

# 间歇通信下具有双层拓扑结构的多智能体系 统一致性研究\*

段朝霞<sup>1</sup> 戴君<sup>1</sup> 邵振<sup>1</sup> 王荣浩<sup>2†</sup>

(1. 河海大学 人工智能与自动化学院, 南京 210098)

(2. 陆军工程大学 国防工程学院, 南京 210007)

**摘要** 本文研究了在间歇通信机制下具有两层网络拓扑结构的多智能体系统一致性问题. 首先, 提出了一种在间歇通信机制下的一致性控制协议, 通过建立网络结构模型和误差系统模型, 将一致性问题等效转化为线性时滞系统的渐近稳定性问题. 其次, 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析方法, 导出了多智能体网络在间歇通信机制下达到一致性的充分条件, 结论以一组 LMI 形式给出. 最后, 通过仿真算例验证了该方法的有效性.

**关键词** 多智能体系统, 间歇通信, 双层拓扑结构, 一致性

中图分类号: TP13

文献标志码: A

## Research on Consensus of Multi-Agent Systems with Two-Layer Hierarchical Topology under Intermittent Communication\*

Duan Zhaoxia<sup>1</sup> Dai Jun<sup>1</sup> Shao Zhen<sup>1</sup> Wang Ronghao<sup>2†</sup>

(1. College of Artificial Intelligence and Automation, Hohai University, Nanjing 210098, China)

(2. College of Defense Engineering, Army Engineering University of PLA, Nanjing 210007, China)

**Abstract** In this paper, the consensus problem of multi-agent systems with two-layer network topology under intermittent communication mechanism is studied. Firstly, a consensus control protocol based on intermittent communication mechanism is proposed. By modeling the network structure and establishing the error system model, the consensus problem is equivalent to the asymptotic stability problem of linear time-delay systems. Secondly, by using Lyapunov-Krasovskii functional analysis method, the sufficient conditions for multi-agent networks to reach consensus under intermittent communication mechanism are derived, and the conclusions are given in the form of a set of LMIs. Finally, a simulation example is given to verify the effectiveness of the proposed method.

**Key words** multi-agent systems, intermittent communication, two-layer topology, consensus

### 引言

智能体之间的信息交互或者对系统所施加的控制输入通常连续的, 导致通信成本较高. 随着多

机系统规模的不断扩大, 结构越来越复杂, 降低相应的控制成本成为科技发展的需求. 一些学者逐渐引入不连续控制来探究网络系统, 例如事件触发控制<sup>[1]</sup>、脉冲控制<sup>[2]</sup>、采样控制<sup>[3]</sup>、稀疏控制<sup>[4]</sup>、最大

2023-12-26 收到第 1 稿, 2024-03-06 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(62173341, 62103133), 江苏省自然科学基金资助项目(BK 20231487), National Natural Science Foundation of China(62173341, 62103133), National Natural Science Foundation of China(BK 20231487).

† 通信作者 E-mail: wrh1985@aeu.edu.cn

不干涉控制<sup>[5]</sup>和间歇控制<sup>[6]</sup>等.不连续控制作为某种意义上(基于时间或事件)的分段式控制,其控制原理是控制器生效于某个时间点或某个时间间隔甚至是某个事件.如文献[7]研究了具有通信受限及不确定性的无线网络下的二阶多智能体系统的编队控制问题.大量的研究结果表明不连续控制策略不仅可以降低控制成本,减少能源消耗,而且控制效果在一定参数条件下依旧保持较强的鲁棒性,可以确保网络系统稳定、协调和高速运行,并满足复杂任务中苛刻的性能标准.此外,通信信号通道的不稳定性、智能体之间感知距离的限制以及障碍物的干扰等因素,网络中的智能体不能时刻保持与其邻居进行信息交互,也会造成智能体之间信息传输的不连续性.文献[8]将多智能体一致性算法应用于孤岛微电网二次控制中,在收敛速度、抗干扰控制、通信延迟以及事件触发控制四个方面进行改进.文献[9]考虑二阶多智能体系统的广义一致性问题,提出了非延迟和延迟通信控制协议下的系统实现线性广义一致性的充分必要条件.文献[10]讨论了一种采用非周期方式的间歇控制器,具有延迟扰动多智能体的一致性问题.从减少能量消耗、节约成本等方面考虑,间歇控制具有显著优势.所谓间歇控制就是在控制器运行一段时间后自动关闭,一段时间之后重新自动启动运行,循环往复.间歇控制满足系统中间歇通信以及干扰因素的存在条件,同时是一种介于脉冲控制和连续控制之间的折中控制,基于时间参数约束能切换到连续控制或者不连续控制,广泛应用于网络同步与一致性研究中.如文献[11]采用了间歇控制策略和马尔科夫切换拓扑研究了一种非线性多智能体系统的全分布式一致性跟踪问题.因此研究多智能体一致性的间歇控制将有重要的理论与实用意义.

