第 22 卷第 7 期
2024 年 7 月

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 22 No. 7
Jul. 2024

文章编号:1672-6553-2024-22(7)-059-011

DOI:10.6052/1672-6553-2024-026

柔性腿无缘轮黏滞—滑动过程的被动动态行走运动特性分析*

包晏名　张奇志†　周亚丽

(北京信息科技大学 自动化学院,北京　100192)

摘要　为了分析存在摩擦力情况下柔性腿无缘轮的运动步态,分析了柔性腿无缘轮黏滞与滑动两种运动状态相互转换的条件,通过拉格朗日第一类方程建立了系统的动力学模型,在建模时解除了单支撑阶段的切向约束条件,增加了摩擦力项以实现当摩擦力不足时的滑动状态建模.分析了不同摩擦因数下柔性腿无缘轮的运动步态情况,发现了最多可能产生 4 种运动行为.研究了不同步态对于系统能量的影响,并发现滑动的产生增加了系统在单支撑阶段的动能.利用 Newton-Raphson 迭代法和庞加莱映射发现了 4 种运动行为均存在不动点并且轨迹稳定,同时发现柔性腿无缘轮具有滑动的步态有着良好的鲁棒性.通过研究不同初始动能对系统滑动步态的影响,发现了系统动能或者角速度在一定的范围内存在一个极小的停滞区间,使得系统单支撑阶段在通过直立平衡面附近时会产生长时间的滑动,导致系统的不稳定.

关键词　被动行走,　柔性腿无缘轮,　黏滞—滑动,　库伦摩擦,　极限环

中图分类号:TP242.6　　**文献标志码**:A

Analysis of the Kinematic Characteristics of the Passive Dynamic Walking Stick-Slip Process of the Flexible Leg Rimless Wheel*

Bao Yanming　Zhang Qizhi†　Zhou Yali

(School of Automation, Beijing Information Science & Technology University, Beijing　100192, China)

Abstract　In order to analyze the motion gait of the flexible leg rimless wheel, the conditions for the transition between the two motion states of viscosity and sliding of the flexible leg rimless wheel were analyzed. The dynamic model of the system was established through the first-order Lagrange equation. During modeling, the tangential constraint condition during the single-support phase was removed, and the friction term was added to achieve the modeling of sliding state when the friction force was insufficient. The motion gait of the flexible leg rimless wheel under different friction coefficients was analyzed, and it is found that up to four possible motion behaviors could occur. The influence of different gaits on the energy of the system was studied, and it is found that the occurrence of sliding increased the kinetic energy of the system during the single-support phase. Using Newton-Raphson iteration method and Poincare mapping, it is found that all four motion behaviors had fixed points and stable trajectories, and it is also found that the gait with sliding of the flexible leg rimless wheel had good robustness. By studying the influence of different initial kinetic energy on the system's sliding gait, it is found that there is a very small stagnation interval when the kinetic energy or angular velocity of the system is within a certain range, which makes the single support stage of the system slide for a long time near the vertical equilibrium surface, resulting in instability of the system.

2024-01-10 收到第 1 稿,2024-03-18 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(12172059), National Natural Science Foundation of China(12172059).

† 通信作者 E-mail:zqzbim@163.com

Key words passive walking， flexible leg rimless wheels， stick-slip， coulomb friction， limit cycle

引言

早在1989年Mcgeer就提出了被动行走的概念[1]，并简要研究了一种无框车轮的二维运动[2]，如果将条件限制在二维则无缘轮是有周期性运动的，并提出建立在重力驱动的极限环是机器模拟人类行走的一种方法. Morawski的相关研究也证明了这一点[3]. 始于对人类行走动力学的兴趣Coleman团队[4]对六辐条无缘轮在三维条件下的稳定性进行了分析，并指出被动机械系统渐进稳定性的两个已知机制是散耗和非完整约束. Asano[5]以刚性无缘轮为模型，分析了加速度和减速度的变化对于步态稳定性的影响. 并设计了由两个相同的八条腿无缘轮组成的被动组合无缘轮[6]，通过控制在车身框架上质量块的上下运动研究了间接激励对于半被动行走的影响，最终通过高频率的振动产生频率夹带使得系统实现了相应的加速. 为了更贴近于人类的行走状态，Asano团队用具有黏弹性的伸缩腿代替了刚性腿[7]，使得无缘轮在行走过程中增加了双支撑阶段，并通过数值分析研究了单双支撑阶段的典型步态. 张奇志教授[8]在以上研究的基础上提出了用广义独立坐标建立的动力学模型，并对柔性腿的结构和物理性质进行分析，得到腿与地面的冲击阶段伸缩腿的切向发生冲击，而径向不传递冲击力的结论从而改进了碰撞时的冲击模型，提高了能量的利用率，使得模型更适合于人体行走研究，对研究被动动态行走机理和特征具有重要意义. 为了讨论被动动态行走摩擦力不足的情况，Gamus[9]在对刚性无缘轮在无滑动约束条件下能够稳定周期行走的坡度限制进行了数值分析之后，指出在某些特定条件下刚性无缘轮要保持与地面接触不滑动所需要的摩擦因数需求很高，在实践中很难实现，所以沿斜坡运动可能会演变为向前滑动，并分析出了在一定系统条件和有限的摩擦因数下具有黏滑过度的刚性无缘轮存在稳定的周期解. 由于在零速度附近的强非线性行为，黏滑摩擦的模拟十分困难，所以Karnopp[10]提出了一种直接表示和模拟摩擦效应的方法，并通过计算机模拟了机械动力学系统黏滑摩擦的基本模型. 对于摩擦接触的问题张洪武等[11]给出了基于NCP函数的非内点光滑化算法. 段文杰等[12]采用线性互补的方法研究了圆滑足被动行走器的支撑足与地面的摩擦因数对于行走步态的影响，分析出较大的摩擦因数有利于被动行走器实现稳定的步态行走. 郑鹏等[13]又研究了滚动摩阻对被动行走器的动力学行为影响，认为当摩擦因数减小到一定程度时，系统会产生混沌现象，并且当产生滑动时滚阻系数会对被动行走器某些动力学特性产生较大的影响. 对于含摩擦的空间多刚体系统的冲击问题，姚文莉等[14]分析了含滑动－黏滞的冲击过程，得到了受到打击的空间离散系统考虑库仑摩擦时的动力学的求解方法. Kato等[15]对实际机床导轨上运动元件在各种滑动条件下的黏滑运动进行了实验研究，阐明了黏滑运动的基本特征，并基于实验结果，具体研究了黏滑期静摩擦和滑动期动摩擦的特性，以阐明黏滑过程. 刑航等[16]以含非光滑柱铰链平面多刚体系统为研究对象，用LuGre摩擦模型描述柱铰链内的摩擦. 李国芳等[17]研究了一种以频率自驱动的两自由度含干摩擦无足系统的动力学模型，分析并描述了系统在不同的简谐激励作用下与地面间产生不同频率振动时的运动特性. 冯欣炜等[18]研究了一级小车倒立摆由起摆到稳摆的时滞切换控制，分析了时滞对系统瞬态时域性能的影响. 由于无缘轮也可以看作一种倒立摆，所以对于无缘轮的时滞研究同样很有意义，也是未来可能进行研究的方向.

