

# 轴向运动复合材料薄壁梁的横向振动分析<sup>\*</sup>

郭庆 吕世伟 富强 沈振兴<sup>†</sup>

(燕山大学 河北省重型装备与大型结构力学可靠性重点实验室,秦皇岛 066004)

**摘要** 研究可轴向运动复合材料薄壁梁的动力学特性.基于 VAM(变分渐近法)复合材料薄壁梁理论,采用 Euler-Bernoulli 梁模型并根据 Hamilton 原理来建立复合材料薄壁梁的动力学方程.应用假设模态法对薄壁梁进行自由振动分析,通过比较研究验证了该建模方法的正确性,并分析了几何参数和物理参数对薄壁梁固有频率的影响.推导了轴向运动复合材料薄壁梁的横向振动方程,借助四阶 Runge-Kutta 法进行数值计算,研究了不同纤维铺层方式和不同匀速度大小对可轴向运动复合材料薄壁梁横向振动末端位移响应的影响.

**关键词** 轴向运动梁, 叠层复合材料, 薄壁梁, 假设模态法, 横向振动

中图分类号:V414

文献标志码:A

## Transverse Vibration Analysis of Axially Moving Composite Thin-Walled Beams<sup>\*</sup>

Guo Qing Lv Shiwei Fu Qiang Shen Zhenxing<sup>†</sup>

(Key Laboratory of Mechanical Reliability for Heavy Equipment and Large Structures of Hebei Province,  
Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract** Dynamics of axially moving laminated composite thin-walled beams is studied in the paper. Based on the variational asymptotic method (VAM) for the composite thin-walled beams, and using the Euler-Bernoulli beam model and Hamilton's principle, the dynamical equations of the composite thin-walled beam are established. The free vibration of the thin-walled beam is analyzed by the assumed mode method, and the accuracy of the modeling approach is verified by comparison to the other approaches. Then, the transverse vibration equation of the axially moving composite thin-walled beams is derived, which is solved numerically by the fourth-order Runge-Kutta method. Lastly, the effects of various fiber lay-up techniques and uniform velocities on the tip displacement response are investigated.

**Key words** axially moving beam, laminated composites, thin-walled beams, assumed mode method, transverse vibration

### 引言

随着航天技术的不断进步,航天器上搭载的各

种挠性附件的种类和数量也在不断增加,为了提高空间利用率,这些挠性附件通常被制成可伸缩结构进行储存,入轨后展开工作.可伸缩复合材料薄壁

2023-11-08 收到第 1 稿,2023-12-02 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 河北省自然科学基金资助项目(A2021203011), Natural Science Foundation of Hebei Province of China (A2021203011).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail:shenzx@ysu.edu.cn

梁结构是其中一种常见的结构形式,具有轻质、高强度、高刚度、耐腐蚀等优异性能,被广泛应用于航天领域.然而,在伸展初始阶段,由于储存在根部的驱动力以及结构自身的初始挠度会诱发结构产生横向振动,可能导致失稳,因此研究薄壁梁在展开过程中的动力学响应至关重要.

对复合材料梁结构的研究是当前空间结构动力学研究的热点之一,许多学者通过不同梁模型和不同研究方法对其固有频率进行了广泛研究.任勇生等<sup>[1]</sup>以旋转复合材料薄壁梁为研究对象,考虑剪切变形,研究了纤维铺设角、转速和结构参数对其振动频率的影响.Lee 等<sup>[2]</sup>基于经典梁理论的可处理传递矩阵法,研究了三种不同端部条件下轴向拉伸载荷和运动速度对轴向运动梁固有频率的影响.陈强等<sup>[3]</sup>基于动力刚度矩阵法,分析了轴向变速运动弯曲梁随着轴向运动速度、加速度、轴向受力和边界条件对固有频率的影响.刘涛等<sup>[4]</sup>基于动力学系统的对称破缺理论和广义多辛方法,发展了保结构分析方法,对可轴向运动的功能梯度梁横向振动频率分析,得到的前六阶频率值与复模态法得到的结果吻合较好.

可轴向运动梁展开过程中的动力学特性对其性能具有重要影响,在之前的研究中,许多学者针对不同角度对可轴向运动梁动力学进行了分析,包括不同运动速度、耦合条件、研究方法和不同材料等.Al-Bedoor 等<sup>[5]</sup>给出了轴向展开梁在不同端部条件下梁横向振动的近似解析解.李俊峰等<sup>[6]</sup>利用动量矩定理推导了带挠性伸展附件的航天器一轴向可伸展梁系统的刚—柔耦合动力学方程,接着,程绪铨等<sup>[7]</sup>分析了初始振动、姿态角运动和姿态角速率对挠性梁伸展振动的影响.刘燕等<sup>[8]</sup>根据高阶剪切效应的层合理论、气动弹性活塞理论,由 Hamilton 原理建立了可轴向运动实心矩形截面复合材料层合梁的非线性动力学方程,研究了其在伸展和收缩过程中的振动特性.Wang 等<sup>[9]</sup>研究了具有时变速度的航天器天线,以轴向运动的悬臂梁为动力学模型,利用扩展的 Hamilton 原理,建立了轴向运动 Euler-Bernoulli 梁的运动偏微分方程,并重点分析了变速度轴向运动梁的动力学行为.Park 等<sup>[10]</sup>在推导可轴向运动梁的动力学方程时同时考虑了纵向位移和横向位移,包括非线性效应,采用非线性卡门应变理论对轴向伸展和收缩运动梁进

行振动分析,相比单纯考虑横向位移的研究,导出的纵向运动方程是线性的,与横向运动不耦合,而横向运动方程是非线性的,与纵向运动耦合.Piovan 等<sup>[11]</sup>选取功能梯度材料研究了轴向运动柔性梁的横向振动,并使用有限单元法分析了梁横向振动,得到不同伸展速度和不同梯度指标下系统的动态响应数值解.Banichuk 等<sup>[12]</sup>采用多尺度方法对轴向运动层压复合梁的振动进行了分析,考虑了层压板类型及运动速度大小对系统振动响应、固有频率和稳定性边界的影响.王忠民等<sup>[13]</sup>使用绝对节点坐标法,建立了变长度 Euler-Bernoulli 梁单元模型,基于虚功原理,得到轴向伸展悬臂梁系统的非线性动力学方程,分析了材料特性参数和伸展规律对悬臂梁伸展过程中的末端挠度响应影响.

