

功能梯度三相复合材料圆柱壳的非线性振动研究

高通¹ 郑慧莹^{2†}

(1. 惠阳航空螺旋桨有限责任公司, 保定 071051)

(2. 北京工业大学 材料与制造学部, 北京 100124)

摘要 论文研究了一种由环氧树脂、石墨烯纳米片、碳纤维制成的功能梯度三相复合材料圆柱壳的非线性振动响应。基于一阶剪切变形理论和 von-Karman 几何非线性关系, 考虑到温湿效应、气动力和外激励的共同作用, 利用 Hamilton 原理建立了两端固支圆柱壳的非线性偏微分运动方程。利用 Galerkin 法将非线性偏微分运动方程离散成一组相互耦合的二阶非线性常微分方程, 利用伪弧长延拓法求解非线性常微分方程组, 给出对应的幅频响应曲线。本论文中仅考虑湿度和外激励等参数的变化对新型三相复合材料圆柱壳结构非线性振动响应的影响, 分析了湿度和外激励的变化对功能梯度三相复合材料圆柱壳共振响应的影响。

关键词 圆柱壳, 三相复合材料, 外激励, 非线性振动

中图分类号: O322

文献标志码: A

Nonlinear Vibration Study of Functionally Graded Three-Phase Composite Cylindrical Shell

Gao Tong¹ Zheng Huiying^{2†}

(1. Huiyang Aviation Propeller Co., Baoding 071051, China)

(2. Faculty of Materials and Manufacturing, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract We study the nonlinear vibration response of functionally graded three-phase composite cylindrical shell, which is made of epoxy resin, Graphene NanoPlatelets and carbon fibers. Based on the first-order shear deformation theory and the von-Karman geometric nonlinear relation, the nonlinear partial differential equations of motion of the clamped cylindrical shell at both ends are established by Hamilton principle, taking into account the interaction of hygrothermal environment, aerodynamic force and external excitation. The nonlinear partial differential equations of motion are discretized into a set of coupled second-order nonlinear ordinary differential equations by Galerkin method. The nonlinear ordinary differential equations are solved by pseudo-arc length extension method, and the corresponding frequency-response curves are given. We only consider the influence of moisture and external excitation on the nonlinear vibration response of the new three-phase composite cylindrical shell, and the resonance response of functionally graded three-phase composite cylindrical shell under the influence of moisture and external excitation is analyzed.

Key words cylindrical shell, three-phase composite, external excitation, nonlinear vibration

引言

复合材料是指由两种或两种以上不同物质以不同方式组合而成的材料. 各种材料性能互补, 产生协同效应, 使复合材料的综合性能优于原组分材料. 随着复合材料性能指标的不断提高, 复合材料已广泛应用于航空航天、机械、船舶等工程领域. 而三相复合材料是由三种物质复合而成的一种新型复合材料, 其中一种材料是基质, 另外两种材料是增强材料. 三种材料的协同作用可以更好地互补优势, 使其综合性能更加优异, 所以三相复合材料在航空航天部件中具有广阔的应用前景.

功能梯度材料^[1]因其组分体积分数的连续变化而导致其宏观力学及热学性质呈梯度分布. 由于其具有诸多优越的材料性能, 并且性能梯度具有可设计性, 所以功能梯度材料在多种学科和工程领域中得到广泛应用. 然而由于存在梯度性质, 功能梯度材料的振动特性较各向同性材料而言相对复杂.

圆柱壳是航空航天、海洋、土木和机械工程中的关键部件. 航空航天领域中使用的圆柱壳必须满足特殊要求, 尤其是在太空应用中, 圆柱壳体暴露在湿温、气动力和外激励等复杂环境中, 所有这些因素在一定程度上影响了圆柱壳的非线性动力学特性. 一旦圆柱壳的振动特性发生改变, 会对圆柱壳产生严重破坏导致圆柱壳出现不可恢复的变形甚至损毁. 因此, 研究圆柱壳的非线性振动情况对设备的可靠性和稳定工作具有重要意义. 本文主要研究圆柱壳的非线性动力学问题.