关于被动行走的问题大部分都是基于假设支撑腿与地面接触无滑动而进行的研究，关于机械摩擦的研究也很少涉及被动行走，但是在实际的应用中摩擦力不可避免，采用不同摩擦因数产生的步态与无滑动的步态有着很大的差距，同样影响了控制算法与控制器的设计. 柔性腿无缘轮相较于刚性无缘轮在支撑腿上增加了新的变量，使得运动行为更为复杂. 为了建立与实际情况更贴合的模型，分析更真实的类人行走特征以及分析柔性腿被动无缘轮在各种复杂条件下的行走状态，本文在上述研究的基础上考虑了将Coulomb摩擦模型[19]引入动力学方程建模. 研究了柔性腿无缘轮黏滞－滑动状态的转换，分析了具有黏滞－滑动状态转换的柔性腿无缘轮的行走特点，并通过庞加莱映射分析了具有黏滞－滑动状态转换情况下的系统稳定性.

1　动力学模型

1.1　参数描述

系统的简易模型如图 1 所示，整体的柔性腿无缘轮框架由 8 根辐条作为支撑腿，忽略单个支撑腿的质量，系统总体的质量为 m，每根辐条同时具有刚度为 k 和阻尼为 u 的弹性缓冲器. 在系统进行运动的过程中由单根辐条和两根辐条交替循环作为支撑腿，取每个支撑腿的原长为 L_0，单支撑阶段接触腿长度为 L_1，转换为双支撑阶段时后腿长度为 L_2，前腿长度为 L_1，斜面的倾斜角度设为 ϕ，腿部与斜面接触时的滑动摩擦因数与最大静摩擦因数同时设为 μ. 取斜面与垂直于斜面的法线为空间直角坐标系的 X 轴与 Y 轴，设柔性腿无缘轮 8 根辐条的中心点坐标为 (x, y). 支撑腿与斜面垂线的夹角为 θ.

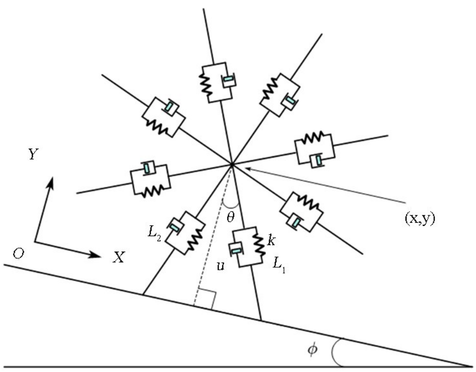
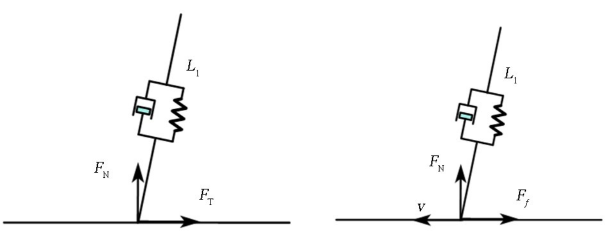


图 1　柔性腿无缘轮简易模型
Fig. 1　Simple model of flexible rimless wheel

1.2　黏滞－摩擦的转换条件

系统在行进的过程中不断地进行着单双腿与足地之间的接触与分离，同时足地间黏滞－滑动状态的改变使得系统的运动状态发生改变，其相应的动力学模型也发生变化. 图 2(a)为单个支撑腿黏滞状态的受力分析，图 2(b)是单个支撑腿滑动状态的受力分析. 其中 F_T 是单个支撑腿在黏滞状态下所受的切向约束力也就是限制系统滑动所需要的最小摩擦力，F_f 是单个支撑腿在滑动状态下受到的动滑动摩擦力，F_N 是腿部所受的法向支持力，v 是腿部支撑点与接触面的相对速度.



(a) 黏滞状态　(a)　Sticking state　　(b) 滑动状态　(b)　Sliding state

图 2　单个支撑腿在黏滞与滑动状态下的受力分析
Fig. 2　Force analysis of a single support leg in sticking and sliding states

这里应当指出的是，虽然实际上的静摩擦因数一般略大于动摩擦因数，但是本文主要是研究对于考虑摩擦的情况下存在的不同运动步态的分析，所以采用相同的滑动摩擦因数与最大静摩擦因数不会对运动步态产生影响，同时可以简便对于运动过程的分析，减少了一些麻烦.

系统黏滞－滑动状态以及转换存在 4 种情况，见表 1.

表 1　黏滞与滑动状态相互转换的四种情况
Table 1　Four situations of mutual conversion between sticking and sliding states

State	Condition	
Stick	$\lvert v\rvert=0$	$\mu F_N \geqslant \lvert F_T\rvert$
Stick to Slip	$\lvert v\rvert=0$	$\mu F_N < \lvert F_T\rvert$
Slip	$\lvert v\rvert>0$	$\mu F_N = \lvert F_f\rvert$
Slip to Stick	$\lvert v\rvert=0$	$\mu F_N \geqslant \lvert F_T\rvert$

当单个支撑腿的静摩擦力 μF_N 大于等于切向约束力 F_T 时系统处于黏滞状态；当单个支撑腿的摩擦力 μF_N 小于切向约束力时系统由黏滞向滑动转换；滑动状态的动摩擦力等于 μF_N；当单个支撑腿与地面的相对速度 v 减小为 0 时，如果这个时刻相同条件下黏滞模型的切向约束力 F_T 小于等于摩擦力 μF_N 则系统由滑动状态转换为黏滞状态，反之则维持滑动状态.

