_L)^T \tag{41}$$

此时求解方程组(41),得到特征函数 $\{\alpha_j^i\}$.最优化问题方程(34)的解可以表示为

$$\varphi_i=\frac{1}{L\lambda_i}\sum_{i=1}^{L}\alpha_j^i\boldsymbol{N}_j,\quad i=1,\cdots,l \tag{42}$$

关于POD方法的研究可追溯到20世纪40年代, Karhunen[40]、Loeve[41]、Obukhov[42]、Pougachev[43]等在连续二阶过程的框架下相继独立地提出这一理论.POD方法在多个领域[44]中都有广泛地应用[45].在流体力学中,POD方法可以用于模拟流动的降阶建模,提高计算效率[46].在结构动力学中,POD方法可以用于降低大型结构振动的计算复杂度.在图像处理和模式识别领域,POD方法可以用于图像压缩和特征提取.此外,POD方法还

被应用于信号处理、气象学、地震学等多个学科领域.通过将原始的高维非线性物理问题投影到 POD 基上,我们可以得到子空间的降阶模型,从而显著降低计算量.

在结构动力学领域,于海等[47]在转子动力系统中利用 POD 方法,通过降维前后模型定性性质的比较,说明 POD 方法在降维中的有效性.路宽[48]基于惯性流形理论对 POD 方法进行改进,完善了瞬态 POD 方法.郑保敬等[49]提出 POD 模型降阶方法,提高了非均质材料结构在复杂荷载作用下的动态响应.陈兵等[50]基于悬臂板模型,利用 POD 方法,研究几何非线性结构动力学降阶,提升了几何大变形条件下的结构非线性动力学系统的求解效率.在流体力学领域,陈款等[51]采用 POD 方法对不同频率脉冲射流尾迹中涡结构的变化进行分析,得到了各阶模态频谱图中频率分离情况.史鹏宇[52]利用 POD 方法,采用高速纹影技术对不同伴流条件、缩进比和气−液面积比下的超临界煤油喷射过程进行了研究.郝春阳[53]采用 POD 方法和 DMD 方法对合成射流特定频率($S_t=0.25$)及振幅($A_0=2.5$)下流场速度场进行模态分解,提取影响流场的主特征模态.李庭宇等[54]通过 POD 方法与 Kriging 技术相结合,更高效地得到了结冰云雾场.张泽文等[55]将改进的 POD-Galerkin 模型方法应用于二维圆柱绕流的流场预测,预测 4 阶和 6 阶扩展的 8 阶相较于原始 8 阶模型速度分别提高约 56%和 25%.曹文博等[56]利用 CFD 求解的流场快照构造了基于 POD 方法的降阶模型,加速了 CFD 的收敛过程.

POD 方法作为一种有效的数据降维技术,能够将高维数据转换为低维表示,同时保留数据中的主要特征和能量分布,其具有以下优点.首先,POD 方法是一种线性降维方法,因此具有较好的稳定性和可解释性.其次,POD 方法能够保留数据中的主要特征和能量分布,因此能够有效地降低数据的复杂性和维度.最后,POD 方法具有广泛的应用领域,例如在流体力学、结构动力学、图像处理、模式识别、信号处理、气象学、地震学等多个学科领域都有应用.

POD 方法也存在以下局限性.首先,POD 方法需要计算奇异值分解,计算复杂度较高,对于大规模的数据集可能需要较长的计算时间.其次,POD 方法对于非线性数据的降维效果不佳,对于非线性数据的处理需要采用其他的降维方法.

## 4 Galerkin 方法

### 4.1 标准 Galerkin 方法

Galerkin 方法降维的基本思想是首先对高维系统的数据进行正交分解,得到一组正交基函数,然后将高维系统的数据投影到这些正交基函数构成的子空间中,从而得到低维系统的数据.

应用中心流形定理降维时要求线性算子 $\boldsymbol{A}$ 具有零实部的特征值,若线性算子 $\boldsymbol{A}$ 特征值实部不为零,则可用标准 Galerkin 降维方法进行求解[57].考虑方程(6)表示的高维动力学系统,可表示为如下形式

$$\boldsymbol{X}(x,t)=\sum_{j=1}^{m} f_j(t)\varphi_j(x) \tag{43}$$

其中,$\varphi_j(x)$ 为标准 Galerkin 基,作为比较函数,一般选择符合原系统几何与边界条件的模态振型.

标准 Galerkin 降维时往往只截取前 $m$ 阶模态,即将原高维系统投影到由前 $m$ 阶模态张成的平滑子空间中,可表示为

$$\left\langle \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{A}-g\right)\left[\sum_{j=1}^{m} f_j(t)\varphi_j(x)\right],\varphi_j(x)\right\rangle=0 \tag{44}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示内积,由基的正交性可计算出 $m$ 阶模态的微分方程

$$\dot{f}_j=\boldsymbol{F}_j^m(f_1,f_2,\cdots,f_m),\quad j=1,2,\cdots,m \tag{45}$$

利用标准 Galerkin 方法可以将无穷维动力系统的偏微分方程简化成 $m$ 维的常微分方程.而在工程实际中,许多动力学系统的响应主要表现在前几阶低阶模态振动上,理论上来讲,只要截取足够的模态阶数,我们就可以准确地分析原系统的动力学特性.