另一方面,复杂系统是由众多个体组成,它们之间以某种或多种方式发生线性或非线性的相互作用.这些相互作用关系使其在时间和空间上产生各种形式的关联结构,并呈现出系统的时空多尺度特征.事实上,由几个网络的相互作用关系刻画的复杂系统普遍存在.如在社会系统中,不同类型的社交关系(朋友、同事、亲属等)能够被抽象成不同的网络层,进而代表友谊、协作、家庭等社会关系;基础设施系统可以通过区分不同的运输工具(地铁、火车、飞机等),进而研究基础设施系统应对突

发灾难的能力.如今,多层拓扑结构是大型多智能体系统的另一个显著特征,在网络结构中,多层网络拓扑是研究的前沿和热点,它突破了单层网络中节点和连边同质性的限制,考虑了多种类型节点及其连边关系(包括层内连边和层间连边)<sup>[12]</sup>.由于大多数大型系统包含子系统之间的相互作用,这些子系统在空间和时间等各个方面可能具有相同或不同的尺度.Ren等<sup>[13]</sup>研究了具有多层有向图拓扑的延迟神经网络的领导一跟随一致性的问题.Duan等<sup>[14,15]</sup>研究了具有固定拓扑结构和切换拓扑结构的多层多智能体网络具有层间通信时变延迟情形的一致性问题.

目前针对具有双层拓扑结构的多智能体系统间歇通信条件下的一致性问题还鲜有报道.间歇控制与双层拓扑结构相结合既能提升一致性收敛速度又可减少复杂系统的通信成本.本文针对该类系统,提出了一种具有可变采样周期的采样数据一致性控制协议.基于状态变换,将多智能体系统的一致性问题等效转化为线性时滞系统的稳定性问题.然后,利用 Lyapunov-Krasovskii 函数法和凸组合技术,导出了线性矩阵不等式(LMI)形式的时滞相关稳定性判据.其次,基于 LMI 的凸组合技术,使其用 Matlab LMI 工具箱可方便求解.最后,通过数值仿真验证了理论结果的有效性.

## 1 问题阐述

符号:上标 T 表示转置,符号  $\mathbf{X} \geq \mathbf{Y}$  ( $\mathbf{X} > \mathbf{Y}$ ) 表示矩阵  $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$  为正半定(正定).  $\mathbf{I}_m$  表示维度为  $m \times m$  的单位矩阵.  $\text{diag}\{a_i\}$  表示具有  $i = 1, 2, \dots, n$  对角元素的块对角矩阵.  $\mathbf{X}^{-1}$  表示矩阵  $\mathbf{X}$  的逆.  $|\cdot|$  表示欧几里德范数.  $\lambda_{\max}(\cdot)$  和  $\lambda_{\min}(\cdot)$  表示矩阵的最大和最小特征值.非负整数集合表示为  $(V, E, \varphi)$ .

图可以用三元组  $(V, E, \varphi)$  来表示,三元组  $V$  是一个非空的节点集,  $E$  是一个有限的边集,  $\varphi$  是从边集到有序或无序偶数点集的映射.如果在一组智能体中,  $A$  能与  $B$  通信,则  $B$  必须与  $A$  通信,且  $A, B$  以等权通信,则称为无向网络.节点的输入权值称为该节点的度,记为对角矩阵  $\mathbf{D}$ .邻接矩阵  $\mathbf{A}$  中  $(i, j)$  位置元素的值表示节点  $j$  到节点  $i$  的通信权值.图的 Laplace 矩阵为  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ .

