文章编号:1672-6553-2023-21(3)-063-006

# 弹性基体对磁场中输流纳米管的振动影响\*

李明† 邓乾 吕刘飞

(武汉科技大学理学院,武汉 430065)

摘要 基于非局部连续介质理论,对处于轴向磁场作用下嵌入弹性基体中的输流单层碳纳米管(SWCNT), 应用哈密顿原理,采用 Euler-Bernoulli 梁模型,建立了固支边界条件下该系统的横向振动微分方程.方程中 计及磁场力与小尺度效应,弹性基体等效为 Pasternak 弹性模型.应用微分变换法(DTM)求解方程,着重研 究了弹性基体、轴向磁场及小尺度效应耦合作用时该纳米输流管道系统振动稳定性问题.数值计算结果表 明:弹性基体与轴向磁场均能提升系统的稳定性;而小尺度效应则降低系统稳定性.进一步的研究表明:随着 弹性基体的增强,磁场对系统稳定性的影响受到一定程度的抑制;而对于小尺度效应而言,弹性基体的剪切 参数抑制小尺度效应对系统稳定性的影响,但弹性参数放大了这一影响作用.

## Elastic Matrix Effect on Vibration Characteristics of Fluid-conveyed SWCNT Under A Longitudinal Magnetic Field\*

Li Ming<sup>†</sup> Deng Qian Lv Liufei

(Department of Mechanics, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China)

**Abstract** The nonlocal Euler-Bernoulli beam model is used to study the vibration instability characteristics of fluid transporting fixed-fixed supported single-layer carbon nanotubes (SWCNTs) embedded in elastic matrix under longitudinal magnetic field. Considering the magnetic field force and small-scale effect, the elastic matrix is equivalent to Pasternak's property model, and the higher-order vibration differential equation and boundary condition of the fluid-structure coupling system are established by using Hamilton principle. The differential transformation method (DTM) is used to solve the equation, and the stability of SWCNTs under the coupling of elastic matrix, longitudinal magnetic field and small-scale effect is studied. The numerical results indicate that the magnetic field and the elastic matrix improve the stability of the system. The increase of small-scale coefficient will reduce the stability of the system to a certain extent. Further research shows that the influence of longitudinal magnetic field on the stability of flow transporting SWCNTs embedded in elastic matrix will be restrained to varying degrees with the enhancement of the elastic matrix. For the small-scale coefficient, the two parameters of the elastic foundation have the opposite effect, that is, the shear parameter suppresses the influence of small-scale on the stability of the fluid-conveyed carbon nanotube system, while the elastic parameter amplifies the influence.

<sup>2022-03-28</sup> 收到第1稿,2022-05-11 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(51909196), National Natural Science Foundation of China(51909196).

<sup>†</sup>通信作者 E-mail: mingli121212@126.com

Key words fluid-conveyed carbon nanotube, longitudinal magnetic field, Pasternak foundation, nonlocal parameter, DTM

## 引言

微纳米管道结构系统在生物医药领域、纳米纤 维复合材料领域以及分子药物输送、生物传感器等 领域已有了较为广泛的应用<sup>[1-2]</sup>,而这类输流管道 力学问题的应用研究涉及流体力学、固体力学及动 力学等多学科<sup>[3]</sup>.对微纳尺度下力学特性的实验研 究以及分子动力学模拟都表明<sup>[4-5]</sup>:小尺度效应对 纳米材料的各项性质有着相当重要的影响,但经典 的连续介质理论由于缺乏尺度相关性而无法准确 描述这类小尺度结构的力学行为,为此大量反映尺 度相关性的连续介质理论相应提出,其中 Eringen 的非局部弹性理论<sup>[6]</sup>成功应用于研究纳米管道的 各类静、动态力学行为,因此在纳米材料力学问题 的研究中得到了广泛的应用<sup>[7]</sup>.

在纳米流体储存、运输以及纳米复合材料等 纳米技术领域,碳纳米管常嵌于某一基体中.而模 拟这类基体一般可以选用单参数的 Winkler 弹性 模型、双参数的 Pasternak 弹性模型以及其他一些 黏弹性模型等.Mustapha 和 Zhong<sup>[8]</sup>基于非局部 欧拉梁模型研究了温度场中 Winkler 基体上单壁 碳纳米管(SWCNT)的振动性质.Rafiei<sup>[9]</sup>等基于相 同模型研究了黏弹性 Kelvin 基体上 SWCNT 输流 时振动响应问题.

近段时期以来,碳纳米管的磁性质以及其在外 加磁场中所表现出来的力学特征显示出其在微纳 机电系统、纳米传感器以及自旋电子科技等领域潜 在的应用前景,基于此,大量相关研究随之出现. Dini等<sup>[10]</sup>基于 Eringen 弹性理论研究了双参数弹 性基体上不同边界条件下,弯曲输流双壁碳纳米管 在外部磁场作用下的振动特性,结果表明,流体流 速、范德华力以及尺度参数对纳米管的振动均有相 应的影响.Ghane 等<sup>[11]</sup>则采用了非局部 Timoshenko 梁模型,针对输流碳纳米管在外加磁场中的颤 振问题,得到了磁场、流速、稀薄效应以及小尺度效 应对系统颤振失稳的影响结果.