标准 Galerkin 降维方法有以下优点.首先,标准 Galerkin 降维方法基于物理驱动,通过选取与物理过程相关的基函数,能够更好地描述高维系统的动态行为.其次,标准 Galerkin 降维方法采用正交分解的方式进行降维,相对于其他降维方法,计算效率更高.最后,标准 Galerkin 降维方法选取的基函数与物理过程相关,因此得到的低维模型具有

较高的可解释性.

但标准 Galerkin 降维方法也存在局限性. 首先,如果截取的模态阶数过多,降维后系统的分析计算量将变得很大. 其次,无论我们截取多少阶模态,总有未被截取的模态被忽略.

### 4.2 近似惯性流形和非线性 Galerkin 方法

为了改进高阶模态被忽略的缺陷,并且更加精确地描述原系统,Foias,Shell 和 Temam[58-60] 提出了惯性流形理论. 该理论的基本原理是通过将高维系统投影到惯性流形上,将其转化为低维动力系统完成降维,达到简化问题的目的. 高维动力系统中往往存在一种低维的吸引子,即惯性流形. 这种通过保留高维动力系统中的主导模态来构建的吸引子具有保持系统长时间演化的特性,包含了系统的主要动力学信息,因此我们可以通过研究惯性流形来揭示系统的本质特征.

考虑方程(6),定义线性算子 $\boldsymbol{A}$ 为 Hilbert 空间 $\boldsymbol{H}$ 上的无界、自共轭线性算子,$\dot{f}$ 仍为非线性算子. 令 $S(t)$是由方程(6)和初始条件来确定的算子半群,$S(t)$:$x_0 \rightarrow x(t)$. 在满足算子 $\boldsymbol{A}$ 谱间隙的条件下,存在惯性流形 $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{H}$,且 $\boldsymbol{M}$ 满足以下条件:

(1) $\boldsymbol{M}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 空间的有限维 Lipschitz 流形;

(2) $\boldsymbol{M}$ 是正不变的,即若有 $x_0 \in \boldsymbol{M}$,则 $\forall t > 0$,$S(t)x_0 \in \boldsymbol{M}$;

(3) $\boldsymbol{M}$ 是指数吸引的.

即 $\exists v > 0, \forall x_0 \in \boldsymbol{H}, \exists \boldsymbol{K} > 0$,使得 $\mathrm{dist}[S(t)x_0, \boldsymbol{M}] \leqslant \boldsymbol{K}e^{-vt}, t \geqslant 0$.

然而,想要证明高维系统存在惯性流形非常困难,且计算时为保证谱间隙的条件,需要截取相当大的模态阶数,这既不满足工程应用,也极大程度上增大了计算量. 为了能够更好地应用惯性流形理论,人们提出了一种具有有限维、非线性,且平滑的近似流形[61],代替惯性流形或全局吸引子,使所有的解都快速逼近这个流形的一个领域内,称为近似惯性流形[62].

尽管近似惯性流形只是惯性流形的近似,但由于它包含了高阶模态振型的影响,其解的精度将始终高于标准 Galerkin 方法.

非线性 Galerkin 方法是基于近似惯性流形理论,将原高维系统的解投影到近似惯性流形上的方法,仍考虑方程(6),可得投影后方程

$$\dot{x}_1 = px_1 + g_1(x_1 + x_2)$$
$$\dot{x}_2 = qx_2 + g_2(x_1 + x_2) \tag{46}$$

截取线性算子 $\boldsymbol{A}$ 前 $m$ 阶模态,投影算子 $P$ 来自投影到 $\boldsymbol{A}$ 的前 $m$ 阶模态振型张成的子空间,投影算子 $\boldsymbol{Q}$ 来自投影到 $m+1$ 阶到 $n$ 阶的模态振型张成的子空间,且有 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$.

令 $x_2 = \varphi_\alpha(x_1)$ 表示近似惯性流形,可得 $m$ 维方程

$$\dot{x}_1 = px_1 + g_1[x_1 + \varphi_\alpha(x_1)] \tag{47}$$

非线性 Galerkin 方法将问题简化为计算惯性流形 $\varphi_\alpha(x_1)$,方程(47)为降维后的方程.