此前的研究主要集中在对各种实心截面复合材料梁的轴向运动展开过程进行动力学特性研究,但是对于可轴向运动叠层复合材料薄壁梁结构的研究较为鲜见.本文基于 Euler-Bernoulli 梁模型<sup>[14]</sup>和 VAM 薄壁梁理论<sup>[15]</sup>,建立了可轴向运动的复合材料薄壁梁动力学方程,分析了不同纤维铺层方式和不同匀速度大小对轴向运动的复合材料薄壁梁振动末端位移响应的影响.

## 1 复合材料薄壁梁的动力学方程

### 1.1 位移场

建立如图 1 所示薄壁梁模型,薄壁梁的长度用  $L$  表示,厚度用  $h$  表示,中间表面的曲率半径用  $r$  表示,假定: $r \ll L, h \ll r$ .为便于描述,建立整体坐标系  $(x, y, z)$  和局部坐标系  $(x, s, n)$ ,  $s$  和  $n$  方向分别表示截面中线的切线方向和外法线方向.

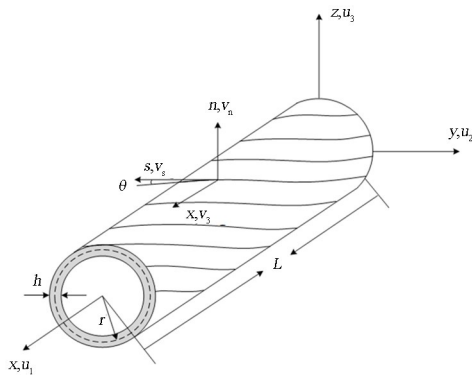


图 1 复合材料薄壁梁模型

Fig.1 Composite thin-walled beams model

基于 VAM 薄壁梁理论,任意点 $(x, y, z)$ 在整体坐标系下可表示为梁中面上某点的位移<sup>[16]</sup>:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= U_1(x, t) - y(s)U_2'(x, t) - \\ &\quad z(s)U_3'(x, t) + g(s, x, t) \\ u_2(x, y, z, t) &= U_2(x, t) - z(s)\varphi(x, t) \\ u_3(x, y, z, t) &= U_3(x, t) + y(s)\varphi(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $U_1(x, t)$ 、 $U_2(x, t)$ 、 $U_3(x, t)$ 、为横截面沿 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向的刚体位移, $U_2'$ 、 $U_3'$ 为横截面绕 $y$ 、 $z$ 轴的转角; $\varphi(x, t)$ 为横截面绕 $x$ 轴的扭转角; $y(s)$ 、 $z(s)$ 是环向坐标 $s$ 的函数; $g(s, x, t)$ 为薄壁轴的翘曲函数。

## 1.2 应变能

应变能密度可表示为:

$$\begin{aligned} 2\Phi &= A_{11}\gamma_{xx}^2 + A_{22}\gamma_{ss}^2 + 4A_{66}\gamma_{xs}^2 + \\ &\quad 2A_{12}\gamma_{xx}\gamma_{ss} + 4A_{16}\gamma_{xx}\gamma_{xs} + 4A_{26}\gamma_{ss}\gamma_{xs} \end{aligned} \quad (2)$$

其中:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z_k - z_{k-1}), (i, j = 1, 2, 6) \quad (3)$$

$z_k$ 、 $z_{k-1}$ 分别表示复合材料第 $k$ 层单层板的上、下表面坐标, $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ 表示第 $k$ 层的弹性矩阵系数。

应变在曲线坐标系下可表示为:

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ 2\gamma_{xs} &= \frac{\partial v_x}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \\ \gamma_{ss} &= \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{v_n}{r} \end{aligned} \quad (4)$$

其中切向位移和法向位移可由主坐标系下位移表示:

$$\begin{aligned} v_s &= u_2 \frac{dy}{ds} + u_3 \frac{dz}{ds} \\ v_n &= u_2 \frac{dz}{ds} - u_3 \frac{dy}{ds} \end{aligned} \quad (5)$$

得到薄壁梁在环向坐标系 $(s, x, n)$ 下的位移,可表示为:

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z, t) &= U(x) - y(s)U_2' - z(s)U_3' + g(s, x, t) \\ v_s(x, y, z, t) &= U_2(x) \frac{dy}{ds} + U_3(x) \frac{dz}{ds} + \varphi(x, t)r_n \\ v_n(x, y, z, t) &= U_2(x) \frac{dz}{ds} - U_3(x) \frac{dy}{ds} - \varphi(x, t)r_t \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $r_n$ 和 $r_t$ 分别表示任一点位置矢量在法向和切向的投影,具体表达式为:

$$\begin{aligned} r_n &= y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \\ r_t &= z \frac{dz}{ds} + y \frac{dy}{ds} \end{aligned} \quad (7)$$