本文考虑一个具有双层拓扑结构的多智能体

系统,其结构如图1所示.它由  $N = pq$  个相同的智能体组成,一共有  $q$  组,每组有  $p$  个智能体.每个智能体的动力学方程如下:

$$\dot{x}_{n,m}(t) = u_{n,m}(t) \quad (1)$$

其中  $x_{n,m} \in \mathbf{R}$  和  $u_{n,m} \in \mathbf{R}$  分别表示第  $n$  组中第  $m$  个智能体的状态和控制输入,  $n = \{1, 2, \dots, q\}$ ,  $m = \{1, 2, \dots, p\}$ .  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$  和  $\mathbf{\Delta}$  分别表示下层的局部交互拓扑、上层的组间拓扑通信的 Laplace 矩阵、上下层信息交互的互联矩阵,其中  $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{R}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{R}^{q \times q}$ ,  $\mathbf{\Delta} = \boldsymbol{\rho}_1 \boldsymbol{\rho}_2^T$ ,  $\boldsymbol{\rho}_1 \in \mathbf{R}^p$  表示从上层传输到下层智能体组的加权向量,  $\boldsymbol{\rho}_2 \in \mathbf{R}^p$  表示从下层多智能体组传输到上层的加权向量.

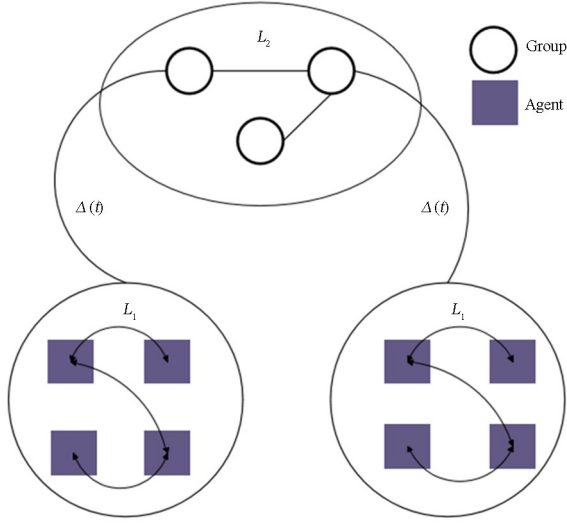


图1 两层网络拓扑结构  
Fig.1 Two-layer network topology

假设 每组智能体数量  $p$  相同,每一组的内部连接结构  $\mathbf{L}_1$  相同,各组的层间信息通信矩阵  $\mathbf{\Delta}$  也相同.

事实上,智能体只能在时刻  $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) 获得自身和相邻智能体信息,其中  $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots$ , 定义  $h_i = t_{i+1} - t_i$ , 假设  $h_i < \tau$ , 系统的控制协议设计如下:

$$u_{n,m}(t) = \sum_{a=1}^p l_{1,ma} x_{n,a}(t_i) + \mathbf{E}_m \sum_{b=1}^q l_{2,nb} \mathbf{\Delta} \times [x_{n,b}(t_i) - x_{n,m}(t_i)], t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{E}_m = [0, \underbrace{0 \dots 0}_{m-1}, 1, \underbrace{0 \dots 0}_{p-m}]$$

$l_{1,ma}$  为矩阵  $\mathbf{L}_1$  在  $(m, a)$  的元素,  $l_{2,nb}$  为矩阵  $\mathbf{L}_2$  在  $(n, b)$  元素.在实际应用中,由于网络带宽和通信成本的限制,智能体之间的信息传递具有间歇性,本文构建的采样数据一致性协议(2)具有一定的理论

和实践意义.由式(1)和式(2)可得

$$\dot{x}_{n,m}(t) = \sum_{a=1}^p l_{1,ma} x_{n,a}(t_i) + \mathbf{E}_m \sum_{b=1}^q l_{2,nb} \mathbf{\Delta} \times [x_{n,b}(t_i) - x_{n,m}(t_i)], t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (3)$$

