

# 基于拓扑优化的叶片结构呼吸振动抑制研究<sup>\*</sup>

张锦涛 孙加亮<sup>†</sup> 金栋平

(南京航空航天大学 航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京 210016)

**摘要** 叶片结构在航空航天领域中应用广泛,例如飞机机翼、风力机叶片等.叶片结构通常为薄壳结构,在工作过程中极易发生低频呼吸振动,从而导致结构破坏.本文以叶片结构为研究对象,以第一阶模态频率(即呼吸振动频率)最大化作为优化目标,建立叶片结构自由振动下的频率拓扑优化模型.在保持优化前后叶片结构质量不变的条件下,设计了叶片结构空腔内腹板的最优分布.采用商业软件 ANSYS 对优化前后的叶片结构进行模态分析,并且基于 3D 打印技术,对优化前后的试验件开展振动测量实验,结果表明:优化后的叶片结构前四阶模态频率均得到了显著提升,实现了对叶片结构频率调控的目的.通过提升一阶模态频率的方式解决叶片结构在工作环境中易因低频共振发生呼吸振动从而导致结构破坏的问题,为相关结构频率优化设计提供参考.

**关键词** 叶片结构, 呼吸振动, 拓扑优化, 频率优化, 实验验证

**中图分类号**:O313

**文献标志码**:A

## Breathing Vibration Suppression of a Blade Structure Based on Topology Optimization<sup>\*</sup>

Zhang Jintao Sun Jialiang<sup>†</sup> Jin Dongping

(State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures, Nanjing University of Aerospace and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract** Blade structures are widely employed in aerospace engineering, such as wings and rotor blades. Blade structures are usually thin-shell structures, which are very easy to excite low-frequency breathing vibration and result in structural damage. This paper takes a blade structure as the research object and considers the optimization design for maximizing its first eigenfrequency (i. e. the breathing vibration frequency). The topology optimization formulation for eigenfrequency of the blade structure is therefore established. Under the volume constraint, the distribution of the webs in the cavity of the blade structure is designed. By employing ANSYS software for modal analysis and experiments for vibration tests of the blade structures before and after optimization, the results show that the first four eigenfrequencies of the blade structure are all improved dramatically, which achieves the purpose for manipulating the eigenfrequency of the blade structure. The structural safety issue caused by the low-frequency breathing vibration of the blade structure is alleviated by improving its first-order eigenfrequency, which provides a reference for relevant structural optimization design of eigenfrequencies.

**Key words** blade structure, breathing vibration, topology optimization, eigenfrequency optimization

2024-01-30 收到第 1 稿,2024-04-12 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(12372042, 12232011, 12172181),中央高校基本科研业务费专项资金资助(NS2023002),National Natural Science Foundation of China (12372042, 12232011, 12172181), Fundamental Research Funds for the Central Universities (NS2023002).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail:sunjialiang@nuaa.edu.cn

tion, experiment validation

## 引言

叶片结构在航空航天等领域应用广泛,常作为风力机叶片和机翼的重要部件,具有高承载、高负荷的工作特性。高强度的工作环境对叶片结构的刚度、强度提出了高要求,同时结构的振动也是工程应用中需要考虑的重要因素。

随着对叶片空腔结构设计要求的提高,拓扑优化越来越受到设计人员的重视。朱杰等<sup>[1]</sup>通过将拓扑和尺寸优化相结合的方式对风力机叶片的内部结构进行了优化设计,实现了叶片的轻量化,但是最终的优化结果只在空腔内的主梁帽处与原构型有较大差异。Yang 等<sup>[2]</sup>基于变密度法对叶片空腔结构进行了优化,得到了与传统腹板不同的新型腹板布局设计,在保持质量相同的情况下显著提升了叶片结构的强度。吴一帆等<sup>[3]</sup>在考虑鸟撞的情况下对航空发动机叶片进行轻量化设计,在满足适航条例的同时显著减少了叶片的质量,具有一定的实际应用价值。