在环向坐标系中,用 $v_x$ 、 $v_s$ 、 $v_n$ 代表任一点轴向、切向和法向的位移.对于无内压作用壳体的情况,产生的环向应力很小,可以忽略不计,因此:

$$N_{ss} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{ss}} = 0 \quad (8)$$

$$\gamma_{ss} = -\frac{1}{A_{22}}(A_{12}\gamma_{xx} + 2A_{26}\gamma_{xs}) \quad (9)$$

将 $\gamma_{ss}$ 代入应变能公式(2)中,可以得到:

$$2\Phi = A(s)\gamma_{xx}^2 + 2B(s)\gamma_{xx}\gamma_{xs} + C(s)\gamma_{xs}^2 \quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned} A(s) &= A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \\ B(s) &= 2\left(A_{16} - \frac{A_{12}A_{16}}{A_{22}}\right) \\ C(s) &= 4\left(A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}}\right) \end{aligned}$$

参数 $A(s)$ 、 $B(s)$ 、 $C(s)$ 分别表示轴向刚度、耦合刚度和剪切刚度。

复合材料薄壁梁的应变能为:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \oint \varphi ds dn \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \{\gamma_{xx} \quad \gamma_{xs}\} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix} dx \end{aligned} \quad (11)$$

将式(6)代入式(4)中可得到局部坐标下应变表达式:

$$\gamma_{xx} = U_1'(x) - y(s)U_2'' - z(s)U_3'' \quad (12)$$

$$2\gamma_{xs} = r_n \varphi'(x) \quad (13)$$

薄壳力 $N_{xx}$ 和 $N_{xs}$ 可以写为:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= A(s)\gamma_{xx} + B(s)\gamma_{xs} \\ N_{xs} &= \frac{1}{2}[B(s)\gamma_{xx} + C(s)\gamma_{xs}] \end{aligned} \quad (14)$$

改写为应变关系式为:

$$\gamma_{xs} = \frac{2N_{xs}}{C(s)} - \frac{B(s)}{C(s)}\gamma_{xx} \quad (15)$$

利用应力应变关系式(14),可得到用位移和扭转角表示的应变能:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \{\delta\}^T \mathbf{K}_{4 \times 4} \{\delta\} dx \quad (16)$$

其中, $\{\delta\}^T = \{U_1' \quad \varphi' \quad U_3'' \quad U_2''\}$ ,刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 是4

$\times 4$  的对称矩阵,其分量  $K_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$  由复合材料截面几何参数和材料参数决定。

### 1.3 动能

对位移场(1)式时间求导可以得到系统的动能表达式:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \oint_A \rho (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) dA dx \quad (17)$$

根据薄壁梁的几何特点,忽略位移场中的高阶小量,即:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(x, y, z, t) &= \dot{U}_1(x, t) \\ \dot{u}_2(x, y, z, t) &= \dot{U}_2(x, t) - z(s) \dot{\varphi}(x, t) \\ \dot{u}_3(x, y, z, t) &= \dot{U}_3(x, t) + y(s) \dot{\varphi}(x, t) \end{aligned} \quad (18)$$

### 1.4 动力学方程

根据 Hamilton 原理可得到控制方程:

$$\begin{aligned} -F'_x + I_1 &= 0 & -M'_x + I_2 &= 0 \\ M'_y + I_3 &= 0 & M'_z + I_4 &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} F_x &= \oint N_{xx} ds & M_x &= \oint N_{xs} r_n ds \\ M_y &= -\oint N_{xx} z ds & M_z &= -\oint N_{xx} y ds \\ I_1 &= m_0 \ddot{U}_1 \\ I_2 &= (I_y + I_z) \ddot{\varphi} - S_y \ddot{U}_2 + S_z \ddot{U}_3 \\ I_3 &= m_0 \ddot{U}_3 - S_z \ddot{\varphi} \\ I_4 &= m_0 \ddot{U}_2 - S_y \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

式中,  $F_x$ 、 $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_z$  分别表示轴向力、绕  $x$  轴扭转力矩,绕  $y$  轴和  $z$  轴弯矩;  $m_0$ 、 $S_y$ 、 $S_z$ 、 $I_y$ 、 $I_z$ 、 $I$  与截面几何性质和质量密度有关,表达式为:

$$\begin{aligned} m_0 &= \oint_A \rho dA, \quad S_y = \oint_A \rho z dA, \quad S_z = \oint_A \rho y dA \\ I_y &= \oint_A \rho z^2 dA, \quad I_z = \oint_A \rho y^2 dA, \quad I = \oint_A \rho yz dA \end{aligned}$$

可以推出复合材料薄壁梁的动力学方程为:

$$\begin{aligned} K_{11} U_1'' + K_{12} \varphi'' + K_{13} U_3'' + K_{14} U_2'' + m_0 \ddot{U}_1 &= 0 \\ K_{12} U_1'' + K_{22} \varphi'' + K_{23} U_3'' + K_{24} U_2'' + \\ (I_y + I_z) \ddot{\varphi} - S_z \ddot{U}_3 + S_y \ddot{U}_2 &= 0 \\ K_{13} U_1'' + K_{23} \varphi'' + K_{33} U_3'' + K_{34} U_2'' + S_z \ddot{U}_2 + \\ m_0 \ddot{U}_3 &= 0 \\ K_{14} U_1'' + K_{24} \varphi'' + K_{34} U_3'' + K_{44} U_2'' - S_y \ddot{U}_2 + \end{aligned}$$

$$m_0 \ddot{U}_2 = 0 \quad (20)$$

本文研究的复合材料薄壁梁为周向均匀铺层(CUS),根据薄壁梁模型的几何特征可知,拉伸刚度、拉剪耦合刚度和剪切刚度沿截面环向积分均为常数,有  $K_{13} = K_{14} = K_{23} = K_{24} = K_{34} = 0$ ,且  $S_y = S_z = 0$ ,可得到 CUS 构型复合材料薄壁梁控制方程为:

$$\begin{aligned} K_{11} U_1'' + K_{12} \varphi'' - m_0 \ddot{U}_1 &= 0 \\ K_{12} U_1'' + K_{22} \varphi'' - (I_y + I_z) \ddot{\varphi} &= 0 \\ K_{33} U_3^{(4)} + m_0 \ddot{U}_3 &= 0 \\ K_{44} U_2^{(4)} + m_0 \ddot{U}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