因为  $x_{n,m}(t_i) = x_{n,m}[t - (t - t_i)]$ , 令  $\tau(t) = t - t_i$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1})$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .显然,  $\dot{\tau}(t) = 1$ , 在  $t = t_i$  处不连续.假设  $0 \leq \tau(t) \leq h_i \leq \tau$ ,  $\mathbf{X}_n(t) = [x_{n,1}^T, x_{n,2}^T, \dots, x_{n,p}^T]^T$ ,  $n = 1, 2, \dots, q$  表示第  $n$  组智能体的整体状态,则由(3)可得

$$\dot{\mathbf{X}}_k(t) = -\mathbf{L}_1 \mathbf{X}_k(t) - (\mathbf{L}_2 \otimes \mathbf{\Delta}) \mathbf{X}_k[t - \tau(t)], k \in \{1, 2, \dots, q\}, t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (4)$$

令  $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{X}_1^T(t), \mathbf{X}_2^T(t), \dots, \mathbf{X}_q^T(t)]^T$ , 则具有间歇信息传输的双层网络拓扑多智能体系统可以表示为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -(\mathbf{I}_q \otimes \mathbf{L}_1) \mathbf{x}(t) - (\mathbf{L}_2 \otimes \mathbf{\Delta}) \times \mathbf{x}[t - \tau(t)], t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (5)$$

令  $\mathbf{W}_1 = \mathbf{I}_q \otimes \mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{W}_2 = \mathbf{L}_2 \otimes \mathbf{\Delta}$ , 则有

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{W}_1 \mathbf{x}(t) - \mathbf{W}_2 \mathbf{x}[t - \tau(t)], t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (6)$$

定义 定义一致状态:

$$\mathbf{W} = \{[x_{1,1}^T, x_{1,2}^T, \dots, x_{1,p}^T, \dots, x_{q,1}^T, \dots, x_{q,p}^T]^T: x_{n,m} = x_{b,a}, \forall m, a \in \{1, 2, \dots, p\}, \text{ 令 } \forall n, b \in \{1, 2, \dots, q\}, N = pq$$

$$\omega(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^q \sum_{m=1}^p x_{n,m}(t)$$

则

$$\dot{\omega}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^q \sum_{m=1}^p u_{n,m}(t)$$

## 2 主要结果

对于一致性状态  $\mathbf{W}$ , 定义误差向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,m}(t) = x_{n,m}(t) - \omega(t) \quad (7)$$

进一步,有

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n,m}(t) &= -\dot{x}_{n,m}(t) - \dot{\omega}(t) \\ &= -u_{n,m}(t) - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q u_{n,m}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

由此将一致性问题转化为动态误差系统的稳定性问题.由 Laplace 矩阵  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$  的行和与列和均为 0, 可得

$$\dot{\omega}(t) = 0 \quad (9)$$

$$\sum_{a=1}^p l_{1,ma} \omega(t) = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_m \sum_{b=1}^q l_{2,nb} \Delta [\tau w(t) \quad \cdots \quad w(t)]^T = 0 \quad (11)$$

由式(2)、式(9)~式(11)可知

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n,m}(t) = - \sum_{a=1}^p l_{1,ma} \boldsymbol{\varepsilon}_{n,a}(t) - \mathbf{E}_m \sum_{b=1}^q l_{2,nb} \Delta \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{n,1}[t-\tau(t)] \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n,p}[t-\tau(t)] \end{bmatrix} \quad (12)$$

令  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = [\boldsymbol{\varepsilon}_{1,1}^T, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{1,p}^T, \boldsymbol{\varepsilon}_{2,1}^T, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{2,p}^T, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{q,1}^T, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{q,p}^T]^T$ , 则(12)可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) &= -(\mathbf{I}_q \otimes \mathbf{L}_1) \boldsymbol{\varepsilon}(t) - (\mathbf{L}_2 \otimes \Delta) \boldsymbol{\varepsilon}[t-\tau(t)] \\ &= -\mathbf{W}_1 \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \mathbf{W}_2 \boldsymbol{\varepsilon}[t-\tau(t)], \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \end{aligned} \quad (13)$$

由于 Laplace 矩阵  $\mathbf{L}_1$  是实对称矩阵, 则存在酉矩阵  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q) \in \mathbf{R}^{q \times q}$ , 其中  $\mathbf{u}_n = (u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,q})^T \in \mathbf{R}^q$ , 使得  $\mathbf{U}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{U} = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\}$ ,  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_q$ ,  $\lambda_l (l \in \{1, 2, \dots, n\})$  是  $\mathbf{L}_2$  的特征值. Laplace 矩阵的性质使得

- (1)  $\lambda_1 = 0$  的相关特征向量是  $\mathbf{u}_1 = (1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^q$ ;
- (2)  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_q$ .