振动问题是工程中影响设计的重要因素之一。叶片空腔结构大多是薄壳结构,在工程实际中极易发生低频呼吸振动,导致结构失效。因此,减少或避免叶片结构的低频共振显得尤为重要。解决结构的振动问题主要分为两种情况:考虑结构的阻尼和忽略结构的阻尼。考虑阻尼时可以通过提高结构的阻尼比来抑制叶片结构的振动。张大义等<sup>[4]</sup>通过对阻尼结构截面形状的优化、提高有效接触面积,改善了接触面应力的均匀程度,实现了对转子叶片的振动抑制。李琳等<sup>[5]</sup>提出了一种用于叶盘结构的压电分支阻尼器拓扑优化方法,通过替换单元类型和材料参数的方式对压电材料在叶片上的分布进行优化设计,从而达到最大的模态阻尼比,实现对叶片的减振。此方法实现了压电材料在叶片上布局优化的通用性,为用于叶片减振的优化设计提供了参考。

当结构阻尼较低时,结构的共振频率通常接近其模态频率。优化结构的模态频率,使其远离结构的工作频率可以有效解决结构振动问题。Du 等<sup>[6]</sup>等基于变密度法,针对无阻尼线弹性结构提出了以最大化固有频率为目标函数的数学模型,并用算例验证了它的可行性,该数学模型具有很强的适用

性。Sun 等<sup>[7]</sup>于绝对节点坐标法建立旋转薄板模型,利用移动变形组件法对结构分别进行一阶共振频率最大化和相邻共振频率最大化的拓扑优化设计,通过算例验证了优化算法的可行性。苗晓婷等<sup>[8]</sup>提出了两种多目标拓扑优化方案,分别将多目标优化问题转化为在约束参考点位移和低阶振动频率下对结构质量最小化的优化,以及在约束低阶振动频率和体积分数下对结构组合柔度指数最小化的优化,最终提高了飞行器升力面结构的一、二阶振动频率。阎军等<sup>[9]</sup>在对宽弦风扇叶片的轻量化设计中首先以最小柔顺性为目标,然后基于该优化的结果进一步进行了柔顺性与基频的多目标优化设计,给出了一种较为合理的叶片空腔构型。

目前已有许多学者对叶片结构的各项性能进行优化,但大多是针对叶片的强度、刚度、抗冲击能力等,对叶片结构的模态频率优化较少。本文以 4.3MW-SR152 转子叶片中面积最大的截面为研究对象,在不计阻尼的情况下以最大化一阶模态频率为设计目标,基于 SIMP (Simplified Isotropic Material with Penalization) 插值模型<sup>[10]</sup>,结合有限元分析软件 ANSYS 对叶片空腔内腹板的布局进行拓扑优化设计,并且通过模态分析和振动测试验证了优化方案的可行性。

## 1 结构频率拓扑优化

### 1.1 拓扑优化模型

连续体拓扑优化旨在寻找离散变量的 0~1 组合优化,变密度法将离散的变量转化为连续的变量,以单元的相对密度为设计变量,并且假定材料的相对密度与材料弹性模量之间的关系,在迭代过程中通过调整相对密度在 0~1 的变化来满足目标函数与约束。网格单元的相对密度为 0 删除,为 1 则保留。在优化过程中,会出现相对密度在 (0,1) 之间的单元。

以基频最大化为目标的拓扑优化数学模型表示如下<sup>[11]</sup>:

$$\max: \omega_1$$

$$\text{s. t. : } (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{Z} = \mathbf{0}$$

$$\sum_i^N V_i x_i - V_f \leq 0$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (1)$$

式中,  $\omega_1$  为第一阶模态频率,  $\omega$  是系统的固有频率,  $\mathbf{Z}$  为模态振型,  $\mathbf{K}$  为系统的刚度矩阵,  $\mathbf{M}$  为系统的质量矩阵;  $V_i$  为第  $i$  个单元体积,  $V_f$  为设计者定义的体积分。  $x_i$  为第  $i$  个单元的密度, 即设计变量,  $x_i$  的取值存在以下三种情况:

$$\begin{cases} x_i = 0 & \Leftrightarrow \text{空域} \\ 0 < x_i < 1 & \Leftrightarrow \text{中间域} \\ x_i = 1 & \Leftrightarrow \text{材料域} \end{cases} \quad (2)$$

## 1.2 灵敏度分析

每次迭代过程中都需要进行灵敏度分析以评估设计变量对目标函数的影响, 灵敏度的正负表示设计变量与目标函数之间的正负相关性, 即目标函数为最小化时灵敏度为负, 最大化时为正; 灵敏度的模的大小表示设计变量对目标函数的影响程度, 通过保留对模型影响大的设计变量而删去影响小的就可以极大地提升优化效率。