了解复杂环境下圆柱壳的非线性共振行为, 以确保其可靠性是至关重要的. Narimani 等人^[2]利用一阶剪切理论推导出了圆柱壳的运动偏微分方程. Amabili 等人^[3]研究了薄壁圆柱壳在多重谐波激励下的多重内共振, 并通过实验观察到了精确的 1:1 内部共振的存在, 利用弧长延拓法研究了圆柱壳的非线性共振响应. Liu 等人^[4]利用 Donnell 非线性浅壳理论建立了圆柱壳的偏微分方程, 并利用 Galerkin 方法将偏微分方程转化为非线性常微分方程, 最终利用伪弧长延拓法研究了功能梯度多孔圆柱壳在 1:1 内共振条件下的非线性共振响应. Dong 等人^[5]研究了梯度石墨烯增强复合材料旋转薄圆柱壳在热载荷和外部激励下的非线性谐波共振行为. Sheng 等人^[6]研究了函数梯度圆柱

壳在外激励作用下的非线性动力学行为. 利用一阶剪切理论建立圆柱壳的非线性运动偏微分方程, 最后利用多尺度法求解出频率响应曲线来研究系统的主共振和内共振. Shen 等人^[7]研究了湿热条件对各向异性剪切变形层合圆柱壳线性和非线性自由弯曲振动的影响. 通过奇异摄动技术和两步摄动方法求解运动方程. Mahsa Karimiasl 等人^[8]研究了具有压电层的多尺度复合材料双曲壳的大振幅振动行为. 观察了温升和湿度等外部因素对圆柱壳非线性的影响. Wang 等人^[9]研究了具有内共振的弹性叠层复合材料圆柱壳在轴向上的非线性振动. 利用伽辽金法离散, 研究了多自由度系统的非线性动力响应. 张博等人^[10]利用多尺度法研究了复合材料板在 1:3 内共振情况下的非线性振动响应, 通过数值模拟分析了外激励对板结构非线性振动响应的影响. 郭翔鹰等人^[11]研究了不同阶横向激励作用下压电纤维复合材料(MFC)悬臂板的非线性动力学特性.

本文首次研究了功能梯度三相复合材料圆柱壳在外激励、温湿效应、气动力等复杂环境下的非线性强迫振动. 根据一阶剪切变形理论、von-Karman 几何非线性理论和 Hamilton 原理, 建立了功能梯度三相复合材料圆柱壳的非线性偏微分运动控制方程. 将 Galerkin 法与伪弧长延拓法相结合来求解非线性系统的内共振问题. 分析湿度和外激励变化对圆柱壳非线性系统的影响.

1 圆柱壳非线性动力学方程

中厚度圆柱壳模型如图 1 所示, 假设圆柱壳的长度为 $L = 2\text{m}$, 厚度为 $H = 0.05\text{m}$, 中面上的半径为 $R = 1\text{m}$. 在此中厚度圆柱壳上建立如图所示直角坐标系 (x, θ, z) , 其中 x 轴和 θ 轴分别为轴向与周向方

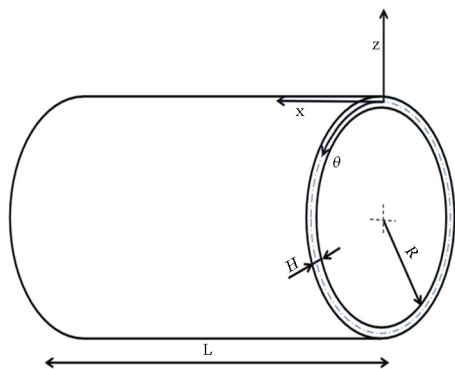


图 1 圆柱壳简化模型

Fig. 1 Cylindrical shell simplified model

向坐标,均建立在中面上, z 轴为厚度方向坐标。 (u, v, w) 分别代表任意点在 x, θ, z 方向的位移。

一般情况下对于中厚度圆柱壳结构,一阶剪切壳变形理论在精度上足够满足计算要求,同时在计算时间上较少^[12]。因此本文基于一阶剪切理论建立了功能梯度三相复合材料圆柱壳的动力学模型。一阶剪切理论^[12]的基本假设为壳体变形后横向法线不再保持垂直于中面,但仍然为直线并且长度保持不变。则圆柱壳任意一点的位移场可表示为:

$$u(x, \theta, z, t) = u_0(x, \theta, t) + z\phi_x(x, \theta, t) \quad (1a)$$

$$v(x, \theta, z, t) = v_0(x, \theta, t) + z\phi_\theta(x, \theta, t) \quad (1b)$$