令

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= (\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{I}_p) \boldsymbol{\varepsilon}(t) \\ &= (\mathbf{z}_{1,1}^T, \dots, \mathbf{z}_{1,p}^T, \mathbf{z}_{2,1}^T, \dots, \mathbf{z}_{2,p}^T, \dots, \mathbf{z}_{q,1}^T, \dots, \mathbf{z}_{q,p}^T) \end{aligned}$$

由(13)可得

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = -\mathbf{W}_1 \mathbf{z}(t) - (\Lambda \otimes \Delta) \mathbf{z}[t-\tau(t)]$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(t) &= [\mathbf{z}_{1,1}^T, \dots, \mathbf{z}_{1,p}^T]^T = (\mathbf{u}_1^T \otimes \mathbf{I}_p) \boldsymbol{\varepsilon}(t) \\ &= \left[ \sum_{d=1}^{N=pq} \boldsymbol{\varepsilon}_d(t) \right]_{p \times 1} = [\mathbf{0}]_{p \times 1} \end{aligned}$$

因此, 一致性问题可进一步转化为如下  $q-1$  个子系统的稳定性问题

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}}(t) &= -\mathbf{L}_1 \mathbf{g}(t) - \lambda_k \Delta \mathbf{g}[t-\tau(t)] \\ \mathbf{g}(t) &= \boldsymbol{\psi}(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\mathbf{g}(t)$  是具有初始条件的状态向量  $\boldsymbol{\psi} \in C(\{-\tau, 0\}, \mathbf{R}^n)$ ,  $k \in \{2, 3, \dots, q\}$ .

**引理** 对于任何常数矩阵  $\mathbf{A} > 0 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{n \times k}$ ,  $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n \times k}$ , 时变函数  $\tau(t)$  满足  $0 < \tau(t) < \tau$ ,

向量函数  $\dot{\boldsymbol{\nu}}: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 若  $\int_{t-\tau(t)}^t \dot{\boldsymbol{\nu}}(s) ds = \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,

其中  $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times k}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathbf{R}^k$ , 则下面不等式成立

$$- \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\boldsymbol{\nu}}(s) \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\nu}}(s) ds \leq \boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}(t)$$

其中  $\mathbf{M} = \tau(t) \mathbf{Y}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{E}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{E}$ .

以下定理给出系统(14)稳定的充分条件.

**定理** 给定标量  $\tau > 0$ , 如果存在矩阵  $\mathbf{P}_k > 0$ ,  $\mathbf{Q}_k > 0$ ,  $\mathbf{S}_k > 0 (k=2, 3, \dots, q)$  和任意矩阵  $\mathbf{Z}_{1k}, \mathbf{Z}_{2k}$ , 使得

$$\begin{bmatrix} \Phi_k & \tau \mathbf{Z}_{1k}^T \\ * & -\tau \mathbf{S}_k \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \Phi_k & \tau \mathbf{Z}_{2k}^T \\ * & -\tau \mathbf{S}_k \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (15)$$

成立, 其中

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_k \boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{Q}_k \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3^T \mathbf{Q}_k \mathbf{e}_3 + \\ &\quad \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{S}_k \boldsymbol{\eta}_k - \mathbf{E}_1^T \mathbf{Z}_{1k} - \mathbf{Z}_{1k}^T \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2^T \mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{Z}_{2k}^T \mathbf{E}_2 \\ \boldsymbol{\eta}_k &= \mathbf{L}_1 \mathbf{e}_1 - \lambda_k \Delta \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 &= [\mathbf{I}_p \quad 0 \quad 0], \mathbf{e}_2 = [0 \quad \mathbf{I}_p \quad 0], \\ \mathbf{e}_3 &= [0 \quad 0 \quad \mathbf{I}_p], \mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

则系统(14)是渐近稳定的.