1.3　系统整体动力学方程

由于摩擦力与腿部的法向支持力相关，判定黏滞－滑动的依据又与切向力有关，同时模型又满足单边约束，所以选择带有拉式乘子的第一类拉格朗日方程进行建模分析，选择 $\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2]^{\mathrm{T}}$ 作为系统的广义坐标.

1.3.1　系统滑动状态整体动力学方程

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}=0 \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$为质量矩阵，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$为包含重力项、科氏力项、$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$表示作用在腿部的黏性弹力和阻尼力项，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$为约束的雅可比矩阵。与不考虑摩擦的模型相比 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$解除了切向约束的约束条件，增加了摩擦力项 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$.

摩擦力为非保守力，每个广义力坐标 $\boldsymbol{q}_i$ 对应一个广义力定义为($i=1,\cdots,N$)

$$\boldsymbol{Q}_i=\sum_j \boldsymbol{F}_i^{(a)}\frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial \boldsymbol{q}_i} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_i$ 为广义力，$\boldsymbol{F}_i^{(a)}$ 是作用点为 $\boldsymbol{r}_j$ 的主动力(即非约束力) 所以摩擦力项 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 的表达式为

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\sum \boldsymbol{F}_i\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 是作用在柔性腿上的摩擦力，$\boldsymbol{x}_i$ 是腿与地面的接触点的横坐标.

因为 $\boldsymbol{F}_i$ 是 $\boldsymbol{\lambda}$ 的函数所以可以令

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\lambda} \tag{5}$$

将式(4)代入式(1)可得

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\lambda} \tag{6}$$

对式(2)求导可得

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}=0 \tag{7}$$

将式(6)代入式(5)中得

$$\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})[\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\lambda}] \tag{8}$$

将式(7)代入式(6)

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})[\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\lambda}]=-\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{9}$$

由式(8)可得

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]-\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}\} \tag{10}$$

式中：

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})^{-1}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{11}$$

将式(9)代入式(5)可得系统整体动力学方程

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}=[\boldsymbol{I}_5-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})]\times[\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{12}$$

1.3.2 系统黏滞状态整体动力学方程

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{J}'^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{J}'(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}=0 \tag{14}$$

式(13)为完整约束条件. 将式(11)中的 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 改为 $\boldsymbol{J}'^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})$ 就是该系统整体的动力学方程

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}=[\boldsymbol{I}_5-\boldsymbol{J}'^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{J}'^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})]\times[\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]-\boldsymbol{J}'^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{J}}'(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{15}$$

1.4 系统各阶段动力学方程

1.4.1 系统双支撑阶段黏滞状态动力学方程

双支撑阶段的简易模型如图 3 所示，由于在非独立坐标系下双支撑阶段的切向约束力解不唯一，并且与单支撑阶段相比，双支撑阶段在实际中更不容易出现滑动，所以本文在双支撑阶段暂不考虑滑动问题，也就是只假设双支撑阶段系统的两条腿与地面铰接.

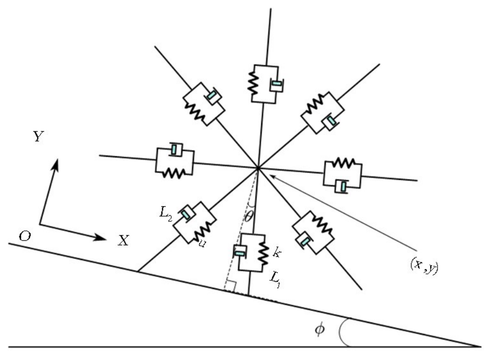


图 3 双支撑阶段简易模型

Fig. 3 Simple model of dual support stage

系统动能

$$k=\frac{1}{2}m_{\mathrm{H}}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \tag{16}$$

弹性势能

$$p_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}k_1(L_1-L_0)^2+\frac{1}{2}k_2(L_2-L_0)^2 \tag{17}$$

重力势能取初始位置平面 $x=0$ 为零势能面

$$P_{\mathrm{G}}=m_{\mathrm{H}}g(y\cos\phi-x\sin\phi) \tag{18}$$

系统阻尼的散耗能

$$D=\frac{1}{2}c_1\dot{L}_1^2+\frac{1}{2}c_2\dot{L}_2^2 \tag{19}$$

拉格朗日函数 $L=K-P$ 代入到第一类拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)-\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{q}}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda} \tag{20}$$

约束方程

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q})=\begin{vmatrix} x+L_1\sin\theta \\ y-L_1\cos\theta \\ x-L_2\sin(\alpha-\theta) \\ y-L_2\cos(\alpha-\theta) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ \gamma_4\end{vmatrix}=0 \tag{21}$$

其中 γ_1 和 γ_2 是前腿在切向和法向上的约束，γ_3 和 γ_4 是后腿在切向和法向上的约束.

式(20)中

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})=\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}} \tag{22}$$

得到系统动力学方程

$$\begin{cases} m_H\ddot{x}-m_Hg\sin(\phi)=\lambda_1+\lambda_3 \\ m_H\ddot{y}+m_Hg\cos(\phi)=\lambda_2+\lambda_4 \\ I\ddot{\theta}=L_1\cos(\theta)\lambda_1+L_1\sin(\theta)\lambda_2+ \\ \quad L_2^*\cos(45^\circ-\theta)\lambda_3-L_2^*\sin(45^\circ-\theta)\lambda_4 \\ k_1(L_1-L_0)-c_1\dot{L}_1=\sin(\theta)\lambda_1-\cos(\theta)\lambda_2 \\ k_2(L_2-L_0)-c_2\dot{L}_2=-\sin(\alpha-\theta)\lambda_3- \\ \quad \cos(\alpha-\theta)\lambda_4 \end{cases} \tag{23}$$

1.4.2　系统单支撑阶段黏滞状态动力学方程

单支撑阶段简易模型如图 4 所示,系统的动能和重力势能与双支撑阶段相同.

