

两自由度气动弹性系统亚临界颤振的时滞控制

瞿思雨¹ 刘豪杰^{1†} 高秀敏² 黄锐¹

(1. 南京航空航天大学 航空学院, 南京 210016)

(2. 南京工业大学 数理科学学院, 南京 211816)

摘要 因气动或结构非线性因素所引发的亚临界颤振,使得飞行器在低于线性颤振临界速度时发生极限环振荡,导致机载设备振动环境恶化、飞行控制性能下降等问题,给飞行安全造成隐患. 本文针对带有俯仰刚度非线性的两自由度二元翼段,设计了基于俯仰速度反馈的亚临界颤振时滞控制器. 首先,基于拉格朗日原理建立了两自由度二元翼段的非线性气动弹性数学模型,利用 MATCONT 数值软件获得了系统的亚临界颤振分岔特性. 然后,利用多尺度法得到了带有时滞俯仰速度反馈的闭环控制系统近似解析解,通过稳定性切换理论得到了系统颤振的稳定边界,获得了亚临界颤振时滞控制器的参数范围. 最后,通过不同风速下非线性气动弹性系统的闭环数值仿真,验证了所设计亚临界颤振时滞控制器的有效性. 数值仿真结果表明,基于俯仰速度反馈的气动弹性时滞控制器可以将亚临界颤振转换为有益的超临界颤振,且大幅降低极限环幅值.

关键词 机翼颤振, 多尺度法, 非线性, 时滞反馈控制

中图分类号:O322;V215.34

文献标志码:A

Time-Delay Control of Subcritical Flutter in Two-Degree-of-Freedom Aeroelastic System

Qu Siyu¹ Liu Haojie^{1†} Gao Xiumin² Huang Rui¹

(1. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

(2. School of Physical and Mathematical Sciences, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, China)

Abstract Subcritical flutter caused by aerodynamic or structural nonlinear factors causes limit cycle oscillation in aircraft below the linear flutter critical velocity. This phenomenon leads to deteriorations in the vibration environment of airborne equipment, degradation of flight control performance and other problems, posing a hidden danger to safe flight within the flight envelope. In this paper, a subcritical flutter time-delay feedback controller based on pitching velocity signal is designed for a 2-DOF wing section with nonlinear stiffness in pitch degree of freedom. At first, a nonlinear aeroelastic mathematical model of a 2-DOF wing section is established by using Lagrange principle. Then, the method of multiple scales is used to derive the analytical solution of the closed-loop control system with time-delay pitching velocity feedback. Subsequently, the stability boundary of the flutter system is determined through stability switching theory, providing the parameter range for the subcritical flutter delay controller. Finally, the effectiveness of this subcritical flutter time-delay feedback controller is verified through closed-loop numerical simulations of nonlinear aeroelastic systems under various wind speeds. The simulation results demonstrate that an aeroelastic time-delay feedback controller based on pitching velocity signal

can convert subcritical flutter into beneficial supercritical flutter and significantly reducing limit cycle amplitudes.

Key words wing flutter, method of multiple scales, nonlinear, time-delay feedback control

引言

飞行器颤振是由于气动力、弹性力和惯性力相互耦合而产生的气动弹性失稳现象,包括线性颤振和非线性颤振两类^[1-3].当飞行器以超过临界颤振速度飞行时,线性颤振系统的结构响应随时间增加而发散.由于气动或结构非线性因素的存在,非线性颤振系统的动力学行为更为复杂,可以划分为亚临界和超临界颤振两类.当飞行速度超过线性颤振临界速度时,飞行器的气动弹性响应不会发散,而是维持一定幅值的极限环振荡(Limit Cycle Oscillation, LCO),该现象称为超临界颤振^[4-6].非线性因素可能导致飞行器在低于线性颤振临界速度时就发生极限环运动,称为亚临界颤振^[7-11].对于飞行器结构而言,与良性的超临界颤振不同,亚临界颤振给飞行包线内的安全飞行造成严重威胁.

为了有效控制亚临界颤振,研究人员开展了非线性气动弹性主动控制的诸多研究. Ding^[12]应用 Wash-out 滤波器技术对具有立方非线性俯仰刚度的二元机翼实施控制,将二元机翼系统的亚临界颤振转变为超临界颤振. Ghommem 等^[13]发现线性反馈控制策略可以抑制极限环振荡的幅值,而非线性控制策略可以将亚临界颤振转换为超临界颤振. Guo 等^[14]应用了含有立方刚度的 NES 装置来抑制两自由度机翼耦合 NES 系统的极限环颤振,并揭示了 NES 结构参数对系统颤振分岔行为的影响. Shukla 等^[15]设计了一种非线性状态反馈控制器,将机翼的亚临界颤振转换为超临界颤振,并利用多目标优化方法确定控制器有关参数. Jia 等^[16]提出了一种基于数据驱动的最优控制器,该控制策略避免了由机翼建模产生的误差和系统不确定性的影响,并能有效减小机翼极限环运动幅值. Darabseh^[17]结合卡尔曼滤波器设计了基于状态相关黎卡提方程方法的控制器,对具有三次结构非线性的二元机翼亚临界颤振实施控制.然而,上述研究均忽略了控制回路中的时滞影响.