$$w(x, \theta, z, t) = w_0(x, \theta, t) \quad (1c)$$

其中, (u_0, v_0, w_0) 为圆锥壳中面上任意一点的位移, ϕ_x 和 ϕ_θ 分别表示绕 θ 和 x 轴的转角。

基于 Von-Karman^[2,6,12]几何非线性位移—应变关系可得:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(0)} \\ \gamma_{x\theta}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{\theta z}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \gamma_{x\theta}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{\theta z}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(0)} \\ \gamma_{x\theta}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{\theta z}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{R\partial\theta} + \frac{w_0}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{R\partial\theta} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{R\partial\theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{R\partial\theta} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_\theta + \frac{\partial w_0}{R\partial\theta} \end{Bmatrix} \quad (2b)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \gamma_{x\theta}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{\theta z}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_\theta}{R\partial\theta} \\ \frac{\partial \phi_x}{R\partial\theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2c)$$

式中, $(\epsilon_{xx}, \epsilon_{\theta\theta}, \gamma_{x\theta}, \gamma_{xz}, \gamma_{\theta z})$ 是应变分量, $(\epsilon_{xx}^{(0)}, \epsilon_{\theta\theta}^{(0)}, \gamma_{x\theta}^{(0)}, \gamma_{xz}^{(0)}, \gamma_{\theta z}^{(0)})$ 是膜应变, $(\epsilon_{xx}^{(1)}, \epsilon_{\theta\theta}^{(1)}, \gamma_{x\theta}^{(1)}, \gamma_{xz}^{(1)}, \gamma_{\theta z}^{(1)})$ 是弯曲应变。

圆柱壳第 k 层的本构关系可表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3)$$

σ_{xx} 和 $\sigma_{\theta\theta}$ 是法向应力系数, $\tau_{x\theta}, \tau_{xz}, \tau_{\theta z}$ 是剪切应力系数, \bar{Q}_{ij} 是圆柱壳第 k 层的刚度系数。

考虑到湿度和温度引起的力和力矩,中面上力与力矩、应变与曲率的关系式可表示为:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \{A_{ij}\} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(0)} \\ \gamma_{x\theta}^{(0)} \end{Bmatrix} + \{B_{ij}\} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \gamma_{x\theta}^{(1)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_\theta^T \\ N_{x\theta}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x^H \\ N_\theta^H \\ N_{x\theta}^H \end{Bmatrix} \quad (4a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_\theta \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\theta z}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (4b)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \{B_{ij}\} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(0)} \\ \gamma_{x\theta}^{(0)} \end{Bmatrix} + \{D_{ij}\} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \gamma_{x\theta}^{(1)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_\theta^T \\ M_{x\theta}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x^H \\ M_\theta^H \\ M_{x\theta}^H \end{Bmatrix} \quad (4c)$$

A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 是由壳体厚度上的分段积分产生的刚度系数,可进一步表示为:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz, \quad i = j = (1, 2, 4, 5, 6) \quad (5)$$

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2) dz, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (6)$$

根据 Hamilton 原理^[12,13],得到系统的非线性动力学方程为:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R\partial\theta} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_{x0}}{\partial t^2} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial N_{\theta\theta}}{R\partial\theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_{\theta 0}}{\partial t^2} \quad (7b)$$

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial N_{\theta\theta}}{R\partial\theta} \frac{\partial w_0}{R\partial\theta} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} +$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{R\partial x} \frac{\partial w_0}{R\partial\theta} + 2N_{x\theta} \frac{\partial^2 w_0}{R\partial x\partial\theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R\partial\theta} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{R\partial\theta} + q_1 + Pa = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (7c)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R\partial\theta} - Q_x = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_{x0}}{\partial t^2} \quad (7d)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{R\partial\theta} - Q_\theta = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_{\theta 0}}{\partial t^2} \quad (7e)$$

其中 q_1 表示施加到壳体表面的外激励,形式如下:

$$q_1 = q \cos(\omega t) \quad (8)$$

气动力径向作用在圆柱壳外表面,本文仅考虑超音速情况下气动力对圆柱壳非线性行为的影响.