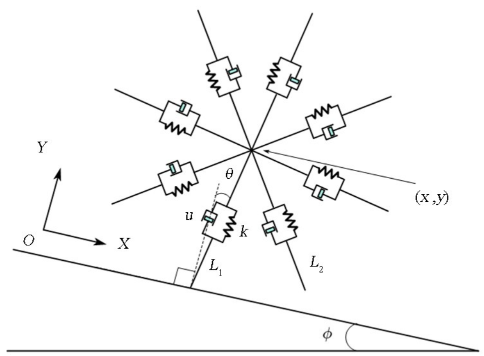


图 4　单支撑阶段简易模型

Fig. 4　Simple model for single support stage

弹性势能

$$p_k=\frac{1}{2}k_1(L_1-L_0)^2 \tag{24}$$

系统阻尼的散耗能

$$D=\frac{1}{2}c_1\dot{L}_1^2 \tag{25}$$

约束方程

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q})=\begin{vmatrix} x+L_1\sin\theta \\ y-L_1\cos\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}=0 \tag{26}$$

得到系统动力学方程

$$\begin{cases} m_H\ddot{x}-m_Hg\sin(\phi)=\lambda_1 \\ m_H\ddot{y}+m_Hg\cos(\phi)=\lambda_2 \\ I\ddot{\theta}=L_1\cos(\theta)\lambda_1+L_1\sin(\theta)\lambda_2 \\ k_1(L_1-L_0)-c_1\dot{L}_1=\sin(\theta)\lambda_1-\cos(\theta)\lambda_2 \end{cases} \tag{27}$$

1.4.3　系统单支撑阶段滑动状态动力学方程

滑动状态比黏滞状态增加了摩擦力耗能,表达式为

$$Q=\sum F_ix_i\quad i\in 1,2,3\ldots\ldots \tag{28}$$

其中 $F_i=\mu F_N$,F_N 为腿部的法相支持力,x_i 为腿与地面接触点的切向坐标.

拉格朗日函数 $L=K-P$ 代入到第一类拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\right)-\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial\boldsymbol{q}}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}+\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda} \tag{29}$$

并且约束方程去除了切向约束力

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{q})=|y-L_1\cos\theta|=|\gamma_2| \tag{30}$$

得到动力学方程

$$\begin{cases} m_H\ddot{x}-m_Hg\sin(\phi)=\mu\lambda_2 \\ m_H\ddot{y}+m_Hg\cos(\phi)=\lambda_2 \\ I\ddot{\theta}=[L_1\sin(\theta)+\mu L_1\cos(\theta)\mathrm{Sgn}(\lambda_1)]\lambda_2 \\ k_1(L_1-L_0)-c_1\dot{L}_1=[-\cos(\theta)+ \\ \quad \mu\sin(\theta)\mathrm{Sgn}(\lambda_1)]\lambda_2 \end{cases} \tag{31}$$

其中

$$\mathrm{Sgn}(\lambda_1)=\begin{cases} 1 & \lambda_1\geqslant 0 \\ -1 & \lambda_1<0 \end{cases} \tag{32}$$

当系统由黏滞向滑动状态转变时,滑动状态摩擦力的方向与黏滞状态的切向约束力一致.

1.5　瞬时冲击阶段方程

系统冲击阶段的过渡模型如图 5 所示,在单支撑转换为双支撑的瞬间,腿 L_2 继承了单支撑阶段腿 L_1 的状态,而因为弹性缓冲器的作用,双支撑阶段腿 L_1 的状态也不存在突变,即 $\boldsymbol{q}$ 与 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 变为 $\boldsymbol{q}^*=[x^-,y^-,\alpha-\theta^-,L_0,L_1^-]^{\mathrm{T}}$ 与 $\dot{\boldsymbol{q}}^*=[\dot{x}^-,\dot{y}^-,\dot{\theta}^-,0,\dot{L}_1^-]^{\mathrm{T}}$.

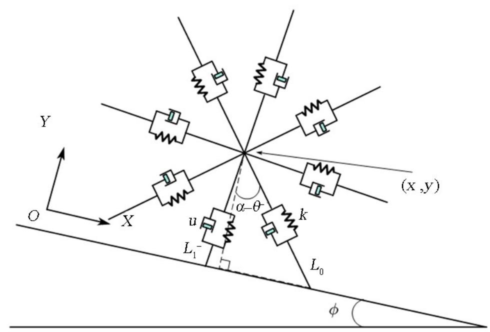


图 5　冲击阶段过渡模型

Fig. 5　Impact stage transition model

冲击瞬时阶段方程如下

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*)\dot{\boldsymbol{q}}^+=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*)\dot{\boldsymbol{q}}^*+\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{q}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^* \tag{33}$$

$$\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{q}^*)\boldsymbol{q}^+=0 \tag{34}$$

式(33)与式(34)中的 $\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{q})$ 与式(20)中的 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ 相同.

2 黏滞－滑动仿真分析

2.1 步态分析

当柔性腿无缘轮的腿与地面接触时，如果最大静摩擦力小于完整约束下的切向约束力，也就意味着摩擦力的大小不足以限制腿在切向的运动趋势，所以腿的运动状态就会由黏滞向滑动转换，因此系统模型的转换与摩擦因数的大小有关，选取在无滑动状态下柔性腿无缘轮腿部的切向约束力 λ_{T} 与法向约束力 λ_{N} 之比表示为

$$\mu^*=\frac{\lambda_{\mathrm{T}}}{\lambda_{\mathrm{N}}} \tag{35}$$

如果系统想由黏滞进入滑动状态必须满足关系式

$$|\mu^*(t)|\geqslant\mu \tag{36}$$

对于一个给定参数的系统，存在一个临界摩擦因数 μ_{c} 是满足不等式的最大 μ. 参考文献[7]采用龙格－库塔法，使用表2所示的参数设置进行仿真.

表2 系统仿真参数

Table 2 Simulation parameters of the system

Paramater	m/kg	α/rad	ϕ/rad	L_0/m	K/(N/m)	C/(Ns/m)
Value	20	$\pi/4$	0.3	1	1000	100

首先选择相同的初始值在不同角度的斜坡下进行模拟实验，当系统进入稳定的周期轨道后记录单支撑阶段的 μ^* 值，得出 μ^* 随时间变化的曲线如图6所示.