事实上,由于执行器、传感器和控制器的动态

特性,飞行器的控制回路中存在难以避免的时间延迟^[18-20].已有研究结果表明,控制回路中的时滞显著影响气动弹性闭环系统稳定性^[21,22],适当引入时滞可以有效提高控制效率^[23]. Ramesh^[24]将时滞反馈控制应用于二元机翼颤振抑制问题,利用俯仰运动作为反馈信号设计了控制系统,通过数值仿真验证了控制效果. Yuan 等^[25]基于中心流形法和范式理论对二维机翼气动弹性系统中的时滞动力学问题进行了分析,研究表明时滞可以改变系统的分岔行为并影响系统的稳定性. Librescu 等^[26]运用 Pontryagin 方法结合 Stepan 定理对气动弹性系统反馈控制中的时滞进行了研究,发现时滞对颤振边界和系统响应有显著影响. Marzocca 等^[27]研究了气动弹性系统线性或非线性的反馈控制中的时滞效应,发现在输入和执行器之间的时滞可能降低系统控制性能,一定概率导致系统不规则运动. Zhao^[28]研究了反馈控制回路中具有单个或多个时滞的二自由度气动弹性系统的稳定性,证明了受控气动弹性系统的时滞独立稳定区域占据参数空间的一个小区域,且仅在流速小于开环系统颤振速度时存在. Yu 等^[29]针对二维超声速升力面,研究了反馈控制中时滞对系统颤振边界的影响,发现引入俯仰运动方向的时滞有利于改变系统颤振分岔特性. Luo^[30]利用滑模控制方法研究了二维翼型颤振的时滞反馈控制,仿真结果表明控制系统中不考虑时滞可能会导致控制失效,并且滑模控制方法在时滞量较小或较大时均能有效抑制翼型的颤振. Sinou^[31]以二维翼型时滞控制系统为研究对象,通过数值模拟分别讨论了线性二次控制器和极点配置控制器的优缺点.需要注意的是,上述研究多集中于线性气动弹性系统的时滞控制器设计,不能够解决由非线性引发的复杂现象.

本文首先建立了带有俯仰刚度非线性的两自由度二元翼段气动弹性数学模型,利用 MATCONT 数值软件研究了颤振分岔特性.在此基础上,将俯仰速度作为反馈信号,采用多尺度法设计了亚临界颤振的时滞反馈控制器.数值仿真结果表

明,基于俯仰速度反馈的非线性时滞控制器能改善两自由度气弹系统的稳定性,将原先的亚临界颤振转换为幅值较小的超临界颤振。

1 动力学建模及颤振特性分析

二元机翼的简化模型如图 1 所示. b 是机翼的半弦长,刚心距离翼弦中点为 $\bar{a}b$, $\bar{a}$ 为翼弦中点到刚心的距离占半弦长的百分比. x_α 是刚心到质心的距离, h 和 α 分别表示机翼沉浮运动和俯仰运动方向上的位移。

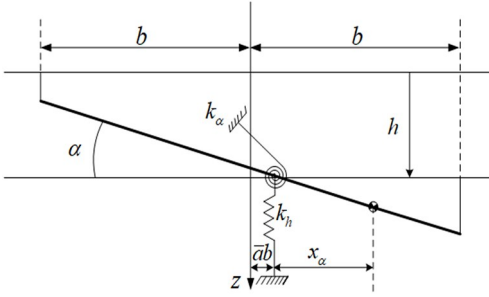


图 1 二元机翼简化模型

Fig. 1 Sketch of a two-dimensional airfoil section model

根据拉格朗日原理,含刚度非线性的二元机翼运动方程为^[32]

$$\begin{aligned} m_T \ddot{h} + m_W x_a b \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + k_h h &= -L(\alpha, h, \dot{\alpha}, \dot{h}) \\ m_W x_a b \ddot{h} + I_a \ddot{\alpha} + c_a \dot{\alpha} + k_a(\alpha) \alpha &= M(\alpha, h, \dot{\alpha}, \dot{h}) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 L 和 M 是作用在系统上的气动升力和力矩, c_h 和 c_a 为阻尼系数, m_W 表示机翼的质量, m_T 为系统总质量, k_h 和 k_a 为刚度系数. 非线性俯仰刚度 k_a 表达式为

$$k_a(\alpha) = k_{a_0} + k_{a_1} \alpha + k_{a_2} \alpha^2 \quad (2)$$

气动力模型^[15]可以表示为

$$\begin{aligned} L &= \rho U^2 b C_{L_a} \alpha_{\text{eff}} \\ M &= \rho U^2 b^2 C_{M_a} \alpha_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\alpha_{\text{eff}} = \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{U} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \frac{\dot{\alpha}}{U} \right] \quad (4)$$