**证明:** 为系统(14)的第  $k$  个子系统选择以下 Lyapunov-Kraovskii 函数

$$V_k(t) = \sum_{l=1}^3 V_{k,l}(t) \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} V_{k,1}(t) &= \mathbf{g}^T(t) \mathbf{P}_k \mathbf{g}(t) \\ V_{k,2}(t) &= \int_{t-\tau}^t \mathbf{g}^T(s) \mathbf{Q}_k \mathbf{g}(s) ds \\ V_{k,3}(t) &= \int_{-\tau}^t \int_{t-\tau+\theta}^t \dot{\mathbf{g}}^T(s) \mathbf{S}_k \dot{\mathbf{g}}(s) d\theta ds \end{aligned}$$

$V_k(t)$  沿着系统(14)轨迹的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(t) &= \boldsymbol{\xi}^T(t) (\mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_k \boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{Q}_k \mathbf{e}_3 - \\ &\quad \mathbf{e}_3^T \mathbf{Q}_k \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{S}_k \boldsymbol{\eta}_k) \boldsymbol{\xi}(t) - \\ &\quad \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{g}}^T(s) \mathbf{S}_k \dot{\mathbf{g}}(s) ds - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{g}}^T(s) \mathbf{S}_k \dot{\mathbf{g}}(s) ds \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(t) &= \{\mathbf{g}^T(t) \quad \mathbf{g}^T[t-\tau(t)] \quad \mathbf{g}^T(t-\tau)\} \\ \mathbf{e}_1 &= [\mathbf{I}_p \quad 0 \quad 0], \mathbf{e}_2 = [0 \quad \mathbf{I}_p \quad 0], \mathbf{e}_3 = [0 \quad 0 \quad \mathbf{I}_p] \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_k &= \mathbf{S}_1 \mathbf{e}_1 - \lambda_k \Delta \mathbf{e}_2 \\ \boldsymbol{\eta}_{1k}(t) &= - \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{g}}^T(s) \mathbf{S}_k \dot{\mathbf{g}}(s) ds \\ \boldsymbol{\eta}_{2k}(t) &= - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{g}}^T(s) \mathbf{S}_k \dot{\mathbf{g}}(s) ds \\ \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

由引理可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{1k}(t) + \boldsymbol{\eta}_{2k}(t) &\leq \boldsymbol{\xi}^T(t) \{[\tau - \tau(t)] \mathbf{Z}_{1k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}_{1k} - \\ &\quad \mathbf{E}_1^T \mathbf{Z}_{1k} - \mathbf{Z}_{1k}^T \mathbf{E}_1 + \tau(t) \mathbf{Z}_{2k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{E}_2^T \mathbf{Z}_{2k} - \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}_{2k}^T \mathbf{E}_2 \xi(t) \quad (18)$$

由式(16)~式(18)可知

$$\dot{V}_k(t) \leq \xi^T(t) \{ \Phi_k + [\tau - \tau(t)] \times \mathbf{Z}_{1k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}_{1k} + \tau(t) \mathbf{Z}_{2k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}_{2k} \} \xi(t) = \xi^T(t) \Theta_k \xi(t) \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \Phi_k + [\tau - \tau(t)] \mathbf{Z}_{1k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}_{1k} + \\ &\quad \tau(t) \mathbf{Z}_{2k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}_{2k} \\ \Theta_k &= \mathbf{e}_1^T \mathbf{P}_k \boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{Q}_k \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3^T \mathbf{Q}_k \mathbf{e}_3 + \\ &\quad \boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{S}_k \boldsymbol{\eta}_k - \mathbf{E}_1^T \mathbf{Z}_{1k} - \mathbf{Z}_{1k}^T \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2^T \mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{Z}_{2k}^T \mathbf{E}_2 \end{aligned}$$