工程中常用以下几种典型方法来计算近似流形:

(1) 准稳态格式

令 $\dot{x} = 0$ 可得

$$0 = qx_2 + g_2(x_1 + x_2) \tag{48}$$

采用 Picard 迭代映射,可得

$$\boldsymbol{T}(x_2) = -q^{-1}\boldsymbol{Q}g_2(x_1 + x_2) \tag{49}$$

令 $x_2 = 0$,可得近似惯性流形

$$\varphi_1 = -q^{-1}\boldsymbol{Q}g_2(x_1)$$
$$\varphi_2 = -q^{-1}\boldsymbol{Q}g_2[x_1 + \varphi_1(x_1)] \tag{50}$$

(2) 隐式欧拉法

设时间步长为 $\tau$,令迭代初值为 0,可得

$$\varphi_3 = \tau(\boldsymbol{I} + \tau\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{Q}g_2(x_1) \tag{51}$$

非线性 Galerkin 降维方法[63] 相较于标准 Galerkin 方法在近似精度和收敛速度上有了明显的提高,因此它也被广泛地应用于工程实际中. 在流体力学领域,应用于湍流模型的降维[64,65],通过对高雷诺数的湍流数据进行降维,能够得到低雷诺数的湍流模型,从而降低计算复杂度. 杨晓东[66] 将 Galerkin 方法应用在轴向运动物体中,离散控制方程为常微分方程. 吴钦宽[67] 利用 Sinc-Galerkin 方法,构造出边值问题的激波解,研究了一类非线性奇摄动方程的激波问题. 邵明月等[68] 应用 Galerkin 方法对振动偏微分方程组进行离散,为微分方程进一步求解奠定基础,研究了随从力作用下运动印刷薄膜的非线性强迫振动特性. 程用平[69] 提出了一种保结构的间断 Galerkin 法,将间断 Galerkin 法和有限元方法结合. 赵雨皓等[70] 采用 Galerkin 截断法(GTM)对弹性边界约束轴向载荷梁结构的动力学响应进行预报,研究了非线性能量阱对梁结构振动行为的影响规律. 李诚等[71] 采用基于谱单

元 Galerkin 法求解非线性模态,证明其在求解域较大时仍可获得较为准确的解. 张磊等[72]在弹性矩形薄板上应用小波 Galerkin 法求解了非线性屈曲问题. 在机器学习领域,应用于特征提取和数据降维. 刘嘉文等[73]使用间断伽辽金方法计算中产生的 Gibbs 噪声数据构造训练数据集,在图卷积滤波器的指导下进行图神经网络训练. 在图像处理领域,应用于图像压缩和图像分类,同时,通过对图像数据的低维表示进行分类,能够提高分类准确率.

在实际工程应用中,对于高维或无限维系统,Galerkin 方法作为一种基于物理驱动的降维方法,具有较好的降维效果和广泛的应用前景. Galerkin 方法通过将高维系统的数据投影到一个选定的低维子空间里,这些子空间往往有着明确的物理约束,使我们能够相对准确进行建模.

## 5　其他动力系统降维方法

在实际工程中,还存在其他有效的降维方法,如参数激励非线性降维技术[74]、自治系统正规形直接法[75]、非自治系统正规形复内积平均法[76]、基于时域矩匹配法的模型降阶[77]、基于不变流形法的模型降阶[78]等.

### 5.1　参数激励非线性降维技术

参数激励非线性降维技术是一种针对非线性数据的方法,它首先将原始高维数据投影到一个低维空间中,然后利用参数激励来调整投影后的数据,使其更好地反映原始数据的特征和规律,通过引入参数激励来提高降维的准确性和效率.

### 5.2　自治系统规范形直接法

自治系统规范形直接法是一种用于研究自治系统的方法. 它通过采用一系列的线性变换和坐标变换直接对系统的运动方程进行变换,将其转化为规范形,从而简化问题的分析和求解. 规范形是一种简化的形式,它能够更直观地描述系统的平衡点、周期解、极限环等重要运动性质和规律. 此外,规范形还可以用于研究系统的稳定性、分岔和混沌等复杂行为.

### 5.3　非自治系统正规形复内积平均法

非自治系统正规形复内积平均法是一种用于研究非自治系统的方法. 它通过利用复内积平均法对非自治系统的运动方程进行变换成正规形,从而简化问题的分析和求解.

### 5.4　基于时域矩匹配法的模型降阶

非线性系统的时域矩匹配法[79]通过计算样本数据的各阶矩并建立数据变换矩阵,将高维数据映射到低维空间,从而实现降维. 这种方法与有理 Krylov 子空间方法[80]密切相关,能够保留数据的主要特征,降低计算复杂度,提高数据处理效率.

### 5.5　基于不变流形法的模型降阶

不变流形降维方法利用动力系统理论,通过确保系统的长期动力学行为被封闭在流形附近,推导出准确且高效的降阶模型. 其表现出低阶动力学的全阶解完全依赖于这些流形,因此这种方法的关键在于计算流形的特性,以获得最准确的降阶模型.

## 6　问题与展望

在工程实际中复杂动力系统往往具有高维、非线性及强耦合的主要特点. 此时,寻求适当的降维方法,用低维流形来描述大型复杂的动力学系统,再采用现有的非线性动力学理论对系统复杂多样的动力学现象进行研究就显得十分重要.

### 6.1　问题

前文中介绍的各种降维方法虽都能解决降维的需求,然而,在所有的非线性降阶方法中,一个共同的问题是缺乏实用的降阶模型的全局误差界. 高维系统的维度过高,往往会导致计算复杂度增加,模型可解释性降低等问题,每个降维方法本身也具有一定的局限性. 因此,如何选择合适的降维方法以解决这些问题成为了一个具有挑战性的任务.