公式(3)中 U 表示自由来流速度, C_{L_a} 和 C_{M_a} 是升力和力矩关于俯仰角 α 的气动力系数. 将气动力表达式(3)代入式(1),并写成状态方程形式有

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(U) \mathbf{X} + \mathbf{Q}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}) \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{X} = [h \quad \alpha \quad \dot{h} \quad \dot{\alpha}]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 U^2 - p_1 & -c_1 - d_1 U & -c_2 - d_2 U \\ -k_3 & -k_4 U^2 - q_1 & -c_3 - d_3 U & -c_4 - d_4 U \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_2 \alpha^2 \\ q_2 \alpha^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_3 \alpha^3 \\ q_3 \alpha^3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

上述矩阵向量中的参数具体表达式见附录. 对于上述系统,可以考察开环系统矩阵 $\mathbf{A}(U)$ 的特征值随来流速度的变化以确定二元机翼系统的线性临界颤振速度. 图 2 展示了随来流速度改变系统方程的根轨迹变化规律,在来流速度较低时,系统方程的特征值都在虚轴的左侧. 然而,随来流速度的进一步增加,一对共轭特征值穿过虚轴. 此时,实部为 0 的特征值对应的来流速度即为线性颤振临界速度 $U_g = 9.1242 \text{ m/s}$, 计算所用的系统参数见附表 1.

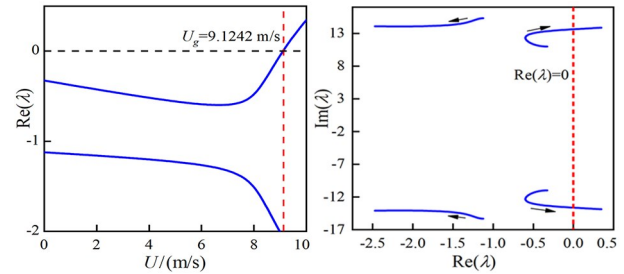


图 2 二元机翼系统的根轨迹图

Fig. 2 Root locus plot for the two-dimensional airfoil system

为了证明亚临界颤振的存在,采用龙格库塔法求解系统来流速度小于线性临界颤振速度 $U = 0.8U_g$ 时的时域响应,数值计算的系统初始条件为 $\mathbf{X}_0 = [0.01 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0]^T$. 系统颤振时域响应和相位关系如图 3 所示,在小于线性临界颤振速度时系统就做幅值稳定的极限环运动。

数值方法已然可以证明含刚度非线性的二元机翼系统存在亚临界颤振现象,但无法得到来流速度与亚临界颤振的定性关系. 因此,可以利用数值软件 MATCONT 做进一步分析. 开环系统振荡幅值随来流速度的变化规律如图 4 所示,将 MATCONT 得到的系统颤振幅值与数值方法计算得到的振幅进行比较. 可知在这一初始条件下,系统亚临界颤振的起始速度为 $U = 6.2942 \text{ m/s}$, 且 MATCONT 数值软件可以准确预测系统的亚临界颤振。

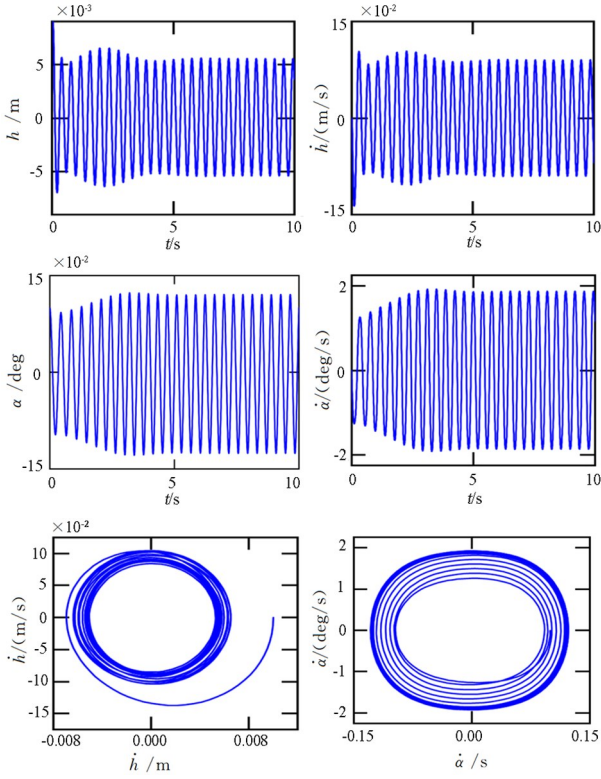
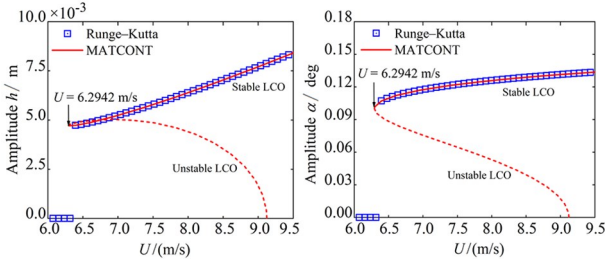
图 3 机翼颤振响应图($U=0.8U_g$)Fig. 3 Wing flutter response diagram ($U=0.8U_g$)