SIMP 模型采用带惩罚因子的插值函数使得这些中间密度向 0 或 1 趋近, 由 SIMP 密度-刚度插值模型得系统的刚度矩阵表达式为<sup>[12]</sup>:

$$\mathbf{K} = \sum_i^N g_1(x_i) \mathbf{K}_i$$

$$g_1(x_i) = E_{\min} + x_i^p (E_0 - E_{\min}) \quad (3)$$

式中,  $E_0$  为单元材料的弹性模量,  $E_{\min}$  是为了防止刚度矩阵奇异设置的一个极小值,  $p$  为引入的惩罚因子,  $\mathbf{K}_i$  为单元密度  $x_i = 1$  时的单元刚度矩阵。

为避免在低密度区域发生局部模态对结构产生影响, 需要对低密度区域的单元质量进行惩罚<sup>[6]</sup>, 此时系统的质量矩阵表达式为:

$$\mathbf{M} = \sum_i^N g_2(x_i) \mathbf{M}_i$$

$$g_2(x_i) = \begin{cases} x_i, & 0.01 < x_i \leq 1 \\ x_i^3, & 0 < x_i \leq 0.01 \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{M}_i$  为单元密度  $x_i = 1$  时的单元质量矩阵。

由此可以得到目标函数  $\omega$  关于设计变量  $x_i$  的灵敏度为:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{1}{2\omega} \mathbf{Z}^T \left[ \frac{\partial g_1(x_i)}{\partial x_i} \mathbf{K}_i - \omega^2 \frac{\partial g_2(x_i)}{\partial x_i} \mathbf{M}_i \right] \mathbf{Z} \quad (5)$$

## 1.3 拓扑优化流程

拓扑优化求解的一般流程如图 1 所示, 首先对需要优化的结构建立有限元模型, 在确定好优化目标及优化参数后, 对模型进行分析, 当前后两次的目标值的差值小于收敛容差时, 优化收敛, 对优化结果几何重构之后便可以得到最终的优化结果。

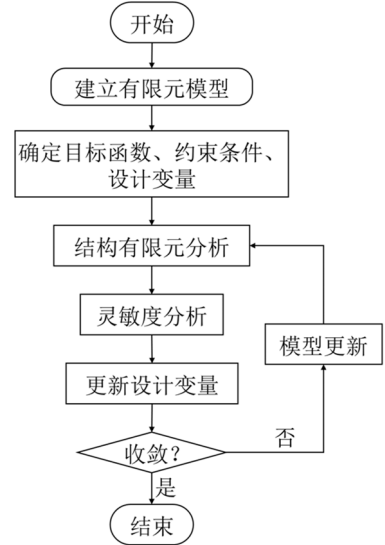


图 1 拓扑优化流程图

Fig. 1 Flow chart of topology optimization

## 2 叶片结构拓扑优化

### 2.1 优化模型与参数设置

本文以叶片结构为研究对象, 以提高叶片自由边界条件下第一阶模态频率为目标, 开展腹板布局优化设计研究. 初始叶片空腔构型取自 4.3MW-SR152 转子叶片中面积最大的截面, 如图 2 所示。

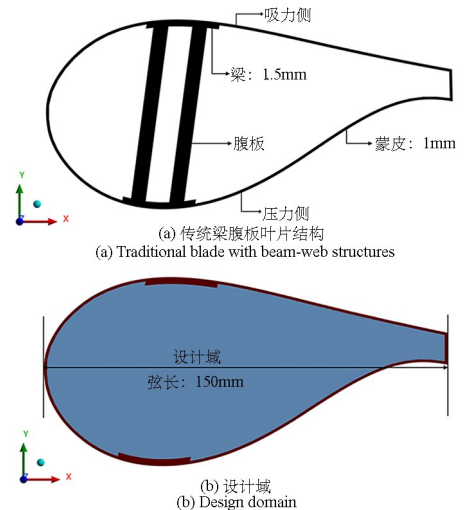


图 2 叶片结构模型

Fig. 2 Blade model

传统梁腹板叶片结构如图 2(a)所示,主要由三部分组成,包括蒙皮、主梁和腹板.蒙皮和主梁的厚度分别为 1mm 和 1.5mm,主梁的宽度为 27mm,结构的弦长为 150mm,由于在实际工作中叶片下方的蒙皮受到压力而上方蒙皮受到吸力,因此定义叶片结构下方为压力侧,上方为吸力侧.叶片结构在工作中容易发生低频呼吸振动,表现为在叶片的面内收缩或膨胀的变形.为了减弱叶片空腔结构的厚度对横截面面内振动的影响,将此模型的展长设置为 20mm.