从图6中可以看出在单支撑阶段切向约束力与法相约束力的比值随着时间减小，当摩擦因数 μ 小于图中的曲线时系统就会产生滑动，穿过曲线后就会在滑动状态下向黏滞状态转换，而当系统的摩擦因数 μ 小于图中曲线的最小值时，系统将会在整个阶段持续滑动. 当选取实验中最常见的坡度 $\phi=0.3$ 时系统所需的摩擦因数必须满足 $\mu>0.45$ 时才能保证单支撑阶段不产生滑动，而随着坡度的增加这个临界值会继续上升，当坡度到达 $\phi=0.8$ 时

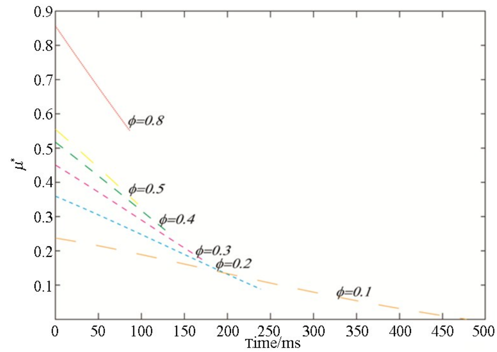


图6 不同坡度下随时间变化的曲线

Fig. 6 Curve of over time at different slopes

就需要满足 $\mu>0.85$ 才可以保证单支撑阶段不产生滑动. 所以可以预测在单支撑阶段不同的 μ 值会产生不同的运动步态.

简单地取 $\mu<0.17$ 时为 A 步态，由于摩擦因数小于临界值所以支撑腿一直保持滑动状态，同时由于重力对系统的影响大于摩擦力的影响，系统与地面的相对速度会一直增大.

取 $0.17\leqslant\mu<0.45$ 时为 B_1 步态和 B_2 步态，这个区间的摩擦因数会在整个运动周期内穿过临界值，系统会从滑动状态向黏滞状态转变. 其中 B_1 步态的摩擦因数较小，支撑腿会一直保持滑动并且在与地面的相对速度到达极值后减小，B_2 步态的摩擦因数较大，支撑腿则会在速度达到极值后减小到0从而由滑动转换为黏滞.

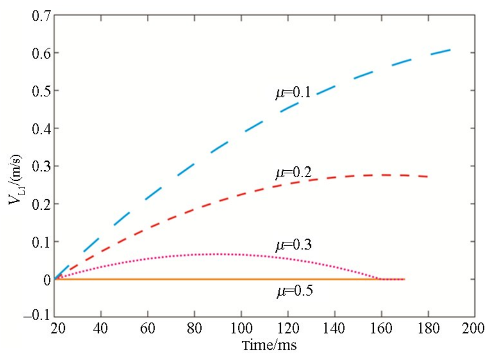
取 $\mu\geqslant0.45$ 时为 C 步态，这部分的摩擦因数过大，足以让支撑腿与地面始终保持黏滞状态不滑动.

值得指出的是如果增加黏性摩擦模型可能会改变滑动时的摩擦力，这只关系到 B 步态中 B_1 步态和 B_2 步态的时间长短，不会从根本上改变步态的特征.

图7(a)是系统在相同初始条件下单支撑阶段一个周期内取不同 μ 值时支撑腿与地面相对速度的变化曲线，可以看出当根据图7(a)的数值 μ 分别取0.1、0.2、0.3以及0.5这4组数值时与之前预测的 A、B_1、B_2 和 C 这4种步态相吻合. 产生 B_1 和 B_2 状态的原因是滑动状态下减速阶段的持续时长不足以支撑到腿与地面的相对速度减小为0就进行了单支撑到双支撑的步态转换. 同时可以由图中的曲线看出 μ 值的减少会延长单支撑阶段的持续时间，产生这种现象的原因是当系统滑动时腿与地面产生了相对速度，抵消了部分质心在斜坡上的速度分量，也就是减缓了角度的变换，减慢了

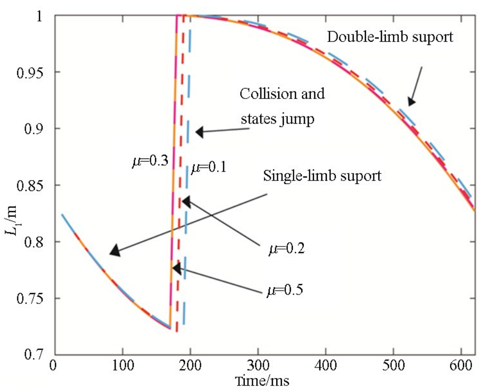
单支撑向双支撑的转换.

图 7(b)是系统在相同初始条件下一个周期内单支撑阶段取不同 μ 值时支撑腿长度的变化曲线,结合图 7(a)可以看出由于单支撑阶段的持续时间延长,在切换到双支撑阶段之前支撑腿的最大长度会变小,也就是说支撑腿会被压缩得更短,使得更多的能量转换为弹性势能.



(a) 腿 L_1 支撑点的速度变化

(a) The speed change of leg L_1 support point



(b) 腿 L_1 的长度变化

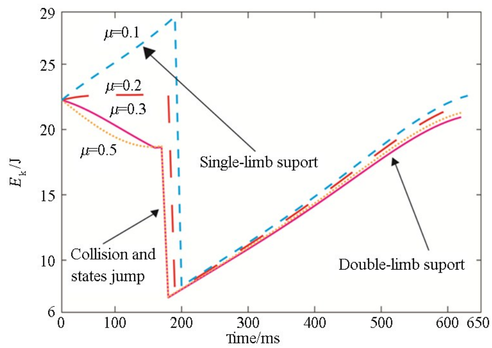
(b) Change in length of leg L_1

图 7　一个周期内相同初始条件时不同 μ 值系统单支撑阶段腿 L_1 和地面的相对速度变化与腿 L_1 长度的变化曲线

Fig. 7　Changes in relative velocity between leg L_1 and ground during the single support stage of the system and changes in leg L_1 length under the same initial value with different μ values within a cycle

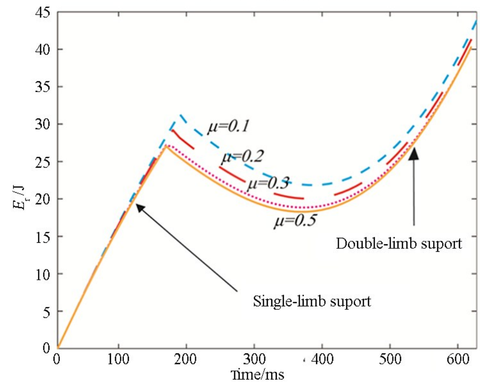
2.2　能量分析

图 8 (a)是在相同初始条件下一个周期内的系统取不同 μ 值时系统动能随时间变化的曲线图,图 8 (b)是系统在相同初始条件下一个周期内取不同 μ 值的重力势能减少的变化量,由以上的图可以看出当系统在单支撑阶段产生滑动时如果摩擦力不足以抵消系统滑动的趋势,那么系统会产生一个相对于地面的加速度,使得系统的动能增加. 从图 8 (b)中也可以看出当单支撑阶段产生滑动时,因为系统整体的下移以及弹簧腿更多的压缩量导致系统重力势能的变化量增加,所以会有更多的能量转换为除重力势能以外的机械能.