图 4 系统颤振分岔图

Fig. 4 The bifurcation diagram of the flutter system

2 时滞反馈控制

在以往的机翼控制模型中,大多没有考虑时滞的影响,因此反馈控制体现的是系统过去的状态.本节针对系统方程(5)描述的气动弹性系统,通过时滞反馈控制来抑制系统的亚临界颤振.基于上述得到开环系统方程,引入含时滞的反馈控制项 $u[Y(t-\tau)]$,闭环控制系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(U)\mathbf{X} + \mathbf{Q}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}) + u[\mathbf{Y}(t-\tau)] \quad (9)$$

为了抑制系统的亚临界颤振,以机翼俯仰速度作为反馈信号,设计了如下所示的含时滞的三次非线性反馈控制律

$$u[\mathbf{Y}(t-\tau)] = \mathbf{C}_1[\dot{\mathbf{X}}(t-\tau), \dot{\mathbf{X}}(t-\tau), \dot{\mathbf{X}}(t-\tau)] \quad (10)$$

含时滞的三次非线性反馈控制项具体为

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_1[\dot{\mathbf{X}}(t-\tau), \dot{\mathbf{X}}(t-\tau), \dot{\mathbf{X}}(t-\tau)] \\ &= \begin{bmatrix} g_l \dot{\alpha}^3(t-\tau) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

其中, g_l 为控制增益.

本节主要采用多尺度法(Method of Multiple Scales, MMS)研究含时滞的非线性反馈控制效果,对于上述含三次非线性的系统,设方程(9)的多尺度解为

$$\mathbf{X} = \epsilon \boldsymbol{\eta}_1(T_0, T_2) + \epsilon^2 \boldsymbol{\eta}_2(T_0, T_2) + \epsilon^3 \boldsymbol{\eta}_3(T_0, T_2) \quad (12)$$

对时滞项展开有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t-\tau) &= \epsilon \boldsymbol{\eta}_1(T_0 - \tau, T_2) - \epsilon^3 \tau D_2 \boldsymbol{\eta}_1(T_0 - \tau, T_2) \\ &+ \epsilon^2 \boldsymbol{\eta}_2(T_0 - \tau, T_2) + \epsilon^3 \boldsymbol{\eta}_3(T_0 - \tau, T_2) \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$T_n = \epsilon^n t \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

对时间的微分可表示为如下形式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

进一步可得 $\dot{\mathbf{X}}$ 和 $\dot{\mathbf{X}}(t-\tau)$ 的多尺度解表达式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \epsilon D_0 \boldsymbol{\eta}_1 + \epsilon^3 D_2 \boldsymbol{\eta}_1 + \epsilon^2 D_0 \boldsymbol{\eta}_2 + \epsilon^3 D_0 \boldsymbol{\eta}_3 \\ \dot{\mathbf{X}}(t-\tau) &= \epsilon D_0 \boldsymbol{\eta}_1(T_0 - \tau, T_2) - \epsilon^3 \tau D_0 D_2 \boldsymbol{\eta}_1(T_0 - \tau, T_2) \\ &+ \epsilon^3 D_2 \boldsymbol{\eta}_1(T_0 - \tau, T_2) + \epsilon^2 D_0 \boldsymbol{\eta}_2(T_0 - \tau, T_2) + \epsilon^3 D_0 \boldsymbol{\eta}_3(T_0 - \tau, T_2) \end{aligned} \quad (16)$$

定义来流速度表达式为 $U = U_g + \epsilon^2 \sigma_g U_g$, 摄动系统矩阵 $\mathbf{A}(U) \rightarrow \epsilon^2 \mathbf{A}(U)$. 将式(12)、(15)和(16)代入式(9)中,比较 ϵ 的同次幂,得到如下所示的一系列微分方程

ϵ^1 :

$$D_0 \boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{A}(U_g) \boldsymbol{\eta}_1 = 0 \quad (17)$$

ϵ^2 :

$$D_0 \boldsymbol{\eta}_2 - \mathbf{A}(U_g) \boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1) \quad (18)$$

ϵ^3 :

$$D_0 \boldsymbol{\eta}_3 - \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}_3 = -D_2 \boldsymbol{\eta}_1 + \sigma_g \mathbf{B} \boldsymbol{\eta}_1 + 2\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) +$$

$$C(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1) + C[\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t-\tau), \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t-\tau), \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t-\tau)] \quad (19)$$

其中矩阵 $\mathbf{B}$ 表达式为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2k_2 U_g^2 & -d_1 U_g & -d_2 U_g \\ 0 & -2k_4 U_g^2 & -d_3 U_g & -d_4 U_g \end{pmatrix} \quad (20)$$