图 2(b)为叶片结构的设计域示意图.为了优化空腔内腹板的布局,以空腔作为设计域,而蒙皮和主梁为非设计域,即图 2(b)中蓝色部分表示设计域,而红色部分为非设计域.为了简化计算、提升优化设计的速度,将设计域和非设计域取相同材料,材料的力学属性如表 1 所示.对整个结构采用三角形板单元进行有限元建模,单元的最大尺寸为 0.5mm,最终得到单元总数为 56 851.

为便于优化前后对比,优化中需保证质量保持不变,由于已经将结构简化为均匀的单材料等厚度模型,所以只需要保证优化前后叶片结构的腹板面积相同.经过测量得到传统叶片结构腹板的截面面积约为空腔面积的 12%,因此定义拓扑优化的体积分数为 12%.另外,为防止优化过程中出现宽度较大或较小的腹板,还需考虑构件的尺寸控制,对设计域施加最小尺寸为 2mm、最大尺寸为 6mm 的尺寸约束.以叶片结构的第一阶模态频率最大化为目标函数,单元密度为设计变量,定义惩罚因子  $p$  为 5,最小单元密度为  $1\times 10^{-5}$ ,目标函数的收敛容差比设置为  $1\times 10^{-5}$ ,即拓扑优化会在两次迭代的目标值相差小于  $1\times 10^{-5}$  时优化终止.

表 1 叶片结构的材料参数		
Table 1 Material parameters of the blade structure		
弹性模量/MPa	泊松比	密度/( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )
$2.1\times 10^5$	0.3	7850

2.2 频率拓扑优化结果

叶片结构频率拓扑优化结果如图 3(a)所示,优化后空腔内腹板的面积为  $770.8\text{mm}^2$ ,约为空腔面积的 12%,满足体积约束要求.从图 3(a)中可以看出,优化后的腹板仍连接叶片结构上下两根梁,

相对于传统梁腹板结构,优化后腹板的分布更加偏向叶片结构的后缘,优化后的腹板中存在许多孔洞,整体呈现为网格状.

优化在一台配置 Inter Core 12700H 及 16GB RAM 的 PC 机上进行,拓扑优化的迭代过程如图 3(b)所示,体积分数收敛较快,仅 4 步便达到了收敛值;由于设置的收敛容差比较小,目标函数的迭代步数较多,最终经过 11 个小时,2500 步左右的迭代目标函数值趋于收敛.

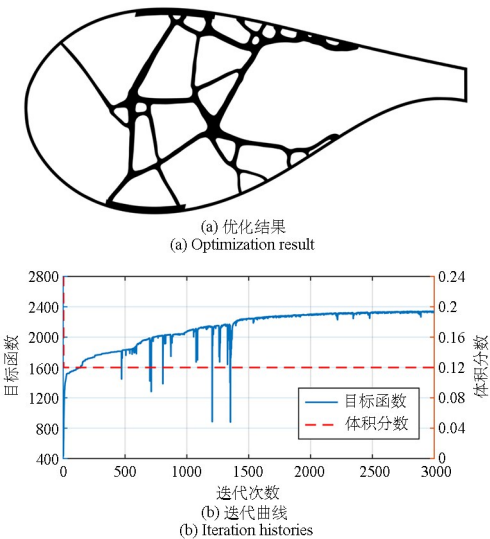


图 3 拓扑优化结果  
Fig. 3 Topology optimization result

2.3 模态分析

将优化前后的叶片结构导入有限元仿真软件 ANSYS 中进行自由边界条件下的模态分析,通过比较两者的前四阶模态频率来检验拓扑优化的有效性.

模态分析得到的优化前后叶片结构的前四阶模态频率如表 2 所示,优化前后叶片结构的一阶模态振型分别如图 4(a)和图 4(b)所示.从表 2 可以看出,优化前的叶片结构前四阶模态频率为 412.01Hz、558.94Hz、1085.9Hz、1119.2Hz,优化后的前四阶模态频率分别为 1350.3Hz、1719.5Hz、2165.2Hz、2404.9Hz,叶片结构的前四阶模态频率均得到了较大幅度的提升,提升幅度分别为 227.73%、207.64%、99.39%、114.88%.