如果  $\Theta_k < 0$ , 则存在一个标量  $\beta > 0$ , 使得下式成立

$$\dot{V}_k(t) \leq -\beta \|\xi(t)\|^2 < 0$$

则系统是渐近稳定的。

当  $\tau(t) \in [0, \tau]$  时,  $\tau - \tau(t) \in [0, \tau]$ ,  $\Theta_k$  是  $[\tau - \tau(t)] \mathbf{Z}_{1k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}_{1k}$  和  $\tau(t) \mathbf{Z}_{2k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}_{2k}$  的凸组合。 $\Theta_k < 0$  当且仅当满足:

$$\Phi_k + \tau \mathbf{Z}_{1k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}_{1k} < 0, \Phi_k + \tau \mathbf{Z}_{2k}^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}_{2k} < 0 \quad (20)$$

即

$$\begin{bmatrix} \Phi_k & \tau \mathbf{Z}_{1k}^T \\ * & -\tau \mathbf{S}_k \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} \Phi_k & \tau \mathbf{Z}_{2k}^T \\ * & -\tau \mathbf{S}_k \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

成立, 所以,

$$\begin{bmatrix} \Phi_k & \tau \mathbf{Z}_{1k}^T \\ * & -\tau \mathbf{S}_k \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} \Phi_k & \tau \mathbf{Z}_{2k}^T \\ * & -\tau \mathbf{S}_k \end{bmatrix} < 0, k = 2,$$

3, ..., q, 系统(14)是渐近稳定的。

证毕。

**注** 本文将间歇通信的多层网络, 转化成一个等价的时变时滞系统, 通过建立误差模型将网络系统的一致性转化为  $q-1$  个子系统的稳定性问题。定理 1 给出了系统 (14) 稳定的充分条件, 即系统 (1) 在控制协议(2)的作用下能够达到一致性。

### 3 仿真实例

两层拓扑网络由 3 组车辆智能体组成, 每组 4 个车辆智能体, 如图 1 所示。对于第  $n$  组第  $m$  个车辆智能体

$$\dot{x}_{n,m}(t) = u_{n,m}(t)$$

取多智能体的初始位置状态为  $x(0) = [5 \ 4 \ -3 \ 2 \ 1 \ 12 \ 7 \ 10 \ 9 \ 8 \ 11 \ 6]^T$ , 相关参数如右:

$$\Delta = \rho_1 \rho_2^T,$$

$$\rho_1 = [2 \ 1 \ 2 \ 1]^T, \quad \rho_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

求解定理中的 LMI, LMI 有解, 其部分解为:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -0.0023 & 0.0060 & 0.0051 & -0.0048 \\ 0.0060 & -0.0194 & -0.0130 & 0.0148 \\ 0.0051 & -0.0130 & -0.0123 & 0.0108 \\ -0.0048 & 0.0148 & 0.0108 & -0.0129 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} -0.0316 & 0.0251 & -0.0014 & 0.0032 \\ 0.0251 & -0.0836 & 0.0562 & -0.0008 \\ -0.0014 & 0.0562 & -0.0863 & 0.0318 \\ 0.0032 & -0.0008 & 0.0318 & -0.0169 \end{bmatrix}$$

仿真结果表明, 当采样间歇周期  $\tau = 0.26\text{s}$  时, 定理中的 LMI 是有解的, 此时车辆的位置轨迹如图 2 所示, 部分多智能体控制协议输入如图 3 所示, 各车辆的位置状态最终达到了一致。