根据微分方程求解原理可知,式(17)的解为系统矩阵 $\mathbf{A}(U_g)$ 的四个特征值对应的线性无关解的叠加. 参考前一节的计算结果,可知系统矩阵 $\mathbf{A}(U_g)$ 的四个特征值为两个共轭虚数和两个含有负实部的复数. 由于两个实部为负的特征值对应的解,随时间 T 的增加趋近于零,所以式(17)的通解表达式可以将其忽略,进而表达为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = A_1 e^{i\omega_1 T_0} \mathbf{p}_1 + cc \quad (21)$$

式中, cc 表示多项式的共轭项, ω 和 $\mathbf{p}$ 为下式的解

$$i\omega \mathbf{p} = \mathbf{A} \mathbf{p} \quad (22)$$

将式(21)代入式(18)得

$$D_0 \boldsymbol{\eta}_2 - \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}_2 = A_1^2 \mathbf{Q}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) e^{2i\omega_1 T_0} + 2A_1 \bar{A}_1 \mathbf{Q}(\mathbf{p}_1, \bar{\mathbf{p}}_1) + \bar{A}_1^2 \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_1) e^{-2i\omega_1 T_0} \quad (23)$$

设解 $\boldsymbol{\eta}_2$ 为

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \zeta_1 A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} + \bar{\zeta}_1 \bar{A}_1^2 e^{-2i\omega_1 T_0} + 2\zeta_2 A_1 \bar{A}_1 \quad (24)$$

代入原方程可得各参数的表达式为

$$\begin{aligned} (2\omega_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \boldsymbol{\zeta}_1 &= \mathbf{Q}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) \\ -\mathbf{A} \boldsymbol{\zeta}_2 &= \mathbf{Q}(\mathbf{p}_1, \bar{\mathbf{p}}_1) \end{aligned} \quad (25)$$

把式(24)和式(21)代入式(19)有

$$\begin{aligned} D_0 \boldsymbol{\eta}_3 - \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}_3 &= [-D_2 A_1 \mathbf{p}_1 + \sigma_g \mathbf{B} A_1 \mathbf{p}_1 + 4\mathbf{Q}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\zeta}_2) A_1^2 \bar{A}_1 + 2\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{p}}_1, \boldsymbol{\zeta}_1) A_1^2 \bar{A}_1 + 3C(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \bar{\mathbf{p}}_1) A_1^2 \bar{A}_1 + 3i\omega_1^3 \mathbf{C}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \bar{\mathbf{p}}_1) A_1^2 \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 \tau}] e^{i\omega_1 T_0} + cc + NST \end{aligned} \quad (26)$$

其中 NST 表示不含永年项的项. 为避免永年项的影响,引入归一化方程 $\mathbf{z}^T \mathbf{p} = 1$ 有

$$(-D_2 A_1 + \mathbf{B}_1 A_1 + \Delta_1 A_1^2 \bar{A}_1 + iN_1 A_1^2 \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 \tau}) = 0 \quad (27)$$

其中 $\mathbf{z}$ 可求解方程(28)得到

$$\mathbf{A}^T(U_g) \mathbf{z} = i\omega \mathbf{z} \quad (28)$$

方程(27)中的系数表达式如下

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \mathbf{z}^T (4\mathbf{Q}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\zeta}_2) + 2\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{p}}_1, \boldsymbol{\zeta}_1) + 3C(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \bar{\mathbf{p}}_1)) \end{aligned} \quad (29)$$

$$N_1 = 3\omega_1^3 \mathbf{C}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \bar{\mathbf{p}}_1),$$

$$B_1 = \sigma_g \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{p}_1 \quad (30)$$

在上式中将 A_1 写成指数形式

$$A_1 = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} \quad (31)$$

式中, α 和 β 都是关于 T 的函数,将式(31)代入式(27)并分离实部和虚部,得到如下的微分方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{a} - \frac{1}{2} B_{1r} a - \frac{1}{8} \Delta_{1r} a^3 - \frac{1}{8} N_{1r} \sin(\omega_1 \tau) a^3 + \frac{1}{8} N_{1i} \cos(\omega_1 \tau) a^3 &= 0 \\ \frac{1}{2} \dot{\beta} a - \frac{1}{2} B_{1i} a - \frac{1}{8} \Delta_{1i} a^3 - \frac{1}{8} N_{1r} \cos(\omega_1 \tau) a^3 - \frac{1}{8} N_{1i} \sin(\omega_1 \tau) a^3 &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

根据式(32)可得闭环控制系统的一阶近似解表达为

$$y = a \cos(\omega t + \beta) \quad (33)$$

代入临界稳定条件 $\dot{a} = 0$ 到方程(32)可得

$$\begin{aligned} B_{1r} a_s + \frac{1}{4} \Delta_{1r} a_s^3 + \frac{1}{4} N_{1r} \sin(\omega_1 \tau) a_s^3 - \frac{1}{4} N_{1i} \cos(\omega_1 \tau) a_s^3 &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

a_s 为临界稳定状态的幅值. 求解式(34)可得

$$a_s = 0, a_s = \pm \sqrt{\frac{-4B_{1r}}{N_r}} \quad (35)$$

其中

$$N_r = \Delta_{1r} + N_{1r} \sin(\omega_1 \tau) - N_{1i} \cos(\omega_1 \tau) \quad (36)$$