(1) 中心流形理论是一种研究非线性系统的重要工具. 然而,中心流形方法在处理高维数据时,需要确定系统的平衡点位置和中心流形的结构,这在实际应用中具有一定的难度.

(2) L-S 降维方法是一种基于机器学习的降维方法. 然而, L-S 降维方法对于大规模高维数据的处理效率较低.

(3) POD 方法是一种基于正交分解的降维方法. 然而,POD 方法在处理非线性数据时存在一定

的局限性，难以捕捉到数据的非线性特征.

（4）Galerkin 方法是一种基于物理驱动的降维方法. 然而，Galerkin 方法在处理高维数据时，计算复杂度较高，且对于非线性系统而言，选取合适的基函数具有一定的挑战性.

## 6.2 展望

针对中心流形理论、L-S 约化方法、POD 方法和 Galerkin 降维方法存在的问题，未来可以进一步研究如何选择合适的中心流形、核函数、投影空间和基函数等，以提高降维效果和计算效率.

（1）结合其他降维方法或机器学习算法，如深度学习等，进一步提高降维效果和模型的可解释性.

（2）研究如何将降维方法应用于实际问题中，如流体力学、机器学习、图像处理等领域，以推动相关领域的发展.

（3）扩大基于不变流形降阶模型的适用范围，以处理涉及更多主模态的更复杂动力学. 目前，大多数学者的研究，主要集中在仅使用 1～3 个主模态的情境下. 然而，当我们将主模态的数量增加到 10～20 个时，这种转变将引向更为复杂的动力学系统，并涉及混沌振动等方面的极限问题，这无疑会引发一系列重要的开放性问题.

## 参考文献


[1] 陈予恕，曹登庆，吴志强. 非线性动力学理论及其在机械系统中应用的若干进展[J]. 宇航学报，2007，28(4)：794－804.
CHEN Y S，CAO D Q，WU Z Q. Recent developments in nonlinear dynamics：theory and its applications in mechanical systems [J]. Journal of Astronautics，2007，28(4)：794－804.（in Chinese）

[2] 代伟，李创业，杨春雨，等. 基于低差异序列与快速扩展随机树融合算法的机械臂路径规划[J]. 控制理论与应用，2022，39(1)：130－144.
DAI W，LI C Y，YANG C Y，et al. Manipulator path planning using fusion algorithm of low difference sequence and rapidly exploring random tree [J]. Control Theory & Applications，2022，39(1)：130－144.（in Chinese）

[3] 郭世怡，田树才，张小龙，等. 直曲增强型负泊松比超材料的力学性能与减振研究[J]. 动力学与控制学报，2023，21(7)：28－37.
GUO S Y，TIAN S C，ZHANG X L，et al. Mechanical properties and vibration reduction analysis of a straight-arc strut enhanced metamaterials with negative poisson's ratio [J]. Journal of Dynamics and Control，2023，21(7)：28－37.（in Chinese）

[4] 杨静，潘文，苏何先，等. 可压缩超弹橡胶隔震支座压剪大变形的双非线性理论和应用研究[J]. 振动与冲击，2023，42(24)：237－248.
YANG J，PAN W，SU H X，et al. Double nonlinear theory and application of compressible superelastic rubber isolation bearings with large deformation in compression and shear [J]. Journal of Vibration and Shock，2023，42(24)：237－248.（in Chinese）

[5] 马硕，朱喜锋，王剑锋. 含干摩擦及非线性约束碰撞系统的动力学特性[J]. 机械强度，2023，45(5)：1065－1071.
MA S，ZHU X F，WANG J F. Dynamic characteristics of a collision system with dry friction and nonlinear constraints [J]. Journal of Mechanical Strength，2023，45(5)：1065－1071.（in Chinese）

[6] 沈煜年，顾金红. 柔性梁含摩擦斜碰撞的刚体－弹簧—质点混合模型研究[J]. 振动工程学报，2016，29(1)：1－7.
SHEN Y N，GU J H. Research on rigid body-spring-particle hybrid model for flexible beam under oblique impact with friction [J]. Journal of Vibration Engineering，2016，29(1)：1－7.（in Chinese）

[7] 李春鹏，张铁军，钱战森，等. 多用途无人机模块化布局气动设计[J]. 航空学报，2022，43(7)：103－118.
LI C P，ZHANG T J，QIAN Z S，et al. Aerodynamic design of modular configuration for multi-mission unmanned aerial vehicle [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2022，43(7)：103－118.（in Chinese）

[8] 罗楚雄. 小型叠层橡胶支座的力学性能相关性[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版)，2023，38(2)：41－47.
LUO C X. On correlation of mechanical properties of small laminated rubber bearings [J]. Journal of Hunan University of Science & Technology (Natural Science Edition)，2023，38(2)：41－47.（in Chinese）

[9] 宫晓春，曹登庆. 含参数多自由度非线性系统的降维方法研究[J]. 动力学与控制学报，2009，7(2)：129－135.