而准静态一阶活塞理论适用于马赫数,满足 $\sqrt{2} \leq Ma \leq 5$ 的条件. 因此本文使用准静态一阶活塞理论来准确描述气动力.

$$Pa = -\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{Ma^2 - 1}} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(\frac{Ma^2 - 2}{Ma^2 - 1} \right) \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial w_0}{\partial t} - \frac{w_0}{2R\sqrt{Ma^2 - 1}} \right] \quad (9)$$

式中 ρ_∞ , U_∞ , Ma 分别表示气流密度、来流速度和马赫数.

本文中取 $\rho_\infty = 0.413 \text{ kg/m}^3$, $U_\infty = 599.06 \text{ m/s}$, $Ma = 2$.

2 Galerkin 离散

对方程(7)进行无量纲化,为了获得功能梯度三相复合材料圆柱壳的无量纲运动控制方程,对以下变量进行无量纲处理得到:

$$\bar{u}_0 = \frac{u}{L}, \bar{v}_0 = \frac{v_0}{R}, \bar{w}_0 = \frac{w_0}{H}, \bar{\phi}_x = \phi_x,$$

$$\bar{\phi}_\theta = \phi_\theta, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{\theta} = \theta, \bar{R} = \frac{R}{L},$$

$$\bar{I}_i = \frac{1}{(LR)^{\frac{i+1}{2}}} I_i, \bar{t} = \left(\frac{E}{LR\rho} \right)^{\frac{1}{2}} t, \bar{\omega} = \left(\frac{LR\rho}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \omega,$$

$$\bar{u} = \left(\frac{LR\rho}{EH^2} \right)^{\frac{1}{2}} u, \bar{q} = \frac{(LR)^{\frac{1}{2}}}{EH} q, \bar{A}_{ij} = \frac{(LR)^{\frac{1}{2}}}{EH^2} A_{ij},$$

$$\bar{B}_{ij} = \frac{(LR)^{\frac{1}{2}}}{EH^3} B_{ij}, \bar{D}_{ij} = \frac{(LR)^{\frac{1}{2}}}{EH^4} D_{ij}. \quad (10)$$

然后应用 Galerkin 方法将偏微分运动控制方程离散为常微分非线性动力学方程. 由于圆柱壳特有的轴对称结构,任何非对称模式都有一个具有相同形状和固有频率的伴随模式,因此 1:1 内共振

总是存在.

在满足两端固支边界条件的情况下,其驱动模式振型函数^[14]:

$$u_0(x, \theta, t) = U(t) \cos(n\theta) \partial \chi(x) / \partial x \quad (11a)$$

$$v_0(x, \theta, t) = V(t) \sin(n\theta) \chi(x) \quad (11b)$$

$$w_0(x, \theta, t) = W(t) \cos(n\theta) \chi(x) \quad (11c)$$

$$\phi_x(x, \theta, t) = \phi_x(t) \cos(n\theta) \partial \chi(x) / \partial x \quad (11d)$$

$$\phi_\theta(x, \theta, t) = \phi_\theta(t) \sin(n\theta) \chi(x) \quad (11e)$$

圆柱壳作为轴对称结构,在具有相同形状和固有频率但旋转了 $\pi/2n$ 个角位移的两种模式之间,总是引入 1:1 的内共振. 其中 n 是周向波数. 驱动模式的圆柱壳振型函数由 $\cos(n\theta)$ 表示,则伴随模式的振型函数由 $\sin(n\theta)$ 表示,其中 θ 是角坐标. 所以其伴随模式振型函数为:

$$u_0(x, \theta, t) = U(t) \sin(n\theta) \partial \chi(x) / \partial x \quad (12a)$$

$$v_0(x, \theta, t) = V(t) \cos(n\theta) \chi(x) \quad (12b)$$

$$w_0(x, \theta, t) = W(t) \sin(n\theta) \chi(x) \quad (12c)$$

$$\phi_x(x, \theta, t) = \phi_x(t) \sin(n\theta) \partial \chi(x) / \partial x \quad (12d)$$

$$\phi_\theta(x, \theta, t) = \phi_\theta(t) \cos(n\theta) \chi(x) \quad (12e)$$

其中 $\chi(x)$ 是轴向弯曲模式函数,

$$\chi(x) = \eta_1 \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \eta_2 \cos\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) -$$

$$\gamma_m \left(\eta_3 \sinh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \eta_4 \sin\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) \right) \quad (13)$$

式中,

$$\eta_1 = 1, \eta_2 = -1, \eta_3 = 1, \eta_4 = -1 \quad (14a)$$

$$\lambda_m = \frac{(2m+1)\pi}{2} \quad (14b)$$

$$\gamma_m = \frac{\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m}{\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m} \quad (14c)$$

本文选取了轴向波数 $m=1$ 、周向波数 $n=6$ 的驱动模式振型函数及其伴随模式振型函数作为 Galerkin 离散的形函数进行二阶离散.