根据稳定性切换理论可知,当 $da/da > 0$ 系统出现不稳定的极限环现象,即亚临界颤振,当 $da/da < 0$ 时,系统做超临界颤振.

$$\left. \frac{da}{da} \right|_{a=a_s} = -2B_{1r} \quad (37)$$

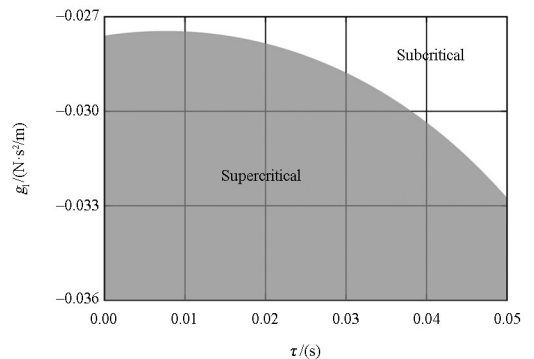


图5 颤振系统的临界稳定曲线

Fig. 5 Critical stability curves of the flutter system

根据式(37)和式(35),若 $B_{1r} < 0, N_r > 0$, 此时系统不稳定,即为亚临界颤振;若 $B_{1r} > 0, N_r < 0$, 系统稳定,为超临界颤振. 因此,利用式(37)可以求得系统颤振稳定边界如图 5 所示.

3 算例与分析

在进行时滞控制分析之前,首先对式(32)和式(33)得到的系统多尺度一次近似解进行验证. 控制参数从得到的系统稳定区间选取,控制增益 $g_l = -0.2 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$, 时滞 $\tau = 0.005 \text{ s}$. 利用 dde23 求解器求解式(9)得到闭环系统的数值积分解,并与多尺度得到的一次近似解析解对比,结果如图 6 所示. 解析解与数值解吻合良好,这表明多尺度法推导过程是正确的.

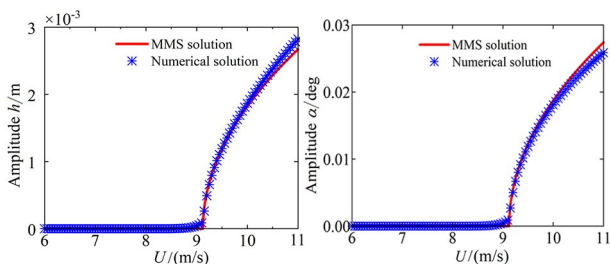


图 6 不同风速下闭环系统幅值响应对比图

Fig. 6 Comparison between the approximate solutions and the numerical solutions under different wind speeds

验证解析解的正确性后,可由式(37)得到的系统颤振稳定边界,研究非线性控制增益和时滞对系统稳定性的影响. 分别从亚临界颤振区域和超临界区域选取两组参数进行验证. 如无特别说明,下文中的分析图中蓝色曲线代表超临界解,红色曲线代表亚临界解,选取的时滞量 τ 为 0.005 s . 在不同控制参数和自由风速下,系统俯仰运动和沉浮运动的振荡幅值对比如图 7 所示,稳定的控制参数使得系统的亚临界颤振完全转变为超临界颤振,同时大幅减小了稳定极限环运动的幅值,而在不稳定的控制参数下,系统亚临界颤振依旧存在.

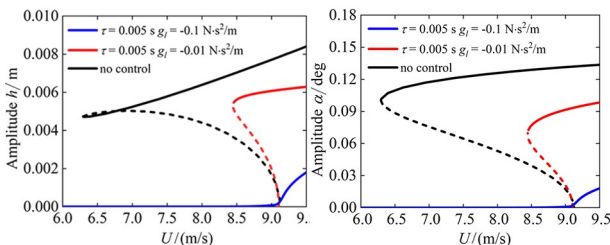


图 7 不同风速下闭环控制系统幅值对比图

Fig. 7 Amplitude comparison diagram of closed-loop control system under different wind speeds

基于上述结果,图 8 给出了风速小于临界颤振速度时($U=8.5 \text{ m/s}$),闭环控制系统在不同控制参数下的时域响应. 在稳定的控制参数下,系统受到扰动后,机翼沉浮和俯仰方向的振荡幅值都逐渐减小,最终保持静止状态. 而在不稳定的控制参数下,系统两个自由度方向都持续振荡. 根据上述对比验证结果可知,选取适当参数的时滞反馈控制器,能使原系统避免低于线性临界颤振速度时的不良极限环运动,且受扰动后系统收敛速度较好.