(a) 系统的功能

(a) Kinetic energy of the system



(b) 重力势能的减少

(b) Reduction of gravitational potential energy

图 8　一个周期内相同初始值下不同 μ 值的各系统的能量变化

Fig. 8　Energy variation of each system under the same initial value with different μ values within a cycle

2.3　稳定性分析

2.3.1　不同摩擦因数的周期行走稳定性

为了更好地研究系统的稳定性,采用庞加莱映射[20]将系统是否存在稳定性的周期解的问题转化为是否存在稳定的不动点的问题,这里选取了系统双支撑阶段转换为单支撑阶段时的超平面作为庞加莱截面 $\boldsymbol{\Sigma}$. 选取 $\boldsymbol{\zeta}=[y,\theta,L_1,L_2,\dot{y},\dot{\theta},\dot{L}_1,\dot{L}_2]^{\mathrm{T}}$ 为庞加莱截面上的 8 维状态变量. 庞加莱映射关系为

$$\boldsymbol{\zeta}_{i+1}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\zeta}_i) \tag{37}$$

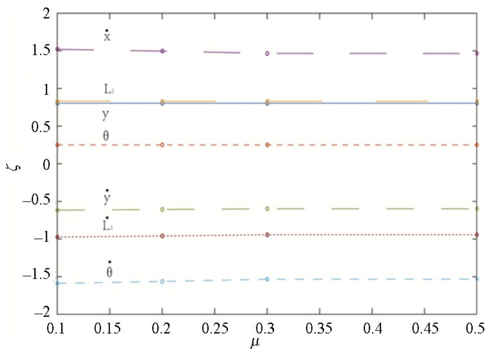
状态变量不包括质心的位置 x,是因为 x 为水平位置的状态变量,单调增加不成周期. 如果存在周期解那么庞加莱截面上的状态变量即为不动点,那么式(37)就变为

$$\boldsymbol{\zeta}^{*}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\zeta}^{*}) \tag{38}$$

通过 Newton-Raphson 迭代法得到的不动点如图 9(a)所示,可以看出当单支撑阶段存在滑动时系统不动点的 y 值、θ 值、L_1 值、$\dot{x}$ 的绝对值、$\dot{\theta}$ 的绝对值和 $\dot{L}_1$ 的绝对值都会随着 μ 值的减少而增大,这里正对应着之前所得出的 μ 值越小系统的机

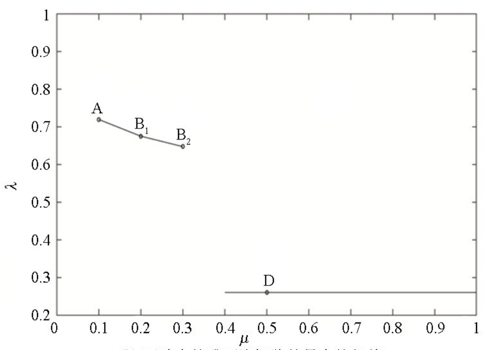
械能越大的结论,但是不动点的这些变化很小几乎可以省略不计,其原因在于冲击阶段能够很好地将单支撑阶段获得的能量消耗掉,同时无滑动的双支撑阶段也对系统的稳定运行起到了很大的作用.

最终求出不同步态不动点的雅可比矩阵的最大特征值$|\lambda|$如图9(b)所示,A、B_1、B_2和C四种步态$|\lambda|$的最大值分别为0.72、0.66、0.64和0.26.可以看出四种步态全部满足最大$|\lambda|<1$所以四种步态在不动点附近都是渐近稳定的,但同样可以看出滑动的出现使得最大$|\lambda|$的值升高,随着μ值的减小使得系统有着向不稳定状态变化的趋势.



(a) 不动点

(a)Fixed point



(b) 不动点的雅可比矩阵的最大特征值

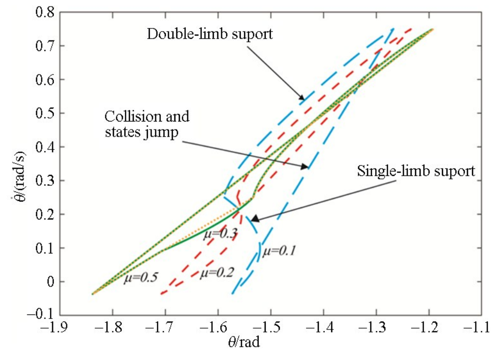
(b) The maximun eigenvalue of Jacobian matrix

图9 当$\phi=0.3$时不同μ值下系统的不动点以及不动点所对应的雅可比矩阵的最小特征值

Fig. 9 The fixed point of the system and the minimum eigenvalue of the Jacobian matrix corresponding to the fixed point with different μ values when $\phi=0.3$

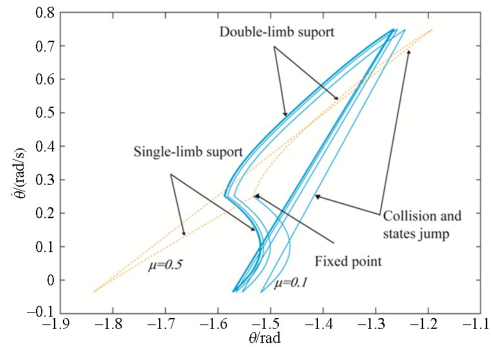
图10(a)是A、B_1、B_2、和C四种步态腿倾角θ的稳定极限环相平面图,可以看出滑动状态的出现减缓了角度的变化速度,同时由于单支撑阶段持续时间的延长以及腿长的减小导致了系统在状态切换之前θ值的变化更小,但是如果单支撑阶段的滑动状态最终能够转换为黏滞状态也就是B_2步态,那么在单支撑阶段结束时系统的角速度和角度位置就会收敛到与C步态相同的角速度和角度位置.