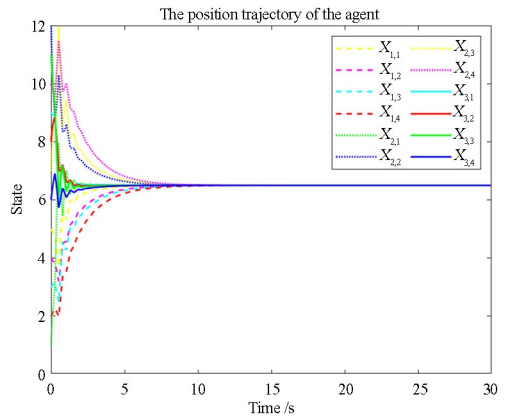


图 2 多智能体位置轨迹  
Fig.2 The position trajectory of the agent

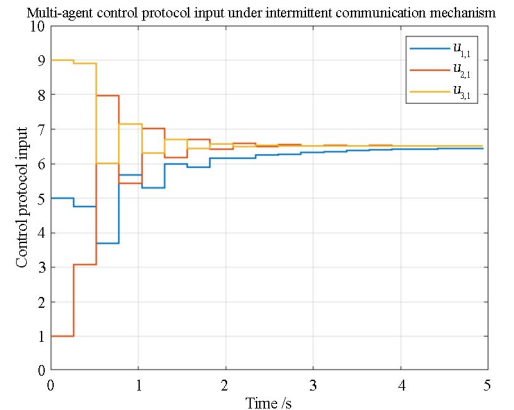


图 3 间歇通信机制下多智能体控制协议输入  
Fig.3 Multi-agent control protocol input under intermittent communication mechanism



## 4 结论

本文讨论了在间歇通信机制下的多层拓扑多智能体系统的状态一致性问题,提出了有效的一致性控制协议.首先,基于模型变换将多智能体系统的一致性等问题等效转化为线性时滞系统的稳定性问题.其次,利用 Lyapunov-Krasovskii 函数法和凸组合技术,给出了 LMI 形式的时滞相关稳定性判据并求解.最后,仿真实例验证了所提方法的有效性.

## 参考文献

- [1] PENG C, LI F Q. A survey on recent advances in event-triggered communication and control [J]. *Information Sciences*, 2018, 457/458: 113–125.
- [2] PANTELIDES C P, NELSON P A. Continuous pulse control of structures with material non-linearity [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1995, 24(2): 263–282.
- [3] ZHANG W B, TANG Y, HUANG T W, et al. Consensus of networked euler-lagrange systems under time-varying sampled-data control [J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 14(2): 535–544.
- [4] ARASTOO R, MOTEE N, KOTHARE M V. Optimal sparse output feedback control design: a rank constrained optimization approach [EB/OL]. 2014; arXiv: 1412.8236. <http://arxiv.org/abs/1412.8236>
- [5] NAGAHARA M, QUEVEDO D E, NESIC D. Maximum hands-off control: a paradigm of control effort minimization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 61(3): 735–747.
- [6] HE S C, LIU X D, LU P L, et al. Distributed finite-time consensus algorithm for multiagent systems via aperiodically intermittent protocol [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, 69(7): 3229–3233.
- [7] 宋娜, 洪小敏, 周川. 通信受限的网络化多智能体系统编队控制[J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(2): 163–171.  
SONG N, HONG X M, ZHOU C. Formation control of networked multi-agent system with communication constrains [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(2): 163–171. (in Chinese)
- [8] 吴银平, 王荣浩, 秦霞. 多智能体一致性算法在孤岛微电网二次控制中的应用[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(1): 18–29.  
WU Y P, WANG R H, QIN X. Application of multi-agent consistency algorithm in secondary control of island microgrid [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(1): 18–29. (in Chinese)
- [9] 柴洁, 过榴晓, 陈晶, 等. 二阶多智能体系统的线性广义一致性[J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(1): 80–86.  
CHAI J, GUO L X, CHEN J, et al. Linear generalized consensus of second-order multi-agent systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(1): 80–86. (in Chinese)
- [10] LIU J, WU Y B, XUE L, et al. A new intermittent control approach to practical fixed-time consensus with input delay [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, 70(6): 2186–2190.
- [11] LI B Q, WEN G G, PENG Z X, et al. Fully distributed consensus tracking of stochastic nonlinear multiagent systems with Markovian switching topologies via intermittent control [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(5): 3200–3209.
- [12] KIVELÄ M, ARENAS A, BARTHELEMY M, et al. Multilayer networks [J]. *Journal of Complex Networks*, 2014, 2(3): 203–271.
- [13] REN J, SONG Q, GAO Y B, et al. Leader-following consensus of delayed neural networks under multi-layer signed graphs [J]. *Neurocomputing*, 2021, 450: 168–182.
- [14] DUAN Z X, ZHAI G S, XIANG Z R. State consensus for hierarchical multi-agent dynamical systems with inter-layer communication time delay [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(3): 1235–1249.
- [15] DUAN Z X, ZHAI G S, XIANG Z R. Exponential consensus for hierarchical multi-agent systems with switching topology and inter-layer communication delay [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2016, 10(4): 451–460.