功能梯度三相复合材料圆柱壳在振动过程中,起主导作用的是径向位移,所以,这里主要研究径向位移. 利用 Galerkin 法进行离散,得到常微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 + m_1 \dot{W}_1 + m_2 W_1 + m_3 W_2 + m_4 W_1^3 + \\ m_5 W_1^2 W_2 + m_6 W_1^2 + m_7 W_1 W_2 + m_8 W_2^2 + \\ m_9 W_1 W_2^2 m_{10} W_2^3 + m_{11} \dot{W}_2 + \\ m_{12} \dot{W}_2 + a = q \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\dot{W}_2 + n_1 \dot{W}_2 + n_2 W_1 + n_3 W_2 + n_4 W_1^3 +$$

$$n_5 W_1^2 W_2 + n_6 W_1^2 + n_7 W_1 W_2 + n_8 W_2^2 +$$

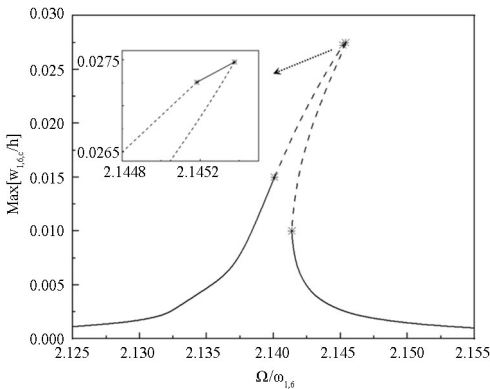
$$n_9 W_1 W_2^2 n_{10} W_2^3 + n_{11} \dot{W}_1 + n_{12} \dot{W}_1 + b = 0 \quad (15b)$$

其中 m_{ij}, n_{ij} 是无量纲系数,

3 共振响应分析

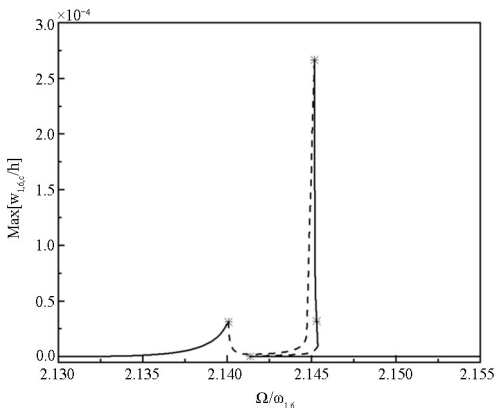
FG-X 圆柱壳是由 8551-7 型环氧树脂和石墨烯纳米片形成杂化基体后,再通过 IM-7 型碳纤维铺层形成的,共 16 层.纤维铺层角度为 $[0_4^{\circ}/90_4^{\circ}/0_4^{\circ}/90_4^{\circ}]$,其中石墨烯纳米片长度为 $2.5\mu\text{m}$,宽度为 $1.5\mu\text{m}$,厚度为 1.2nm .石墨烯质量分数为 2.015% ,碳纤维体积分数为 10% .利用伪弧长延拓法求解非线性常微分方程组.

图 2 是无量纲外激励幅值 $q = 0.05$ 时所得频响曲线图,表现出硬化弹簧行为.其中虚线代表不稳定解,实线代表稳定解.