图10(b)中的虚线是系统从C步态($\mu=0.5$)腿倾角θ的稳定极限环,实线则是系统以C步态的稳定不动点为初始条件,向A步态($\mu=0.1$)腿倾角θ的稳定极限环收敛过程的相平面图,我们可以看出尽管系统由完全黏滞状态转换到了完全滑动状态但是仍然在5个周期之内系统就从C步态收敛到了A步态的稳定极限环,这证明当系统由于滑动而产生的新的步态具有很强的鲁棒性.



(a) 稳定极限环

(a) Stable limit cycle



(b) 极限环收敛的过程

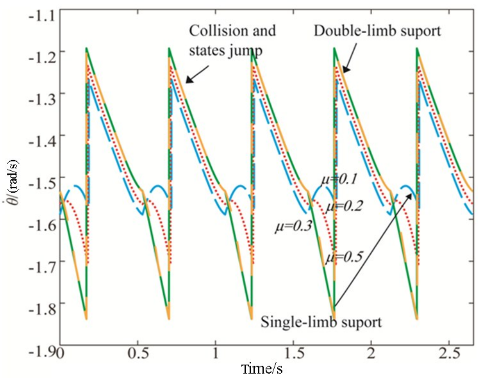
(b) The process of limit cycle convergence

图10 不同μ值下系统的稳定极限环和系统从$\mu=0.5$的稳定极限环向$\mu=0.1$的稳定极限环收敛的过程

Fig. 10 Stability limit cycle of the system with different μ values and The process of system convergence from the stability limit cycle of $\mu=0.5$ to the stability limit cycle of $\mu=0.1$

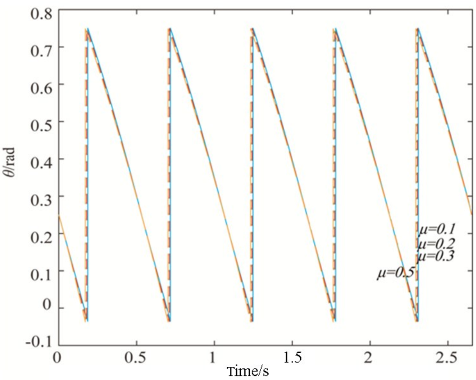
由图11(a)中4种步态在稳定极限环下的角速度变化曲线可以看出当系统在稳定的周期轨迹运行时,虽然单支撑阶段的滑动状态会减慢角度的变化,但是无滑动的双支撑阶段会弥补这种损失.图11(b)是4种步态在稳定极限环下的角度位置变化曲线,可以看出在每个行走周期内角度的变化曲线会产生带宽但是在周期结束阶段又重新收敛成一条直线.结合图11(a)和图11(b)可以看出,当4种步态都处于稳定的轨迹时,虽然在运动的过程中角度的变化会由于单支撑阶段角速度的不同出现偏差,但是最终会在双支撑阶段的弥补下收敛在一个相同的角度.经过计算可以得出A、B_1、B_2、C四种步态的单支撑阶段分别占一个周期的35.03%,33.80%,32.22%以及32.07%,但是在

双支撑阶段无滑动时稳定的整个行走周期时间几乎相同,约为 0.53s.



(a) 角速度随时间的变化曲线

(a) Curve of angular velocity over time



(b) 角度随时间的变化曲线

(b) Curve of angle change over time

图 11　系统在不同 μ 值下角度与角速度随时间周期变化的曲线

Fig. 11　Curve of system angle and system angular velocity over time period with different μ values

2.3.2 初始动能对系统步态的影响

如果单支撑阶段存在滑动的情况,那么系统需要更多的初始动能来确保当系统穿过直立平衡面,即 $\theta=\alpha$ 时满足 $\dot{\theta}<0$ 或者系统满足质心在斜坡方向的速度大于支撑腿支撑点沿着斜面的滑动速度,否则系统会向后倾斜. 如果当系统初始的动能仅可以保证在穿过直立平衡面时满足 $\dot{\theta}<0$ 但是不足以快速地通过直立平衡面,那么系统就会维持在直立平衡面附近的角度滑行一段距离,这会大量地增加系统单支撑阶段结束时的动能.

图 12 是系统在单支撑阶段的 A 步态以不同的角速度通过直立平衡面时整个阶段滑动的时间与阶段结束时最终系统总机械能的曲线图,从图中可以看出在正常情况下,也就是角速度可以保证系统快速地通过垂直平衡面时,这里角速度取 −0.7rad/s,系统单支撑阶段的滑动时间仅有 0.62s 同时阶段结束时的机械能只有 51J,而当角速度在 −0.5050rad/s～−0.4985rad/s 之间时系统的滑动时间会成倍的提升,可以达到 2s～3.5s 是正常情况的 3.2 倍～5.6 倍,同时单支撑阶段结束时的系统总机械能会增加到 166J～536J 是正常情况的 3.2 倍～10.5 倍. 所以当系统在通过垂直平面时如果系统动能处在停滞区间会导致系统的滑动时间过长,机械能增加过量,最终导致系统的不稳定,这样的不稳定甚至会导致系统出现混沌现象. 而如果系统在通过垂直平衡面时 $\dot{\theta}$ 过小或者系统动能不足以突破垂直平衡面,系统就会在单支撑阶段向后运动导致系统停摆.

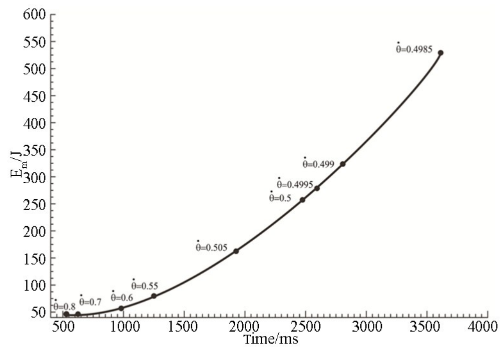


图 12　不同角速度在直立平衡面时滑动的时间与阶段结束时最终机械能的曲线

Fig. 12　The curve between the sliding time of different angular velocities on an upright equilibrium surface and the final mechanical energy at the end of the stage

3　结论

本文采用第一类拉格朗日方程建立了带有摩擦力的柔性腿无缘轮系统的动力学模型. 通过对不同的摩擦因数进行分析,得出了系统单支撑阶段的四种步态,分别是:

步态 A 系统在整个阶段内滑动并且不减速;

步态 B_1 系统在整个阶段内滑动并且速度达到极值后减速但不停止;

步态 B_2 系统在整个阶段初期滑动并到后期转换为黏滞;

步态 C 系统在整个阶段内无滑动.