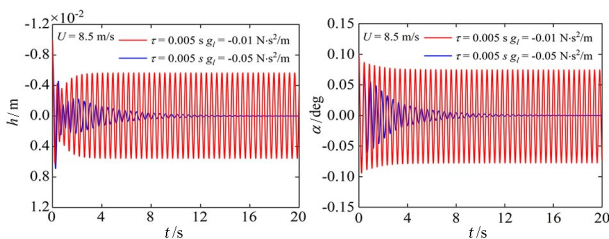


图 8 闭环控制系统响应对比图

Fig. 8 Response comparison diagram of the closed-loop control system

4 结论

本文建立了带有俯仰刚度非线性的二元翼段气动弹性模型,利用数值软件 MATCONT 得到了系统的亚临界颤振分岔特性. 为了设计亚临界颤振时滞控制器,采用多尺度法和稳定性切换理论,得到了基于俯仰速度反馈的含时滞闭环气动弹性系统亚临界颤振和超临界颤振的稳定边界. 通过数值仿真可知,该亚临界颤振时滞控制器能有效地将亚临界颤振转换为超临界颤振,并能显著减小极限环运动的幅值. 本文的研究成果可以为非线性气动弹性系统的时滞控制律设计提供理论指导,具有一定意义.

参考文献

- [1] LI H, EKICI K. A novel approach for flutter prediction of pitch-plunge airfoils using an efficient one-shot method [J]. Journal of Fluids and Structures, 2018, 82: 651—671.
- [2] 张惠, 杨智春, 张新平, 等. 结构参数对机翼非线性颤振系统混沌运动特性的影响[J]. 振动与冲击, 2013, 32(12): 174—178+184.
- ZHANG H, YANG Z C, ZHANG X P, et al. Effects of structural parameters on chaotic motion behavior of nonlinear flutter for a two dimensional wing [J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32

- (12): 174—178+184. (in Chinese)
- [3] 黄锐, 胡海岩. 飞行器非线性气动伺服弹性力学[J]. 力学进展, 2021, 51(3): 428—466.
HUANG R, HU H Y. Nonlinear aeroservoelasticity of aircraft [J]. *Advances in Mechanics*, 2021, 51(3): 428—466. (in Chinese)
- [4] CHEN F X, LIU J K, CHEN Y M. Flutter analysis of an airfoil with nonlinear damping using equivalent linearization [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2014, 27(1): 59—64.
- [5] SHEN S F. An approximate analysis of nonlinear flutter problems [J]. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1959, 26(1): 25—32.
- [6] CORRÊA R F, MARQUES F D. Influence of bistable plunge stiffness on nonlinear airfoil flutter [J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2021, 16(6): 061004.
- [7] LEE B H K, JIANG L Y, WONG Y S. Flutter of an airfoil with a cubic restoring force [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1999, 13(1): 75—101.
- [8] LIU L, WONG Y S, LEE B H K. Application of the centre manifold theory in non-linear aeroelasticity [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 234(4): 641—659.
- [9] YANG Z C, ZHAO L C. Analysis of limit cycle flutter of an airfoil in incompressible flow [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 123(1): 1—13.
- [10] GUO W L, XU Y, LI Y G, et al. Dynamic responses of a conceptual two-dimensional airfoil in hypersonic flows with random perturbations [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2023, 121: 103920.
- [11] WAYHS-LOPES L D, DOWELL E H, BUENO D D. A new look at the equivalent linearization technique to predict LCO in aeroelastic systems with discrete nonlinearities [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2023, 119: 103867.
- [12] DING Q, WANG D L. Flutter control of a two-dimensional airfoil using wash-out filter technique [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2005, 18(2): 130—137.
- [13] GHOMMEM M, NAYFEH A H, HAJJ M R. Control of limit cycle oscillations of a two-dimensional aeroelastic system [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, 13: 782457.
- [14] GUO H L, CHEN Y S, YANG T Z. Limit cycle oscillation suppression of 2-DOF airfoil using nonlinear energy sink [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, 34(10): 1277—1290.
- [15] SHUKLA H, PATIL M J. Nonlinear state feedback control design to eliminate subcritical limit cycle oscillations in aeroelastic systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88(3): 1599—1614.
- [16] JIA S, TANG Y, SUN J Q, et al. Data-driven active flutter control of airfoil with input constraints based on adaptive dynamic programming method [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2022, 28(13/14): 1804—1817.
- [17] DARABSEH T T. Nonlinear state dependent Riccati equation controller for 3-DOF airfoil with cubic structural nonlinearity [J]. *International Review of Aerospace Engineering*, 2022, 15(2): 97.
- [18] MAHMOUD M S. An overview of time-delay control systems [M]// KHOOBAN M H, DRAGICEVIC T. *Control strategy for time-delay systems*. [S. l.]: Academic Press, 2021: 1—82.
- [19] RICHARD J P. Time-delay systems; an overview of some recent advances and open problems [J]. *Automatica*, 2003, 39(10): 1667—1694.
- [20] ZHANG X M, HAN Q L, GE X H, et al. An overview of recent developments in Lyapunov-Krasovskii functionals and stability criteria for recurrent neural networks with time-varying delays [J]. *Neurocomputing*, 2018, 313(3): 392—401.
- [21] HU H Y, WANG Z H. *Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback* [M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002.
- [22] 孙中奎, 金晨. 时滞系统非线性动力学研究进展 [J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(8): 6—18.
SUN Z K, JIN C. Advances in nonlinear dynamics for delayed systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(8): 6—18. (in Chinese)
- [23] WANG Z H, HU H Y. Stability switches of time-delayed dynamic systems with unknown parameters [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 233(2): 215—233.
- [24] RAMESH M, NARAYANAN S. Controlling chaotic motions in a two-dimensional airfoil using time-delayed feedback [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239(5): 1037—1049.
- [25] YUAN Y, YU P, LIBRESCU L, et al. Aeroelasticity of time-delayed feedback control of two-dimensional supersonic lifting surfaces [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(5): 795—803.