## 2 固有频率求解方法

假设复合材料薄壁悬臂梁自由振动模态函数为<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} U_1(x, t) &= \sum_{j=1}^N U_j(t) \alpha_j(x) \\ U_2(x, t) &= \sum_{j=1}^N V_j(t) \beta_j(x) \\ U_3(x, t) &= \sum_{j=1}^N W_j(t) \beta_j(x) \\ \varphi(x, t) &= \sum_{j=1}^N \varphi_j(t) \theta_j(x) \end{aligned} \quad (22)$$

其中:  $\alpha_j$ 、 $\beta_j$ 、 $\theta_j$  表示轴的振型函数,满足悬臂梁的运动学和力边界条件,其元素分别为<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \sin \frac{\kappa_j x}{L}, \kappa_j = \left( j - \frac{1}{2} \right) \pi, j = 1, 2, 3 \dots \\ \beta_j &= \cos \left( \frac{\epsilon_j x}{L} \right) - \cosh \left( \frac{\epsilon_j x}{L} \right) + \\ &\quad \lambda \left[ \sin \left( \frac{\epsilon_j x}{L} \right) - \sinh \left( \frac{\epsilon_j x}{L} \right) \right] \\ \lambda &= -\frac{\cos \epsilon_j + \cosh \epsilon_j}{\sin \epsilon_j + \sinh \epsilon_j} \\ \theta_j &= \sqrt{2} \sin \left( \frac{\gamma_j x}{L} \right), \gamma_j = \pi \left( j - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

式中,  $\epsilon_j$  是超越方程  $\cos(\epsilon_n L) \cosh(\epsilon_n L) = -1$  的特征根:

$$\epsilon_n L = \begin{cases} 1.8751, n = 1 \\ 4.69409, n = 2 \\ 7.85476, n = 3 \\ (n - 0.5)\pi, n \geq 4 \end{cases}$$

整理化简得:

$$M \ddot{X} + K X = 0 \quad (23)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -K_{11}A_{ij} & -K_{12}B_{ij} & 0 & 0 \\ -K_{21}D_{ij} & -K_{22}E_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}G_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}G_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 C_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (I_y + I_z)F_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 H_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_0 H_{ij} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \int_0^L \alpha_i \alpha_j dx, \quad B_{ij} = \int_0^L \alpha_i \theta_j'' dx,$$

$$C_{ij} = \int_0^L \alpha_i \alpha_j dx, \quad d_{ij} = \int_0^L \theta_i \alpha_j'' dx,$$

$$E_{ij} = \int_0^L \theta_i \theta_j'' dx, \quad F_{ij} = \int_0^L \theta_i \theta_j dx,$$

$$G_{ij} = \int_0^L \beta_i \beta_j^{(4)} dx, \quad H_{ij} = \int_0^L \beta_i \beta_j dx,$$

$$\mathbf{X} = [U_{1j} \quad \varphi_j \quad U_{3j} \quad U_{2j}]^T.$$

由方程(23)可导出复合材料薄壁梁的特征方程:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \quad (24)$$

给定复合材料薄壁梁的物理参数和惯性参数,通过数值求解可以得到系统的特征值,进而得到复合材料薄壁梁的固有频率。

### 3 可轴向运动复合材料薄壁梁横向振动

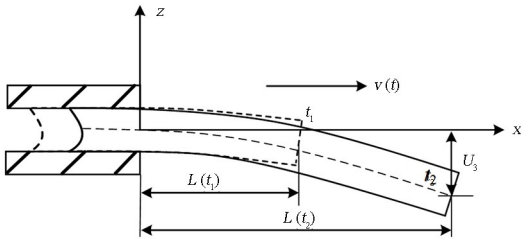


图2 悬臂式可轴向运动复合材料薄壁梁模型  
Fig.2 Axially moving composite thin-walled beams with a fixed end

对于复合材料薄壁梁在固定机构中以轴向速度  $v(t)$  沿轴向伸展和收缩的模型(见图2)而言,研究薄壁梁末端的振动响应是十分必要的,其横向振动控制方程为:

$$K_{33} U_3^{(4)} + m_0 \frac{D^2 U_3}{Dt^2} = 0 \quad (25)$$

将方程(25)的解写成如下形式:

$$U_3(x, L) = \sum_{j=1}^n W_j(t) \beta_j(x, L) \quad (26)$$

对悬臂梁的横向振动模态函数进行修正,得到如下形式的模态函数<sup>[9]</sup>

$$\beta_j(x, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[ \cos \frac{\epsilon_j}{L} x - \cosh \frac{\epsilon_j}{L} x - \alpha_j \left( \sin \frac{\epsilon_j}{L} x - \sinh \frac{\epsilon_j}{L} x \right) \right] \quad (27)$$

其中,  $\epsilon_j$  是超越方程  $\cos \epsilon_j \cosh \epsilon_j = -1$  的特征根,

$\alpha_j = \frac{\cos \epsilon_j + \cosh \epsilon_j}{\sin \epsilon_j + \sinh \epsilon_j}$ , 式中, 瞬时模态函数  $\beta_j(x, L)$