之后通过庞加莱映射证明了四种步态的轨迹稳定性,证明了带有滑动的步态具有良好的鲁棒性,还通过数值仿真得出结论:当系统稳定时,如果单支撑阶段存在滑动,那么其持续时间会随着摩擦因数的减小而增加,如果单支撑阶段存在滑动,那么最终的动能会随着摩擦因数的减小而增加.

最后,分析出系统的单支撑阶段滑动状态存在停滞区间,如果当系统在通过垂直平衡面时动能或者角速度处于小范围的停滞区间,系统就会产生长

时间的滑动,并且变得极不稳定.

本文只是在系统中加入了简单的Coulomb摩擦模型用于分析运动步态,以后会考虑采用更复杂的摩擦模型如Stribeck模型,更细致地分析不同介质下的复杂运动模型.

由于采用非独立广义坐标建立系统动力学方程的限制,在双支撑阶段不能准确地得出系统切向约束力的有效数据,所以后续的研究会尝试其他方法如采用独立的广义坐标建立系统的动力学方程来进一步地研究系统双支撑阶段可能会产生的黏滞与滑动步态行为.

参考文献

[1] MCGEER T. Passive dynamic walking [J]. The International Journal of Robotics Research, 1990, 9 (2): 62－82.

[2] MCGEER T. Powered flight, child's play, silly wheels and walking machines [C]//Proceedings, 1989 International Conference on Robotics and Automation. New York: IEEE, 1989: 1592－1597.

[3] MORAWSKI J M, WOJCIESZAK I. Miniwalker-a resonant model of human locomotion[C]//Proceedings of the Sixth International Congress of Biomechanics, Copenhagen, Denmark. Baltimore, USA: University Park Press, 1978.

[4] COLEMAN M J, CHATTERJEE A, RUINA A. Motions of a rimless spoked wheel: a simple three-dimensional system with impacts [J]. Dynamics and Stability of Systems, 1997, 12(3): 139－159.

[5] ASANO F. Analytical solution to transition function of state error in 1-DOF semi-passive dynamic walking [C]//2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. New York: IEEE, 2013: 3114－3119.

[6] ASANO F, TOKUDA I. Indirectly controlled limit cycle walking of combined rimless wheel based on entrainment to active wobbling motion [J]. Multibody System Dynamics, 2015, 34(2): 191－210.

[7] ASANO F, KAWAMOTO J. Modeling and analysis of passive viscoelastic-legged rimless wheel that generates measurable period of double-limb support [J]. Multibody System Dynamics, 2014, 31(2): 111－126.

[8] 张奇志,戈新生,周亚丽,等.柔性腿无缘轮被动动态行走器建模与分析[J/OL].应用力学学报,2024[2024-01-10]. http://kns.cnki.net/kcms/deta il/61.1112.o3.20230519.1607.007.html.

ZHANG Q Z, GE X S, ZHOU Y L. Modeling and Analysis of Passive Dynamic Walker of Flexible Legged Rimless Wheel [J/OL]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2024 [2024-01-10]. http://kns.cnki.net/kcm s/deta il/61.1112.o3.20230519.1607.007.html.

[9] GAMUS B, OR Y. Dynamic bipedal walking under stick-slip transitions [J]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2015, 14(2): 609－642.

[10] KARNOPP D. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems [J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1985, 107(1): 100－103.

[11] 张洪武,何素艳,李兴斯.求解摩擦接触问题的一个非内点光滑化算法[J].应用数学和力学,2004, 25(1): 42－52.

ZHANG H W, HE S Y, LI X S. Non-interior smoothing algorithm for frictional contact problems [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25 (1): 42－52. (in Chinese)

[12] 段文杰,王琪,王天舒.圆弧足被动行走器非光滑动力学仿真研究[J].力学学报,2011,43(4):765－774.

DUAN W J, WANG Q, WANG T S. Simulation research of a passive dynamic walker with round feet based on non-smooth method [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43 (4): 765－774. (in Chinese)

[13] 郑鹏,王琪,吕敬,等.摩擦与滚阻对被动行走器步态影响的研究[J].力学学报,2020,52(1):162－170.

ZHENG P, WANG Q, LV J, et al. Study on the influence of friction and rolling resistance on the gait of passive dynamic walker [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(1): 162－170. (in Chinese)

[14] 姚文莉,陈滨,刘才山.含摩擦的空间多刚体系统的冲击问题[J].动力学与控制学报,2004,2(2):7－10.

YAO W L, CHEN B, LIU C S. Impulsive dynamics of spatial multi-rigid-body systems with friction [J]. Journal of Dynamics and Control, 2004, 2(2): 7－10. (in Chinese)

[15] KATO S, YAMAGUCHI K, MATSUBAYASHI

T. Stick-slip motion of machine tool slideway [J]. Journal of Engineering for Industry, 1974, 96(2): 557－566.

[16] 邢航，郑旭东，王琪. 基于 LuGre 模型非光滑柱铰链平面多体系统动力学的建模和数值方法[J]. 动力学与控制学报，2019，17(5)：413－418.

XING H, ZHENG X D, WANG Q. Modeling and simulation of planar multibody systems with frictional revolute joints based on LuGre friction model [J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17 (5): 413－418. (in Chinese)

[17] 李国芳，俞力洋，丁旺才，等. 一类无足自驱动系统的运动特性分析[J]. 振动与冲击，2020，39 (14)：9－16.

LI G F, YU L Y, DING W C, et al. Motion characteristics analysis of a wheel-free self-driving system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39 (14): 9－16. (in Chinese)

[18] 冯欣炜，胥奇，杨正兵，等. 一类小车倒立摆的起摆稳摆时滞控制研究[J]. 动力学与控制学报，2023，21(8)：82－91.

FENG X W, XU Q, YANG Z B, et al. Delayed swing up and stability control of a class of cart-pendulum system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 82－91. (in Chinese)

[19] ARMSTRONG-HÉLOUVRY B, DUPONT P, DE WIT C C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction [J]. Automatica, 1994, 30(7): 1083－1138.

[20] 张奇志，周亚丽. 伸缩腿双足机器人半被动行走控制研究[J]. 动力学与控制学报，2019，17(1)：1－6.

ZHANG Q Z, ZHOU Y L. Study on walking control of a semi-passive biped robot with telescopic legs [J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17(1): 1－6. (in Chinese)