优化前后叶片结构的前四阶模态频率呈现同样的分布规律,即第一、二阶模态频率接近,第三、四阶模态频率接近,且第二、三阶模态频率相距较远.同时第一、二阶的模态频率提升幅度接近,第



三、四阶的模态频率提升幅度也接近,且一、二阶的提升幅度远大于三、四阶。

表 2 优化前后叶片结构前四阶模态频率

Table 2 The first four modal frequencies of the blade structure before and after optimization

模态频率/Hz	优化前	优化后	变化幅度
1st frequency	412.01	1350.3	227.73% ↑
2nd frequency	558.94	1719.5	207.64% ↑
3rd frequency	1085.9	2165.2	99.39% ↑
4th frequency	1119.2	2404.9	114.88% ↑

从图 4(a)的振型图可以看出,优化前的叶片结构的第一阶模态为压力侧的呼吸振动模态,优化后的叶片结构第一阶模态虽然也为尾缘处的呼吸振动模态,但支撑腹板已延伸到叶片尾缘处,且第一阶模态频率得到了大大提升,从而有效抑制了叶片结构在低频共振下的呼吸振动,优化后的叶片结构发生呼吸振动的概率大大降低。

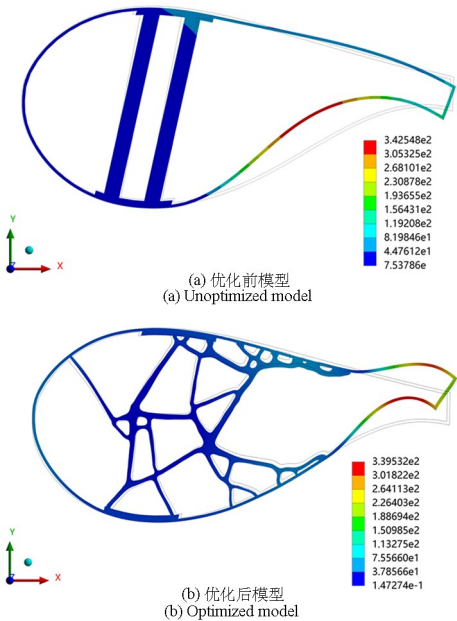


图 4 优化前后叶片结构一阶模态振型图

Fig. 4 First-order mode shapes of the blade structure before and after optimization

3 实验验证

3.1 实验方法

为了验证优化设计和仿真计算的正确性和合理性,本节将对优化前后的叶片结构进行振动测试实验,对比它们的前四阶共振频率。

考虑到图 3(a)中的模型尺寸较小,不利于进

行振动测试,因此将试验件的截面扩大到原尺寸的 1.67 倍,展长放大 2 倍,最终得到的试验件弦长为 250mm,展长为 40mm. 打印的试验件材料为 ABS 树脂,其杨氏模量为 2015MPa,密度为 1050kg/m<sup>3</sup>. 考虑到图 4(a)中的变形主要发生在压力侧蒙皮的后缘,图 4(b)中的变形集中发生在叶片结构的尾缘,因此,将激励点设置在吸力侧蒙皮上,测量点设置在压力侧蒙皮上. 实验室的条件难以让试验件在自由边界条件下开展实验,因此,在压力侧主梁处的蒙皮上设置一个固支点,以固定试验件. 优化前后叶片结构的 3D 打印试验件如图 5 所示。

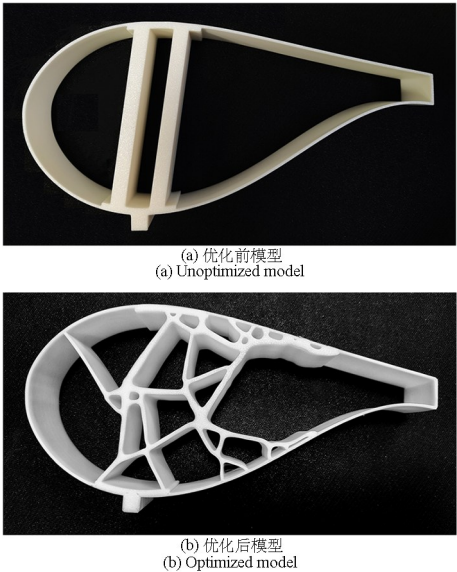


图 5 叶片结构 3D 打印试验件

Fig. 5 3D printed blade structures

按照图 6 的方式将仪器与试验件连接起来,将试验件固定在实验台上,将激振器、加速度传感器连接在试验件上,激振器的连接位置如图 6 中点 A 所示,加速度传感器的位置如点 1、2、3 所示。