不仅与  $x$  有关, 而且与悬臂梁的长度  $L(t)$  有关, 由于  $L(t)$  随时间变化, 因此  $\beta_j(x, L)$  也与时间有关。

定义复合函数求导公式为:

$$\frac{DU_3}{Dt} = \frac{\partial U_3}{\partial t} + v \frac{\partial U_3}{\partial x}$$

$$\frac{D^2 U_3}{Dt^2} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 U_3}{\partial x \partial t} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial U_3}{\partial x} + v^2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2}$$

将假设模态式(27)代入偏微分方程式(25)中, 得到含有模态形式的偏微分方程, 根据振型函数的正交归一性质, 进一步化简整理可得:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{K} \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (28)$$

其中:

$$m_{ji} = \int_0^{L(t)} \beta_j \cdot \beta_i dx$$

$$c_{ji} = \int_0^{L(t)} (2\dot{\beta}_j + 2v\beta_j') \cdot \beta_i dx$$

$$k_{ji} = \int_0^{L(t)} \left[ (\ddot{\beta}_j + 2v\dot{\beta}_j' + v^2\beta_j'' + \dot{v}\beta_j') + \frac{K_{33}}{m_0} \cdot \beta_j^{(4)} \right] \cdot \beta_i dx$$

可轴向运动复合材料悬臂梁的初始位移方程和初始速度方程可表示为:

$$U_3(x, 0) = U_3(L_0, 0) \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{x}{L_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L_0} \right) \right] \quad (29)$$

$$\frac{\partial U_3(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial U_3(L_0, 0)}{\partial t} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{x}{L_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L_0} \right)^3 \right] \quad (30)$$

## 4 结果与讨论

### 4.1 固有频率求解

根据式(24)可以计算复合材料薄壁梁前两阶固有频率, 并分别与文献[17]梁模型和 ANSYS 有限壳单元模型进行比较。

根据表1结果可知本文结果与 ANSYS 有限壳单元和文献[17]结果吻合较好, 将本文计算结果与 ANSYS 结果对比相对误差最大仅 1.99%, 计算



结果比较精确.另外,表中前两阶挥舞和摆阵的模态频率相近,这是因为对于圆形截面而言,竖直( $z$ 轴方向)和水平( $y$ 轴方向)具有相同的几何形状和材料特性,因此振动特性也是非常接近的.

表 1 不同铺层角复合材料薄壁梁的固有频率  
Table 1 Natural frequencies of different laying methods of composite thin-walled beams

| Lamination                | Mode             | ANSYS    | Natural frequency/Hz<br>Ref.[17](Relative error) | Present (Relative error) |
|---------------------------|------------------|----------|--|--------------------------|
| $[0_2/90_2/45_2/-45_2]_s$ | First flapping   | 2.4491   | 2.5 (2.08%)                                      | 2.4391 (-0.41%)          |
|                           | Second flapping  | 15.1196  | 15.1 (-0.13%)                                    | 15.2855 (1.10%)          |
|                           | First sweeping   | 2.4493   | 2.5 (2.07%)                                      | 2.4391 (-0.42%)          |
|                           | Second sweeping  | 15.1206  | 15.1 (-0.14%)                                    | 15.2855 (1.09%)          |
|                           | First torsional  | 48.6767  | 49.2 (1.08%)                                     | 49.3989 (1.48%)          |
|                           | Second torsional | 146.0425 | 147.5 (1.00%)                                    | 148.1967 (1.48%)         |
| $[45/-45]_8$              | First flapping   | 2.0974   | 2.1 (0.12%)                                      | 2.0829 (-0.69%)          |
|                           | Second flapping  | 13.0323  | 13.1 (0.52%)                                     | 13.0533 (0.16%)          |
|                           | First sweeping   | 2.0976   | 2.1 (0.11%)                                      | 2.0829 (-0.70%)          |
|                           | Second sweeping  | 13.0332  | 13.1 (0.51%)                                     | 13.0533 (0.15%)          |
|                           | First torsional  | 56.3028  | 57.0 (1.24%)                                     | 57.4248 (1.99%)          |
|                           | Second torsional | 168.9226 | 172.0 (1.82%)                                    | 172.2744 (1.98%)         |

表 2 复合材料薄壁梁的材料参数  
Table 2 Material parameters of composite thin-walled beams

| $t_k/\text{mm}$ | $E_1/\text{GPa}$ | $E_2/\text{GPa}$ | $G_{12}/\text{GPa}$ | $\mu_{12}$ | $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$ |
|-----------------|------------------|------------------|---------------------|------------|-------------------------------|
| 0.635           | 25.8             | 8.7              | 3.5                 | 0.34       | 1672                          |

采用 16 层等厚单层板铺设的方式来构建复合材料薄壁梁,并保持铺设角均为  $\theta=60^\circ$ ,通过改变薄壁梁的长度来改变其长径比,并研究长径比对复合材料薄壁梁前四阶固有频率的影响,同时保持薄壁梁的直径  $d$  不变.结果如图 3 所示,随着复合材料薄壁梁的长径比增大固有频率逐渐降低.