GONG X C, CAO D Q. Dimension reduction of nonlinear muti-degree-of-freedom system with multiple parameters [J]. Journal of Dynamics and Control, 2009, 7(2): 129－135. (in Chinese)

[10] 步妮，邓明聪. 基于学习及演算子理论的非线性系统控制方法综述[J]. 控制工程，2023，30(8)：1408－1418.
BU N, DENG M C. Survey of A New Nonlinear Control Technique based on Learning and Operator Theory [J]. Control Engineering of China, 2023, 30(8): 1408－1418. (in Chinese)

[11] 于海，陈予恕. 高维非线性动力学系统降维方法的若干进展[J]. 力学进展，2009，39(2)：154－164.
YU H, CHEN Y S. Recent developments in dimension reduction methods for high-dimension dynamical systems [J]. Advances in Mechanics, 2009, 39 (2): 154－164. (in Chinese)

[12] 王永岩. 动态子结构方法理论及应用[M]. 北京：科学出版社，1999.
WANG Y Y. Theory and application of dynamic substructure method [M]. Beijing: Science Press, 1999. (in Chinese)

[13] (美)KHALIL H K. 非线性系统[M]. 朱义胜，董辉，李作洲等,译. 北京：电子工业出版社，2005.
KHALIL H K. Nonlinear systems [M]. ZHU Y S, DONG H, LI Z Z, et al, translate. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005. (in Chinese)

[14] KELLEY A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds [J]. Journal of Differential Equations, 1967, 3(4): 546－570.

[15] GLUCKHEIMER J, HOLMES P, LEE K K. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields [J]. Physics Today, 1985, 38 (11): 102－105.

[16] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1981

[17] CARR J. Applications of centre manifold theory [M]. New York: Springer, 1982.

[18] 张军柯. 电磁场中板、壳的振动分岔[D]. 秦皇岛：燕山大学，2009.
ZHANG J K. Vibration bifurcation of plate and shell at electromagnetic field [D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2009. (in Chinese)

[19] 王艺，戈新生. 基于中心流形理论的欠驱动航天器姿态控制[J]. 北京信息科技大学学报(自然科学版)，2010，25(2)：37－40＋48.
WANG Y, GE X S. Attitude control Of an underactuated spacecraft base on center manifold theory [J]. Journal of Beijing Information Science & Technology University, 2010, 25(2): 37－40＋48. (in Chinese)

[20] 李晓晨. 平板颤振问题中的分岔现象研究[D]. 沈阳：沈阳航空航天大学，2013.
LI X C. The bifurcation research in panel flutter problem [D]. Shenyang: Shenyang Aerospace University, 2013. (in Chinese)

[21] 刘海英. 基于几何强非线性覆冰分裂导线模型动力学行为研究[D]. 天津：天津大学，2014.
LIU H Y. Study on dynamic behaviors of iced bundled conductor model based on geometric strong nonlinearity [D]. Tianjin: Tianjin University, 2014. (in Chinese)

[22] 陈杰. 基于稳定性理论的液体火箭 POGO 振动特性研究 [D]. 沈阳：沈阳航空航天大学，2016.
CHEN J. With stability theoryperformance for liquid rocket investigation of POGO vibration [D]. Shenyang: Shenyang Aerospace University, 2016. (in Chinese)

[23] 何东平，黄文韬，王勤龙. 二元机翼系统的极限环颤振与混沌运动[J]. 广西师范大学学报(自然科学版)，2019，37(3)：87－95.
HE D P, HUANG W T, WANG Q L. Limit cycle flutter and chaostic motion of two-dimensional airfoil system [J]. Journal of Guangxi Normal University (Natural Science), 2019, 37(3): 87－95. (in Chinese)

[24] 郑国勇. 不可压缩流中机翼颤振稳定性研究[J]. 力学季刊，2010，31(2)：207－212.
ZHENG G Y. Stability analysis of airfoil flutter in incompressible flow [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2010, 31(2): 207－212. (in Chinese)

[25] LIU F H, ZHANG Q C, TAN Y. Analysis of high codimensional bifurcation and chaos for the quad bundle conductor's galloping [J]. Chinese Physics Letters, 2010, 27(4): 044702.