(a) $w_{1,6,c}(t)$ 的振幅,驱动模式

(a) amplitude of $w_{1,6,c}(t)$, driven mode



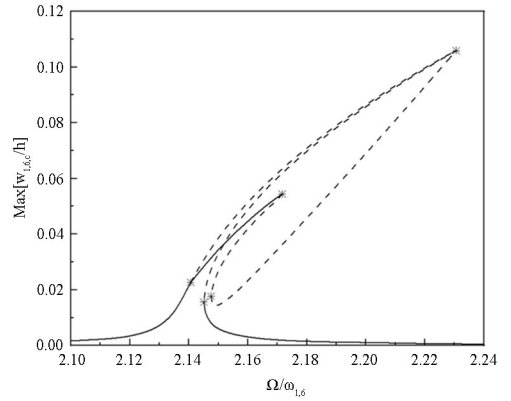
(b) $w_{1,6,s}(t)$ 的振幅,伴随模式

(b) amplitude of $w_{1,6,s}(t)$, companion mode

图 2 $q = 0.05$ 时的频响曲线图

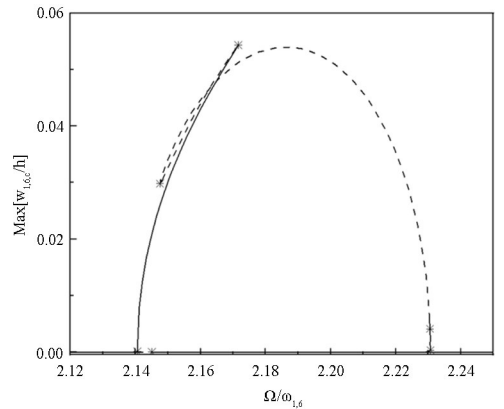
Fig. 2 Frequency response curve at $q = 0.05$

图 3 是无量纲外激励幅值 $q = 0.2$ 时所得频响曲线图,其中虚线代表不稳定解,实线代表稳定解.此时频响曲线表现出复杂的硬化非线性行为,出现多解的现象,耦合共振效应增强,共振响应更加剧



(a) $w_{1,6,c}(t)$ 的振幅,驱动模式

(a) amplitude of $w_{1,6,c}(t)$, driven mode



(b) $w_{1,6,s}(t)$ 的振幅,伴随模式

(b) amplitude of $w_{1,6,s}(t)$, companion mode

图 3 $q = 0.2$ 时的频响曲线图

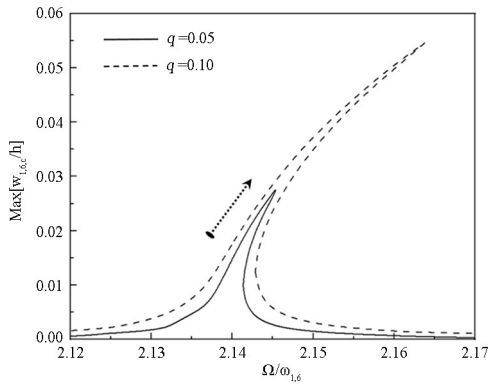
Fig. 3 Frequency response curve at $q = 0.2$

烈.此时伴随模式的响应幅值约为驱动模式响应幅值的一半.

图 4 显示了无量纲外激励幅值的变化对功能梯度三相复合材料圆柱壳频率响应曲线的影响.结果表明,外激励幅值的变化对复合材料圆柱壳频率响应曲线的影响非常显著.主要体现在,外激励幅值越大,非线性频响曲线的共振峰值和频响曲线的非线性度就越大,共振峰值向右移动,共振频域变宽.即外激励幅值越小,频响曲线的共振峰值和非线性度就越小,圆柱壳越接近线性振动.这些变化表明:随着无量纲外激励幅值的增加,系统的耦合共振响应增强,获得更多的能量.

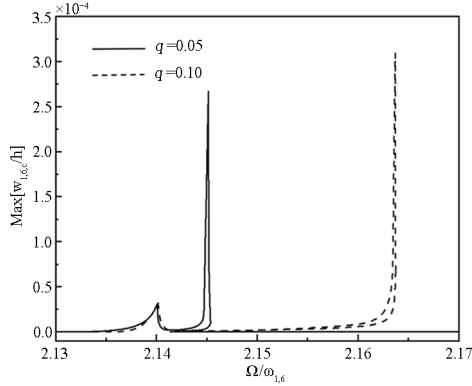
图 5 显示了湿度变化对复合材料圆柱壳频率响应曲线的影响.当其他参数不变时,我们考虑了湿度水平分别为 $\Delta C = 0.1\%$, $\Delta C = 0.2\%$, $\Delta C = 0.3\%$ 的三种情况.