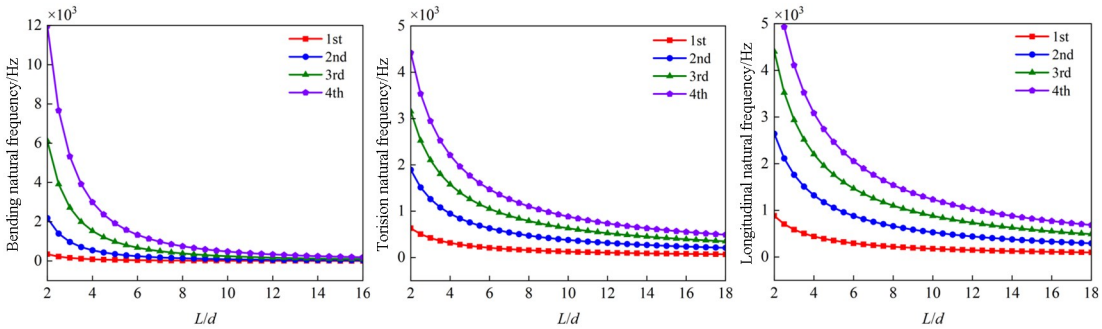


图 3 长径比对复合材料薄壁梁固有频率的影响( $\theta=60^\circ$ )  
Fig.3 Natural frequencies of composite thin-walled beams with different aspect ratio ( $\theta=60^\circ$ )

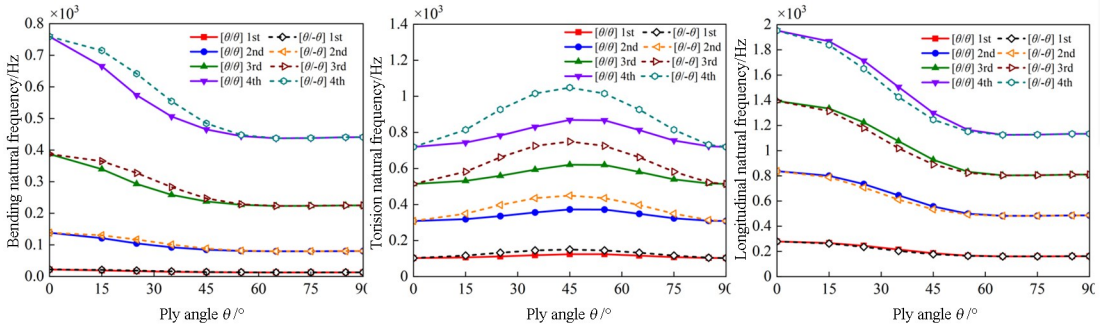


图 4 纤维铺设方式对复合材料薄壁梁固有频率的影响  
Fig.4 Natural frequencies of composite thin-walled beams with different fiber plying modes

研究纤维铺设方式和弹性模量对复合材料薄壁梁固有频率的影响,如图4和图5所示.取表2材料参数,长度 $L=3.52\text{m}$ ,中面半径 $r=0.176\text{m}$ ,16层等厚铺设.

铺层方式为 $[\theta_s/\theta_s]$ 和 $[\theta_s/-\theta_s]$ ,改变铺层角取向,观察不同纤维铺设方式对复合材料薄壁梁固有频率的影响.结果如图4所示,采用反对称铺设方式时,复合材料薄壁梁的弯曲固有频率和扭转固有频率比采用对称铺设方式时高,而纵向固有频率较低.

在图5中,随着模量比值的增大,弯曲固有频率和纵向固有频率也随之增加,而扭转固有频率则不随比值的变化而变化.

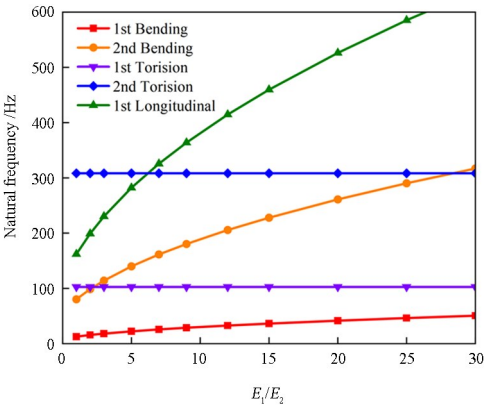


图5 模量比对复合材料薄壁梁固有频率的影响  
Fig.5 Natural frequencies of the composite thin-walled beams changes with the modulus ratio

4.2 轴向运动梁算例验证

系统动力学方程(28)是用模态坐标表示的时变系数偏微分方程,采用Runge-Kutta对方程进行数值求解,将模态坐标的数值解代入薄壁梁末端响应函数表达式,可得到用假设模态法计算得到的可轴向运动的悬臂梁末端位移近似解.文献[18]计算了各向同性柔性梁轴向运动时末端位移变化曲线,现使用文献[18]中提供的计算方法和本文中薄壁梁的几何和物理参数来进行计算验证本文方法的正确性.

假设各向同性薄壁梁弹性模量 $E=25.8\text{GPa}$ ,中面半径 $r=0.176\text{m}$ ,厚度 $h=10.16\text{mm}$ ,密度 $\rho=1672\text{kg/m}^3$ .在展开初始阶段,初始长度 $L_0=1.8\text{m}$ ,末端初始挠度 $U_3=5\text{mm}$ ;在收缩阶段,初始长度 $L_0=3\text{m}$ ,末端初始挠度 $U_3=10\text{mm}$ ,不考虑加速度项时,伸缩速度分为 $v=\pm 0.1\text{m/s}$ ,计算结

果与文献[18]进行对比,如图6所示,发现两种方法计算结果基本相同,从而验证了此方法的正确性和可行性.