[26] 范丽，史忠科. 具有时滞的非线性纵向飞行模型稳定性和分支分析[J]. 控制与决策，2013，28(7)：985－990.
FAN L, SHI Z K. Stability and bifurcation analysis of nonlinear model for longitudinal motion with time delay [J]. Control and Decision, 2013, 28(7): 985－990. (in Chinese)

[27] 黄岚. 对称与非对称簇发振荡及其机理分析[D]. 镇江：江苏大学，2019.
HUANG L. Symmetric and asymmetric bursting oscillationsas well as the bifurcation mechanism [D]. Zhenjiang：Jiangsu University，2019. (in Chinese)
[28] 陆启韶. 分岔与奇异性[M]. 上海：上海科技教育出版社，1995.
LU Q S. Bifurcation and singularity [M]. Shanghai：Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House，1995. (in Chinese)
[29] CHEN Y S，LANGFORD W F. The subharmonic bifurcation solution of nonlinear Mathieu's equation and Euler dynamic buckling problems [J]. Acta Mechanica Sinica，1988，4(4)：350－362.
[30] 陈晓，戴诗亮，许可. 层合板分叉方程的 Lyapunov-Schmidt 约化分析[J]. 应用力学学报，2001，18(3)：20－27.
CHEN X，DAI S L，XU K. The Lyapunov-Schmidt reduction analyse of laminated plates bifurcation equations [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics，2001，18(3)：20－27. (in Chinese)
[31] 时培明，韩东颖，李纪召，等. 一类高维相对转动非线性动力系统的 Lyapunov-Schmidt 约化与奇异性分析[J]. 物理学报，2012，61(19)：267－274.
SHI P M，HAN D Y，LI J Z，et al. Lyapunov-Schmidt reduction and singularity analysis of a high-dimensional relative-rotation nonlinear dynamical system [J]. Acta Physica Sinica，2012，61(19)：267－274. (in Chinese)
[32] ZHANG L，GUO S J. Existence and multiplicity of wave trains in 2D lattices [J]. Journal of Differential Equations，2014，257(3)：759－783.
[33] 王培光，谭军，曹建智，等. 一类中立型神经网络模型的 Hopf 分岔分析[J]. 生物数学学报，2019，34(2)：323－331.
WANG P G，TAN J，Cao J Z，et al. Hopf bifurcation analysis of a neutral neural network model. Journal of Biomathematics，2019，34(2)：323－331. (in Chinese).
[34] 谭军. 几类具有时滞的微分系统的分岔分析[D]. 保定：河北大学，2019.
TAN J. Bifurcation analysis of several differential systems with time delay [D]. Baoding：Hebei University，2019. (in Chinese)
[35] 王非之. RN 中带不定线性项的椭圆方程解的存在性[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2007，43(3)：127－130.
WANG F Z. Existence of nontrivial solutions for an elliptic equation with an indefinite linear part in RN [J]. Journal of Lanzhou University (Natural Sciences)，2007，43(3)：127－130. (in Chinese)
[36] 曾纯一. 一类交叉扩散系统稳态解的存在性和多重性[J]. 西南民族大学学报(自然科学版)，2019，45(4)：411－414.
ZENG C Y. Existence and diversity of steady state solution in a cross-diffusion model [J]. Journal of Southwest Minzu University (Natural Science)，2019，45(4)：411－414. (in Chinese)
[37] 徐珊珊. 周期扰动下异宿轨的持久性问题[D]. 陕西:陕西科技大学，2023.
XU S S. Persistence of heteroclinic orbits under periodic perturbation [D]. Shanxi：Shanxi University of Science and Technology，2023. (in Chinese)
[38] 曹长强. 基于采样数据分析的流场降阶数值预测方法研究[D]. 西安：西北工业大学，2020.
CAO C Q. Research on numerical prediction method of aerodynamic flows based on model reduction by sampling data analysis [D]. Xi'an：Northwestern Polytechnical University，2020. (in Chinese)
[39] 杜娟. 流体力学方程基于 POD 方法的降维数值解法研究[D]. 北京：北京交通大学，2011.
DU J. Reduced order modeling based on pod for fluid dynamic equations [D]. Beijing：Beijing Jiaotong University，2011. (in Chinese)
[40] KARHUNEN K. Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung [M]. Helsinki，Finland：Suomalainen Tiedeakatemia，1947.
[41] LOEVE M. Functions aleatoires du second ordre [M]//LÉVY P. Processus stochastiques et mouvement Brownien，Paris：Gauthier-Villars，1948：366－420.
[42] OBUKHOV A M. Statistical description of continuous fields [J]. Transactions of the Geophysical International Academy Nauk USSR，1954，24(24)：3－42.
[43] Pugachev V S. The general theory of correlation of random functions [J]. Izvestiya Akademii Nauk SSSR：Seriya Matematicheskaya，1953，17(5)：401－420.
[44] 张青山. 有限长平板分离再附流动非定常特性的 PIV 实验研究——基于 POD 与 DMD 模态分解的旋涡动力学分析[D]. 上海：上海交通大学，2015.
ZHANG Q S. PIV measurements of unsteady char-

acteristics of separated and reattaching flow on finite blunt plate: Vortex dynamics analysis using proper orthogonal decomposition and dynamic mode decomposition [D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2015. (in Chinese)

[45] ZHANG K Y, LU K, CHAI S N, et al. Dynamic modeling and parameter sensitivity analysis of AUV by using the POD method and the HB-AFT method [J]. Ocean Engineering, 2024, 293: 116693.