结果表明,随着湿度的增加,系统的非线性共振幅值增大,硬化非线性行为逐渐增强,频响曲线的总体位置发生了变化,共振频域向低频区移动,



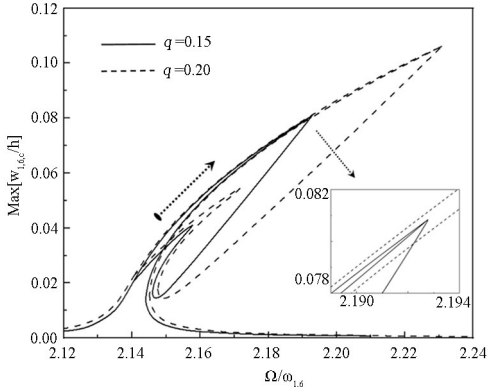
(a) $w_{1,6,c}(t)$ 的振幅, 驱动模式

(a) amplitude of $w_{1,6,c}(t)$, driven mode



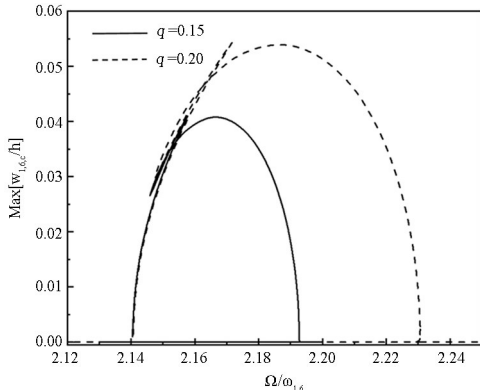
(b) $w_{1,6,c}(t)$ 的振幅, 伴随模式

(b) amplitude of $w_{1,6,c}(t)$, companion mode



(c) $w_{1,6,c}(t)$ 的振幅, 驱动模式

(c) amplitude of $w_{1,6,c}(t)$, driven mode

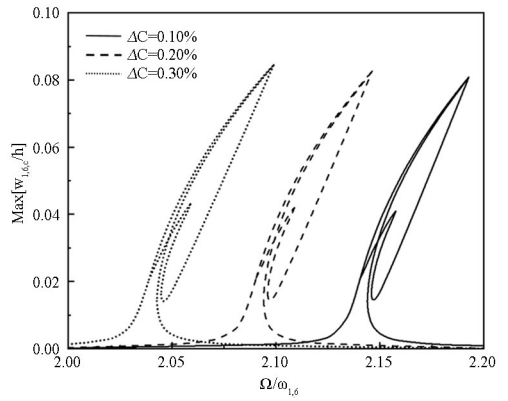


(d) $w_{1,6,s}(t)$ 的振幅, 伴随模式

(d) amplitude of $w_{1,6,s}(t)$, companion mode

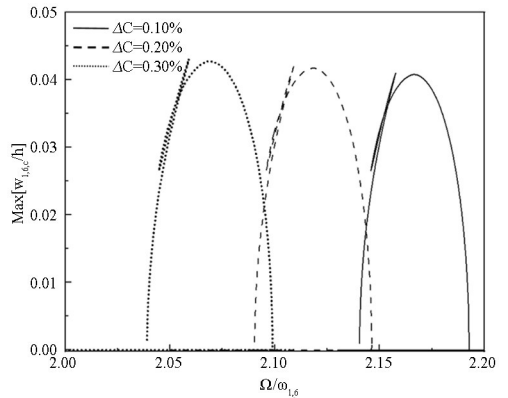
图 4 外激励变化对频响曲线的影响

Fig. 4 Effect of external excitation amplitude on frequency-response curve



(a) $w_{1,6,c}(t)$ 的振幅, 驱动模式

(a) amplitude of $w_{1,6,c}(t)$, driven mode



(b) $w_{1,6,s}(t)$ 的振幅, 伴随模式

(b) amplitude of $w_{1,6,s}(t)$, companion mode

图 5 湿度变化对频响曲线的影响

Fig. 5 Effect of external excitation amplitude on Frequency-response curve

这表明圆柱壳的非线性共振响应会受湿度变化的影响. 这些现象是因为湿度的变化影响了三相复合材料圆柱壳的结构刚度, 从而导致系统的非线性频率响应曲线发生变化.