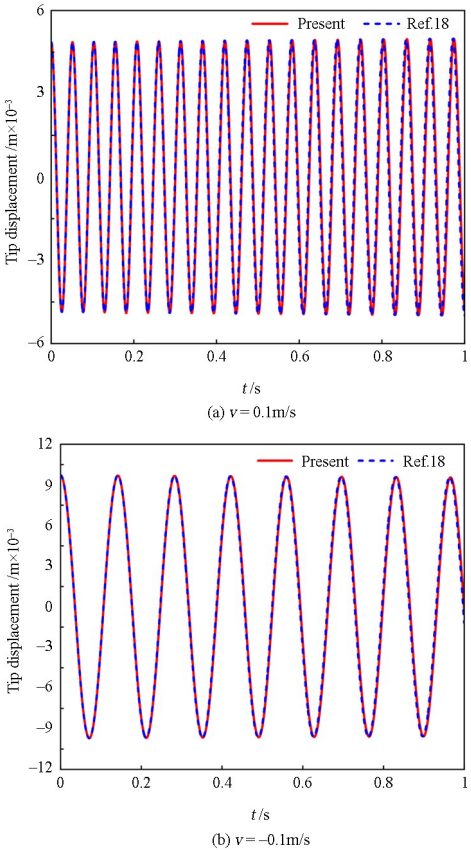


图6 轴向运动复合材料薄壁梁末端位移  
Fig.6 The tip displacement of axially moving composite thin-walled beams

接下来,本文将此方法应用于复合材料薄壁梁模型中,通过改变复合材料参数取值和轴向运动规律,研究可轴向运动复合材料薄壁梁横向振动末端位移响应变化.

4.3 铺设方式对末端位移影响

研究对称铺层和反对称铺层对薄壁梁末端位移的影响,纤维铺设方式分别为 $[15/30/75/60]_s$ 和 $[15/30/75/60/-60/-75/-30/-15]$ ,8等厚铺设,铺设厚度 $t_k=1.27\text{mm}$ ,其他材料参数和表2保持一致,观察两种铺设方式下可轴向运动复合材料薄壁梁横向振动末端位移变化.

选择初始伸展和收缩速度分别为 $\pm 1\text{m/s}$ ,初始条件不变,分别对两种铺层方式下薄壁梁展开过程进行分析.结果如图7所示,其振动频率受到铺设角对称和反对称铺设的影响,而整体振幅趋势不受影响.

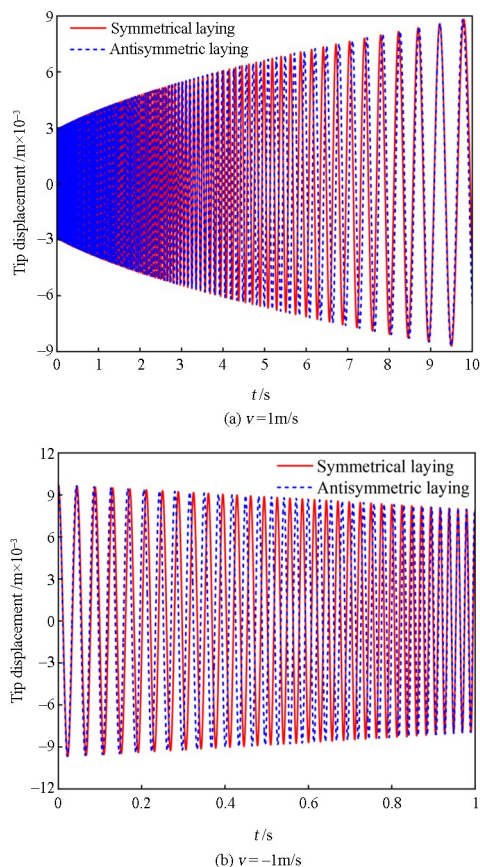


图7 不同纤维铺层方式下轴向运动复合材料薄壁梁末端位移  
Fig.7 The tip displacement of axially moving composite thin-walled beams with different fiber laying methods

#### 4.4 不同匀速度对轴向运动复合材料薄壁梁末端位移的影响

研究反对称铺层情况下复合材料薄壁梁在伸展和收缩过程中不同速度大小对薄壁梁末端位移的影响,铺层角度为 $[0/45/-45/90]_s$ ,8层等厚铺层。

计算结果如图8所示,可以发现在复合材料薄壁梁轴向匀速展开和收缩过程中,不同速度大小对振动特性有明显的影响。薄壁梁在轴向匀速展开过程中,随着时间的推移,外伸梁的长度逐渐增加,梁

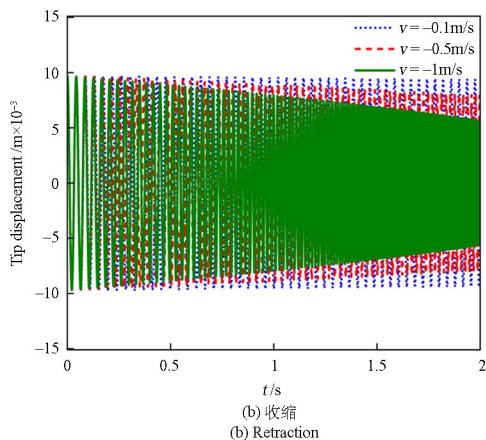
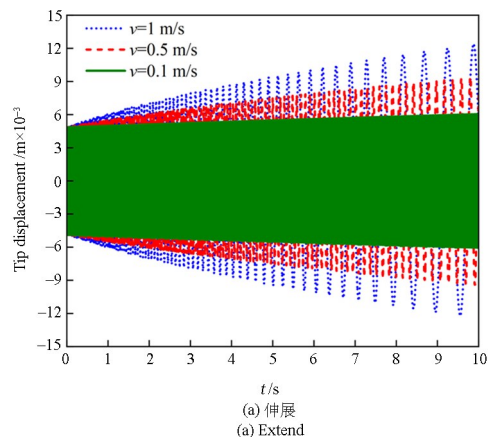


图8 不同速度下轴向运动复合材料薄壁梁末端位移  
Fig.8 The tip displacement of axially moving composite thin-walled beams with different speeds

长度的改变就会引起系统刚度和质量的变化,振动频率逐渐减小,末端振动位移逐渐增大。在匀速收缩过程中,随着时间的推移,外伸梁的长度逐渐减小,振动频率逐渐增加,末端振动位移逐渐减小。