[46] 路宽，张亦弛，靳玉林，等. 本征正交分解在数据处理中的应用及展望[J]. 动力学与控制学报，2022，20(5)：20－33.
LU K, ZHANG Y C, JIN Y L, et al. Application and outlook of proper orthogonal decomposition in data processing [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(5): 20－33. (in Chinese)

[47] 于海，陈予恕. POD方法在转子系统降维中的应用[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版)，2012，28(3)：365－368＋378.
YU H, CHEN Y S. Application of POD method to reduce dimensions of rotor system [J]. Journal of Harbin University of Commerce (Natural Sciences Edition), 2012, 28(3): 365－368＋378. (in Chinese)

[48] 路宽. 基于瞬态响应的 POD 方法及其在转子系统降维中应用[D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2017.
LU K. The POD method based on transient response and applications for dimension reduction of rotor systems [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017. (in Chinese)

[49] 郑保敬，梁钰，高效伟，等. 功能梯度材料动力学问题的 POD 模型降阶分析[J]. 力学学报，2018，50(4)：787－797.
ZHENG B J, LIANG Y, GAO X W, et al. Analysis for dynamic response of functionally graded materials using POD based reduced order model [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(4): 787－797. (in Chinese)

[50] 陈兵，龚春林，仇理宽，等. 基于频域本征正交分解的几何非线性动力学降阶[J]. 振动与冲击，2020，39(21)：163－172.
CHEN B, GONG C L, QIU L K, et al. Order reduction of geometrically nonlinear dynamic system based on POD in frequency domain [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(21): 163－172. (in Chinese)

[51] 陈款，张艳华，雷玉昌，等. 基于本征正交分解的脉冲射流尾迹分析[J]. 应用力学学报，2022，39(5)：834－844.
CHEN K, ZHANG Y H, LEI Y C, et al. Wake analysis of pulsed jet based on proper orthogonal decomposition [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2022, 39(5): 834－844. (in Chinese).

[52] 史鹏宇，张启斌，王之声，等. 喷射结构对超临界 RP-3 航空煤油射流自激振荡特性的影响[J/OL]. 航空动力学报，2023，1－10[2024－02－29]. https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.20230359.
SHI P Y, ZHANG Q B, WANG Z S, et al. Effect of injection structure on the self-pulsation characteristics of supercritical RP-3 aviation kerosene jet [J/OL]. Journal of Aerospace Powers, 2023, 1－10 [2024－02－29]. https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.20230359. (in Chinese).

[53] 郝春阳，董祥瑞，蔡天意，等. 基于多特征提取的合成射流涡流控制机理研究[J/OL]. 工程力学，2023，1－13[2024－02－29]. http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.O3.20230831.1731.004.html.
HAO C Y, DONG X R, CAI T Y, et al. Study on vortex control mechanism of synthetic jet based on feature extraction methods [J/OL]. Engineering Mechanics, 2023, 1－13[2024－02－29]. http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.O3.20230831.1731.004.html. (in Chinese).

[54] LI T Y, REN J H, WANG Q, et al. Fast calculation of icing cloud parameters based on POD_Kriging surrogate model [J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2023, 40(1): 1－12.

[55] 张译文，王志恒，邱睿贤，等. 利用长短期记忆神经网络的改进 POD-Galerkin 降阶模型及其在流场预测中的应用[J]. 西安交通大学学报，2024,58(02):12－21.
ZHANG Y W, WANG Z H, QIU R X, et al. Improved POD-Galerkin reduced order model with long short-term memory neural network and its application in flow field prediction [J]. Journal of Xi′an Jiaotong University, 2024,58(02):12－21. (in Chinese).

[56] 曹文博，刘溢浪，张伟伟. 基于降阶模型和梯度优化的流场加速收敛方法[J]. 航空学报，2023，44(6)：122－132.
CAO W B, LIU Y L, ZHANG W W. Accelerated convergence method for fluid dynamics solvers based

on reduced-order model and gradient optimization [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 44(6): 122－132. (in Chinese)

[57] 张昆鹏. 转子系统的降维及非线性动力学研究[D]. 天津：天津大学，2011.
ZHANG K P. Dimension reduction and nonlinear dynamics of rotor systems [D]. Tianjin: Tianjin University, 2011. (in Chinese)

[58] FOIAS C, MANLEY O, TEMAM R. Modelling of the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows [J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1988, 22 (1): 93－118.

[59] FOIAS C, JOLLY M S, KEVREKIDIS I G, et al. On the computation of inertial manifolds [J]. Physics Letters A, 1988, 131(7/8): 433－436.

[60] FOIAS C, SELL G R, TITI E S. Exponential tracking and approximation of inertial manifolds for dissipative nonlinear equations [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 1989, 1(2): 199－244.

[61] 伍渝江. 关于近似惯性流形及其数值方法的研究[J]. 力学进展，1994，(2)：145－53.
WU Y J. Research on approximate inertial manifold and its numerical method [J]. Advances in Mechanics, 1994, (02): 145－53(in Chinese).