4 结论

本文研究了功能梯度三相复合材料层合圆柱壳在温湿、外激励和气动力等多种因素作用下的非线性强迫振动. 利用 Hamilton 原理、von-Karman 几何非线性理论和一阶剪切变形理论, 建立了该系统的非线性偏微分控制运动方程. 利用 Galerkin 法将非线性偏微分方程离散为一组相互耦合的非线性常微分方程. 基于 1:1 内共振和 1:1 主共振的情况, 采用伪弧长延拓法研究了圆柱壳的非线性共振响应问题. 主要研究了湿度、外激励等参数对圆柱壳共振响应的影响, 发现了以下结论:

- (1) 随着无量纲外激励幅值的增加, 硬化非线性行为显著增强, 共振频域变宽, 频响曲线的共振峰值增加, 圆柱壳刚度降低.

(2)随着湿度的增加,频响曲线的共振频域整体上向高频区移动,幅值增加,硬化非线性增强,这是因为湿度的变化会影响到圆柱壳的结构刚度,而导致非线性系统的共振响应曲线发生变化。

参考文献

- [1] 杜长城,李映辉. 功能梯度薄壁圆柱壳的自由振动[J]. 动力学与控制学报, 2010, 8(3): 219—223.
DU C C, LI Y H. Free vibration of functionally graded cylindrical thin shells [J]. Journal of Dynamics and Control, 2010, 8(3): 219—223. (in Chinese)
- [2] NARIMANI R, KARAMI KHORRAMABADI M, KHAZAEINEJAD P. Mechanical buckling of functionally graded cylindrical shells based on the first order shear deformation theory [C]//Proceedings of the ASME 2007 Pressure Vessels and Piping Conference. New York, USA: ASME, 2007, 3: 399—404.
- [3] AMABILI M, BALASUBRAMANIAN P, FERRARI G. Travelling wave and non-stationary response in nonlinear vibrations of water-filled circular cylindrical shells: experiments and simulations [J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 381: 220—245.
- [4] LIU Y F, QIN Z Y, CHU F L. Nonlinear dynamic responses of sandwich functionally graded porous cylindrical shells embedded in elastic media under 1: 1 internal resonance [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 42(6): 805—818.
- [5] DONG Y H, LI X Y, GAO K, et al. Harmonic resonances of graphene-reinforced nonlinear cylindrical shells: effects of spinning motion and thermal environment [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 99(2): 981—1000.
- [6] SHENG G G, WANG X. Nonlinear vibrations of FG cylindrical shells subjected to parametric and external excitations [J]. Composite Structures, 2018, 191: 78—88.
- [7] SHEN H S, YANG D Q. Nonlinear vibration of functionally graded fiber-reinforced composite laminated cylindrical shells in hygrothermal environments [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(5/6): 1480—1499.
- [8] KARIMI ASL M, EBRAHIMI F, VINYAS M. Nonlinear vibration analysis of multiscale doubly curved piezoelectric composite shell in hygrothermal environment [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2019, 30(10): 1594—1609.
- [9] WANG Y Q, LIANG L, GUO X H. Internal resonance of axially moving laminated circular cylindrical shells [J]. Journal of Sound Vibration, 2013, 332(24): 6434—6450.
- [10] 张博,郭翔鹰,姜盼. 石墨烯树脂复合材料板 1: 3 内共振非线性动力学分析[J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(4): 44—51.
ZHANG B, GUO X Y, JIANG P. Nonlinear dynamic analysis of graphene resin composites plate with 1: 3 internal resonance [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(4): 44—51. (in Chinese)
- [11] 郭翔鹰,段梦焯. 不同阶外激励下压电纤维复合材料悬臂板的内共振特性分析[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(5): 23—32.
GUO X Y, DUAN M Y. The influence of different order excitations on responses of piezoelectric fibre composite plates with multi inner resonance [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5): 23—32. (in Chinese)
- [12] 方政. 大型电动振动台动圈结构动力学建模与分析[D]. 北京:北京工业大学, 2018.
FANG Z. Dynamic modeling and analysis of moving coil in large electrodynamic shaker [D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2018. (in Chinese)
- [13] REDDY J N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and Analysis [M]. Boca Raton, USA: CRC Press, 2004.
- [14] 刘超. 功能梯度圆柱壳的动力学建模与自由振动分析[D]. 南昌:南昌航空大学, 2021.
LIU C. Dynamic modeling and free vibration analysis of a functionally graded cylindrical shells [D]. Nanchang: Nanchang Hangkong University, 2021. (in Chinese)