[26] LIBRESCU L, MARZOCCA P, SILVA W A. Aeroelasticity of 2-D lifting surfaces with time-delayed feedback control [J]. Journal of Fluids and Structures, 2005, 20(2): 197–215.

[27] MARZOCCA P, LIBRESCU L, SILVA W A. Time-delay effects on linear/nonlinear feedback control of simple aeroelastic systems [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2005, 28(1): 53–62.

[28] ZHAO Y H. Stability of a two-dimensional airfoil with time-delayed feedback control [J]. Journal of Fluids and Structures, 2009, 25(1): 1–25.

[29] YU P, CHEN Z, LIBRESCU L, et al. Implications of time-delayed feedback control on limit cycle oscillation of a two-dimensional supersonic lifting surface [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 304(3/4/5): 974–986.

[30] LUO M X, GAO M Z, CAI G P. Delayed full-state feedback control of airfoil flutter using sliding mode control method [J]. Journal of Fluids and Structures, 2016, 61: 262–273.

[31] SINOUE J J. Flutter instability and active aeroelastic control with time delay for a two-dimensional airfoil [J]. European Journal of Mechanics-A, 2022, 92: 104465.

[32] 赵永辉. 气动弹性力学与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 116–118.

ZHAO Y H. Aeroelastic mechanics and control [M]. Beijing: Science Press, 2007: 116–118. (in Chinese)

附录:

开环系统方程式(7)和式(8)中参数的具体表达式

$$d = m_{\text{T}} I_a - m_{\text{W}}^2 x_a^2 b^2, k_1 = \frac{I_a k_h}{d}, c_1 = \frac{I_a C_h}{d}$$
$$k_2 = \frac{I_a \rho b C_{L_a} + m_{\text{W}} x_a \rho b^3 C_{M_a}}{d}, c_2 = -\frac{m_{\text{W}} x_a b c_a}{d}$$
$$k_3 = -\frac{m_{\text{W}} x_a b k_h}{d}, c_3 = -\frac{m_{\text{W}} x_a b c_h}{d}$$
$$k_4 = -\frac{m_{\text{W}} x_a \rho b^2 C_{L_a} + m_{\text{T}} \rho b^2 C_{M_a}}{d}$$

$$d_1 = \frac{I_a \rho b C_{L_a} + m_{\text{W}} x_a \rho b^3 C_{M_a}}{d}, c_4 = \frac{m_{\text{T}} C_a}{d}$$
$$d_2 = \frac{(I_a \rho b^2 C_{L_a} + m_{\text{W}} x_a \rho b^4 C_{M_a})(0.5 - a)}{d}$$
$$p_1 = -\frac{m_{\text{W}} x_a b k_{a_0}}{d}$$
$$d_3 = -\frac{m_{\text{T}} \rho b^2 C_{M_a} + m_{\text{W}} x_a \rho b^2 C_{L_a}}{d}$$
$$d_4 = -\frac{(m_{\text{T}} \rho b^3 C_{M_a} + m_{\text{W}} x_a \rho b^3 C_{L_a})(0.5 - a)}{d}$$
$$p_2 = \frac{m_{\text{W}} x_a b k_{a_1}}{d}, p_3 = \frac{m_{\text{W}} x_a b k_{a_2}}{d}, q_3 = -\frac{m_{\text{T}} k_{a_2}}{d}$$
$$q_1 = \frac{m_{\text{T}} k_{a_0}}{d}, q_2 = -\frac{m_{\text{T}} k_{a_1}}{d}$$

附表 1 机翼参数
Table 1 Airfoil parameters

Parameters	Value	Units
a	−0.6847	—
m_{T}	12.387	kg
m_{W}	2.0490	kg
b	0.135	m
ρ	1.225	kg/m ³
x_a	$[0.0873 - (b + ab)]/b$	—
I_a	$m_{\text{W}} x_a^2 b^2 + 0.0517$	kg/m ²
Span	0.6	m
C_{L_a}	6.28	—
C_{M_a}	$(0.5 + a)C_{L_a}$	—
C_{L_β}	3.358	—
$C_{L_{\dot{\beta}}}$	−1.94	—
c_h	27.43	N·s/m
c_a	0.036	Ns
k_h	2844.4	N/m
k_{a_0}	6.833	N·m/rad
k_{a_1}	9.967	N·m/rad ²
k_{a_2}	667.685	N·m/rad ³