## 5 总结

本文对复合材料薄壁梁固有频率进行了求解计算,并对可轴向运动复合材料薄壁梁展开和收缩过程进行了动力学分析,根据计算结果表明:

(1)复合材料薄壁梁随着长径比的增加,纵向振动、弯曲振动和扭转振动的固有频率逐渐减小,高阶模态变化趋势比低阶模态变化更为明显。

(2)反对称铺设的弯曲固有频率和扭转固有频率较对称铺设的复合材料薄壁梁的振动频率大,纵向固有频率较低,但纵向固有频率数量级较大,引起的变化可忽略不计。

(3)复合材料薄壁梁随着模量比值的增大,弯曲固有频率和纵向固有频率逐渐增加,而扭转固有频率不变。

(4)复合材料薄壁梁在伸展和收缩过程中,其振动频率受到纤维铺设方式的影响,而振幅整体趋势不受影响;速度的大小对梁的振动频率和振幅影响很大。

## 参考文献

- [1] 任勇生,代其义. 考虑剪切变形旋转运动复合材料薄壁梁的动力学特性[J]. 工程力学, 2014, 31(7): 215—222.



- composite thin-walled beams with shear deformation [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(7): 215—222. (in Chinese)
- [2] LEE J W, LEE J Y, LEE D M. Free vibration analysis of axially moving beams using the transfer matrix method [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2021, 35(4): 1369—1376.
- [3] 陈强, 杨国来, 王晓锋. 轴向变速运动弯曲梁的固有频率分析[J]. *工程力学*, 2015, 32(2): 37—44.  
CHEN Q, YANG G L, WANG X F. Analysis of the natural frequency of an axially moving beam with non-uniform velocity [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(2): 37—44. (in Chinese)
- [4] 刘涛, 周洋忻, 胡伟鹏. 轴向运动功能梯度梁横向振动问题的保结构分析[J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(6): 101—105.  
LIU T, ZHOU Y X, HU W P. Structure-preserving analysis on transverse vibration of functionally graded beam with an axial velocity [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(6): 101—105. (in Chinese)
- [5] AL-BEDOOR B, KHULIEF Y. An approximate analytical solution of beam vibrations during axial motion [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 192(1): 159—171.
- [6] 李俊峰, 王照林. 带挠性伸展附件的航天器姿态动力学研究[J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 1996, 36(10): 37—42.  
LI J F, WANG Z L. Attitude dynamics of a spacecraft with deploying appendages [J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 1996, 36(10): 37—42. (in Chinese)
- [7] 程绪铎, 王照林, 李俊峰. 航天器挠性梁伸展动力学特性数值分析[J]. *固体力学学报*, 2001, 22(1): 104—110.  
CHENG X D, WANG Z L, LI J F. Numerical analysis of deployment dynamics of flexible beam of a spacecraft [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2001, 22(1): 104—110. (in Chinese)
- [8] 刘燕, 张伟, 王冬梅. 可伸缩复合材料悬臂梁的非线性动力学建模及分析[J]. *动力学与控制学报*, 2014, 12(1): 24—29.  
LIU Y, ZHANG W, WANG D M. Nonlinear dynamics modeling and numerical analysis of telescoping-and-translating composite laminated cantilever beam [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2014, 12(1): 24—29. (in Chinese)
- [9] WANG L H, HU Z D, ZHONG Z, et al. Hamiltonian dynamic analysis of an axially translating beam featuring time-variant velocity [J]. *Acta Mechanica*, 2009, 206(3): 149—161.
- [10] PARK S, YOO H H, CHUNG J. Vibrations of an axially moving beam with deployment or retraction. *AIAA Journal*, 2013, 51(3): 686—696.
- [11] PIOVAN M, SAMPAIO R. Vibrations of axially moving flexible beams made of functionally graded materials [J]. *Thin-Walled Structures*, 2007, 46(2): 112—121.
- [12] BANICHUK N, JERONEN J, NEITTAANMÄKI P, et al. On the instability of an axially moving elastic plate [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 47(1): 91—99.
- [13] 王忠民, 吴力国. 基于变长度单元 ANCF 的轴向伸展悬臂梁振动分析[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(3): 186—191.  
WANG Z M, WU L G. Vibration analysis of axially deploying cantilever beam based on ANCF with length-varying beam element [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(3): 186—191. (in Chinese)
- [14] 高思禹, 毛晓晔, 丁虎, 等. 热环境中超临界黏弹性输流管道自由振动分析[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(6): 39—46.  
GAO S Y, MAO X Y, DING H, et al. Free vibration analysis on supercritical viscoelastic pipes conveying fluid in thermal environment [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(6): 39—46. (in Chinese)
- [15] BERDICHEVSKY V, ARMANIOS E, BADIR A. Theory of anisotropic thin-walled closed-cross-section beams [J]. *Composites Engineering*, 1992, 2(5/6/7): 411—432.
- [16] ARMANIOS E A, BADIR A M. Free vibration analysis of anisotropic thin-walled closed-section beams [J]. *AIAA Journal*, 1995, 33(10): 1905—1910.
- [17] SARAVANOS D, VARELIS D, PLAGIANAKOS T, et al. A shear beam finite element for the damping analysis of tubular laminated composite beams [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 291(3): 802—823.
- [18] 程顺, 沈振兴, 崔涛, 等. 带轴向运动柔性梁附件航天器的刚—柔耦合动力学分析[J]. *振动与冲击*, 2018, 37(2): 91—101+107.  
CHENG S, SHEN Z X, CUI T, et al. Rigid-flexible coupled dynamic analysis for a spacecraft with an axially moving flexible beam [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(2): 91—101+107. (in Chinese)