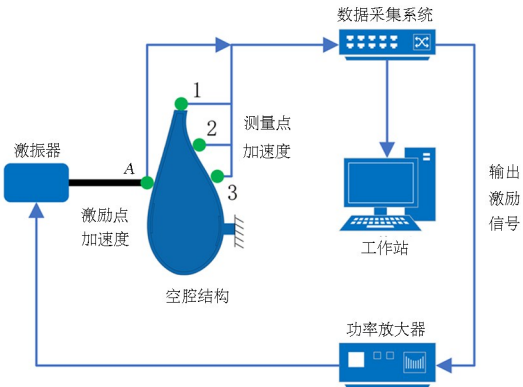


图 6 实验系统

Fig. 6 Experiment system

实验中通过激振器对试验件施加大小为 0.2N 的正弦激励,扫频速度为 0.05oct/min;未优化的

叶片空腔试验件的扫频范围为 20~120Hz,优化后的叶片空腔试验件扫频范围为 50~150Hz.

3.2 实验结果与分析

未优化的叶片结构实验结果如图 7 所示,优化后的叶片结构实验结果如图 8 所示. 其中,图 7 和图 8 的(a)、(b)、(c)子图分别表示图 6 中 1、2、3 点测得的加速度数据,图 7 和图 8 的(d)图表示测得的相位图. 由于试验件的表面是光滑的弧形,三个位置的加速度传感器不能测量同一方向的数据,因

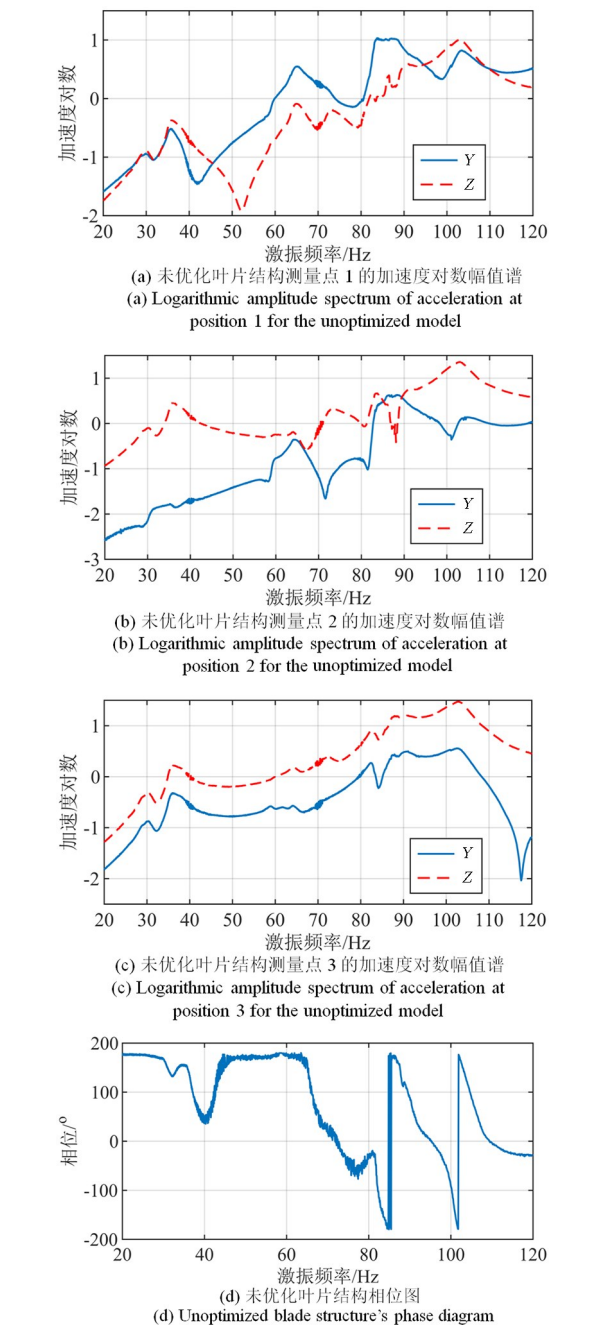


图 7 未优化叶片结构测量点加速度对数幅值谱和相位图  
Fig. 7 Unoptimized blade structure's logarithmic amplitude spectrum of acceleration and phase diagram