[62] 戴正德，郭柏灵. 惯性流形与近似惯性流形[M]. 北京：科学出版社，2000.
DAI Z D, GUO B L. Inertial manifold and approximate inertial manifold [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)

[63] 王晋麟，曹登庆，宋敉淘. 大型动力系统的降维：基于模态截断的非线性 Galerkin 方法[J]. 动力学与控制学报，2009，7(2)：108－112.
WANG J L, CAO D Q, SONG M T. Dimensional reduction of large dynamical systems: an nonlinear Galerkin method based on model trunction [J]. Journal of Dynamics and Control, 2009, 7(2): 108－112. (in Chinese)

[64] 阎超，于剑，徐晶磊，等. CFD 模拟方法的发展成就与展望[J]. 力学进展，2011，41(5)：562－589.
YAN C, YU J, XU J L, et al. On the achievements and prospects for the methods of computational fluid dynamics [J]. Advances in Mechanics, 2011, 41 (5): 562－589. (in Chinese)

[65] 吕宏强，张涛，孙强，等. 间断伽辽金方法在可压缩流数值模拟中的应用研究综述[J]. 空气动力学学报，2017，35(4)：455－471.
LV H Q, ZHANG T, SUN Q, et al. Applications of discontinuous Galerkin method in numerical simulations of compressible flows: a review [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2017, 35(4): 455－471. (in Chinese)

[66] 杨晓东. 轴向运动粘弹性梁的横向振动分析[D]. 上海：上海大学，2005.
YANG X D. Dynamical analysis of transverse vibrations of axially moving viscoelastic beams [D]. Shanghai: Shanghai University, 2005. (in Chinese)

[67] 吴钦宽. 一类非线性方程激波解的 Sinc-Galerkin 方法[J]. 物理学报，2006，55(4)：1561－1564.
WU Q K. The shock solution for a class of the nonlinear equations by the Sinc-Galerkin method [J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(4): 1561－1564. (in Chinese)

[68] 邵明月，武吉梅，王砚，等. 随从力作用下运动薄膜的非线性强迫振动特性研究[J]. 振动与冲击，2020，39(10)：215－219.
SHAO M Y, WU J M, WANG Y, et al. Nonlinear forced vibration characteristics of membrane subjected to follower force [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(10):215－219. (in Chinese).

[69] 程用平. 一些流体力学方程的保结构间断伽辽金方法[D]. 重庆:重庆大学，2020.
CHENG Y P. Equations Galerkin methods for some fluid dynamics structure-preserving discontinuous [D]. Chongqing: Chongqing University, 2020. (in Chinese).

[70] 赵雨皓，杜敬涛，张树奇，等. 具有非线性能量阱的弹性边界约束轴向载荷梁结构动力学行为研究[J]. 振动与冲击，2022，41(24)：262－269＋297.
ZHAO Y H, DU J T, ZHANG S Q, et al. A study of dynamic behavior of axially loaded beams with nonlinear energy sink and elastic boundary restraints [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(24): 262－269＋297. (in Chinese)

[71] 李诚，李鸿光. 采用谱单元 Galerkin 法求解非线性模态[J]. 噪声与振动控制，2022，42(4)：25－31＋37.
LI C, LI H G. Calculation of nonlinear normal modes using Galerkin method with spectral elements [J]. Noise and Vibration Control, 2022, 42(4): 25－31＋37. (in Chinese)

[72] 张磊，张文明，王林，等. 基于小波 Galerkin 法的矩形薄板二次屈曲分析[J]. 应用数学和力学，2023，

44(1): 25−35.
ZHANG L, ZHANG W M, WANG L, et al. Secondary buckling analysis of thin rectangular plates based on the wavelet Galerkin method [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2023, 44(1): 25−35. (in Chinese)

[73] 刘嘉文，王明振，欧阳文轩，等. 针对高阶间断伽辽金数值格式的 Gibbs 现象智能去噪方法[J]. 航空学报，2024,45(14):1−16.
LIU J W, WANG M Z, OUYANG W X, et al. The Gibbs phenomenon of the high-order discontinuous Galerkin numerical scheme is intelligently removed [J]. Acta Aeronautica et Astronautica sinica, 2024, 45(14):1−16.(in Chinese).

[74] SINHA S C, REDKAR S, DESHMUKH V, et al. Order reduction of parametrically excited nonlinear systems: techniques and applications [J]. Nonlinear Dynamics, 2005, 41(1): 237−273.

[75] WU Z Q, CHEN Y S, BI Q S. Normal form of the nonsemi-simple bifurcation problem [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1997, 18(4): 349−354.

[76] CHEN Y S, SUN H J. Complex inner product averaging method for calculating normal form of ODE [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(12): 1368−1374.

[77] RAFIQ D, BAZAZ M A. Model order reduction via moment-matching: a state of the art review [J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2022, 29(3): 1463−1483.

[78] TOUZÉ C, VIZZACCARO A, THOMAS O. Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques [J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 105(2): 1141−1190.

[79] BAUR U, BENNER P, FENG L H. Model order reduction for linear and nonlinear systems: a system-theoretic perspective [J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2014, 21(4): 331−358.

[80] BAI Z J. Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems [J]. Applied Numerical Mathematics, 2002, 43(1/2): 9−44.