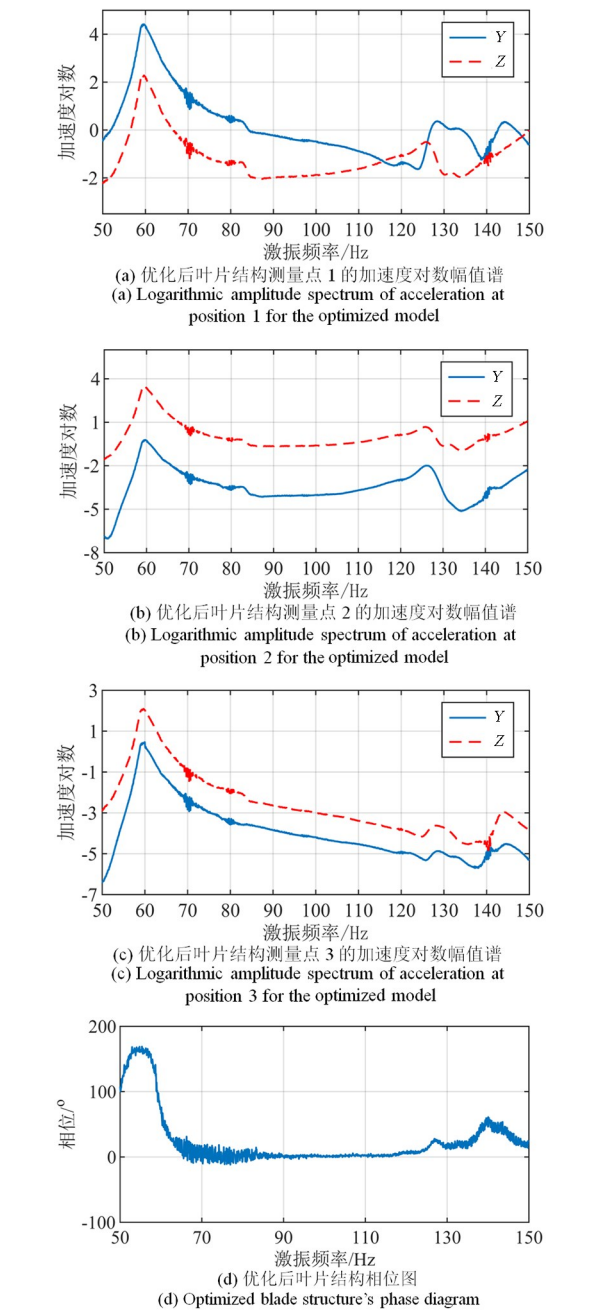


图 8 优化后叶片结构测量点加速度对数幅值和相位图  
Fig. 8 Optimized blade structure's logarithmic amplitude spectrum of acceleration and phase diagram

此本节的实验数据中 Y 方向表示试验件蒙皮的切向,Z 方向表示垂直于蒙皮的方向. 通过加速度幅值图和相位图得到优化前后的叶片结构试验件的前四阶共振频率,如表 3 所示.

优化前叶片空腔结构的前 4 阶共振频率分别为 29.92Hz、35.73Hz、63.97Hz、73.05Hz;优化后的前 4 阶共振频率分别增加到了 59.67Hz、83.61Hz、128.63Hz、144.22Hz;前四阶共振频率均有较大提升,提升幅度分别为 99.43%、134.01%、101.08%、97.56%. 试验件测得的前四阶共振频率分布规律

表 3 优化前后试验件前四阶共振频率  
Table 3 The first four resonance frequencies of the blade structure before and after optimization

响应频率/Hz	优化前	优化后	变化幅度
1st frequency	29.92	59.67	99.43%↑
2nd frequency	35.73	83.61	134.01%↑
3rd frequency	63.97	128.63	101.08%↑
4th frequency	73.05	144.22	97.56%↑

和仿真结果相同,即一、二阶频率值接近,三、四阶频率值接近,且两组频率之间相差较远;但是,前四阶共振频率提升幅度和仿真结果不同,试验件前四阶模态频率的提升幅度比较接近。

对比表 2 和表 3 可以发现,实验测得的前四阶共振频率变化幅度没有 ANSYS 仿真结果大,分析可能原因如下:(1)实验与仿真的材料不同. 仿真选择了更符合实际的结构钢作为叶片结构材料,但是为了方便打印,试验件使用的材料为 ABS 树脂,它的弹性模量和密度均比结构钢小很多,因此得到了较小的共振频率;(2)实验与仿真的结构尺寸不同. 实验中,为了更容易地测量试验件的共振频率,将模型横截面放大了 1.67 倍、展长放大了两倍,材料相同的情况下会增大结构的质量,导致共振频率降低;(3)实验与仿真的边界条件不同. 由于实验室难以让叶片结构在自由边界条件下开展试验,选择在压力侧主梁处添加固支约束,从而得到不一样的结果;(4)实验测量的误差. 实验测量时,附加的加速度传感器会因为自重对实验结果造成影响。

4 结论

本文基于变密度法建立了叶片结构频率拓扑优化数学模型,以最大化第一阶模态频率(即呼吸振动频率)为目标函数,对叶片结构的腹板布局进行优化设计,在保持优化前后质量不变的情况下,得到了全新的腹板布局设计. 采用 ANSYS 仿真分析和振动测试实验的方法对优化前后叶片结构的前四阶频率进行对比,仿真和实验结果均表明:经过拓扑优化设计后的叶片结构前四阶共振频率均得到了显著提升,可以有效抑制叶片结构在低频下极易发生的呼吸振动。

参考文献

[1] 朱杰,马东方,张家亮,等. 基于拓扑与尺寸优化

的风力机叶片轻量化设计[J]. 宁波大学学报(理工版), 2021, 34(6): 67—73.

ZHU J, MA D F, ZHANG J L, et al. Lightweight design of wind turbine blade based on topology and size optimization [J]. Journal of Ningbo University (Natural Science & Engineering Edition), 2021, 34(6): 67—73. (in Chinese)

[2] YANG X Q, SUN J L, JIN D P. Web layout design of large cavity structures based on topology optimization [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2024, 138(3): 2665—2689.

[3] 吴一帆,郑百林,杨彪. 考虑鸟撞的航空发动机叶片动态拓扑优化设计[J]. 航空动力学报, 2018, 33(8): 1923—1932.

WU Y F, ZHENG B L, YANG B. Topological optimization design of aero-engine blade considering bird strike [J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(8): 1923—1932. (in Chinese)

[4] 张大义,张嵩,付俭伟,等. 转子叶片缘板阻尼结构设计方法[J]. 航空动力学报, 2018, 33(4): 961—968.

ZHANG D Y, ZHANG S, FU J W, et al. Design method for the under platform damper of rotor blade [J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(4): 961—968. (in Chinese)

[5] 李琳,马皓晔,范雨,等. 用于叶片减振的压电材料分布拓扑优化[J]. 航空动力学报, 2019, 34(2): 257—266.

LI L, MA H Y, FAN Y, et al. Topological optimization of piezoelectric materials on the blades for vibration reduction of bladed disks [J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(2): 257—266. (in Chinese)

[6] DU J B, OLHOFF N. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2007, 34(2): 91—110.

[7] SUN J L, JIN D P, HU H Y. Deployment dynamics and topology optimization of a spinning inflatable structure [J]. Acta Mechanica Sinica, 2022, 38(10): 122100.

[8] 苗晓婷,许泉,刘广,等. 基于变密度法的飞行器升力面结构多目标拓扑优化设计[J]. 动力学与控制学报, 2014, 12(3): 253—258.

MIAO X T, XU Q, LIU G, et al. Multi-objective topology optimization design method based on penal-

ized density theory for aircraft lifting-surface [J]. Journal of Dynamics and Control, 2014, 12(3): 253—258. (in Chinese)

[9] 阎军, 张晨光, 霍思旭, 等. 宽弦风扇叶片空腔结构多目标轻量化设计[J]. 航空科学技术, 2021, 32(4): 60—64.

YAN J, ZHANG C G, HUO S X, et al. Multi-objective lightweight design of the cavity structure of wide-chord fan blades [J]. Aeronautical Science & Technology, 2021, 32(4): 60—64. (in Chinese)

[10] RIETZ A. Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 21(2): 159—163.

[11] DA D C, XIA L, LI G Y, et al. Evolutionary topology optimization of continuum structures with smooth boundary representation [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018, 57(6): 2143—2159.

[12] ANDREASSEN E, CLAUSEN A, SCHEVENELS M, et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 43(1): 1—16.