现有文献主要针对不同参数耦合作用时各参 数对纳米输流管道振动特性的研究,但各参数的作 用效果受其他参数的影响情况却鲜少提及.本文依据非局部 Euler-Bernouli 梁模型,针对轴向磁场作用下,嵌入 Pasternak 弹性基体中的固支输流单层碳纳米管,应用哈密顿原理建立该输流系统的振动控制方程,通过数值计算结果,研究双参数 Pasternak 弹性基体与纵向磁场、小尺度效应耦合作用时该输流碳纳米管振动特性以及耦合作用时各参数间的相互作用,以期为纳米管在各领域中的应用提供一定的理论依据.

#### 1 振动控制方程

#### 1.1 振动方程推导

图 1 为弹性基体内固支输流碳纳米管在轴向 磁场中的示意图.



图 1 轴向磁场中弹性基体上输流单壁碳纳米管 Fig.1 An fluid-conveyed SWCNT in Pasternak medium under the longitudinal magnetic field

建立如图 1 所示的坐标系,X 为纳米管的轴向 坐标,碳纳米管长度记为L,外径为D.系统仅发生 面内横向小幅振动,重力及管道外部拉、压力不计, 管道内部流体为理想流体的定常流动,流速不变且 记为U.

则由 Euler-Bernoulli 梁应变-位移关系有:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{XX} = -Z \, \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial X^2} \tag{1}$$

其中W(X,t)为Z向位移,t为时间, $\varepsilon_{xx}$ 为X方向的应变.

由非局部弹性理论<sup>[6]</sup>,含有小尺度效应的应 力-应变关系为:

$$\sigma_{XX} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{XX}}{\partial X^2} = E \varepsilon_{XX}$$
<sup>(2)</sup>

其中 $\sigma_{xx}$ 分别为X方向的应力,E为纳米管弹性模量, $e_0$ 为材料常数,a为材料内部特征长度,对于碳纳米管而言,C-C键长一般为0.142nm.

碳纳米管内部流体作用于纳米管的力可表示为<sup>[5]</sup>:

$$F_{\rm f} = m_{\rm f} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \qquad (3)$$

其中 m<sub>f</sub> 为每单位长度上纳米管内部流体的质量.

轴向磁场中,由磁场引起的作用于纳米管横向 方向上单位长度的洛伦兹力为<sup>[12]</sup>:

$$F_Z = \eta A H_X^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \tag{4}$$

其中 A 为管道横截面积, $\eta$  为磁导率, $H_x$  为轴向 磁场强度.

Pasternak 弹性基体对纳米管的作用力表示为<sup>[13]</sup>:

$$F = KW - G \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \tag{5}$$

其中 K 为弹性系数,G 为剪切系数.

基于上述各式,由弹性基体、磁场以及管内流 体共同作用于碳纳米管的功为:

$$W_{\text{Ext}} = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} -\left(KW - G \frac{\partial^{2}W}{\partial X^{2}} + F_{z} + F_{f}\right) W dX$$
(6)

管道系统的总动能为:

$$T = \frac{1}{2} (m_{\rm c} + m_{\rm f}) \int_{0}^{L} \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^{2} \mathrm{d}X \tag{7}$$

其中 m。为每单位长度上纳米管的质量.

管道系统的应变能为:

$$U = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \int_{A} \varepsilon_{XX} \sigma_{XX} \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}X \tag{8}$$

由弯矩 M 与应力σ<sub>xx</sub>的关系式:

$$M = \iint \sigma_{XX} Z \, \mathrm{d}A \tag{9}$$

应用哈密顿原理:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(U - T - W_{\text{Ext}}) \, \mathrm{d}t = 0 \tag{10}$$

得系统振动微分方程为:

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + (m_{\rm f}U^2 - \eta AH_X^2 - G)\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} +$$

$$2m_{f}U\frac{\partial^{2}W}{\partial X\partial t} + KW + (m_{c} + m_{f})\frac{\partial^{2}W}{\partial t^{2}} - (e_{0}a)^{2} [(m_{f}U^{2} - \eta AH_{X}^{2} - G)\frac{\partial^{4}W}{\partial X^{4}} + 2m_{f}U\frac{\partial^{4}W}{\partial X^{3}\partial t} + K\frac{\partial^{2}W}{\partial X^{2}} + (m_{c} + m_{f})\frac{\partial^{4}W}{\partial X^{2}\partial t^{2}}] = 0$$
(11)

其中 EI 为纳米管弯曲刚度.

边界条件为:

$$X = 0, L : W = \frac{\partial W}{\partial X} = 0$$
 (12)

#### 1.2 振动方程求解

引入无量纲变量及参数:

$$w = \frac{W}{L}, x = \frac{X}{L}, \tau = \sqrt{\frac{EI}{m_c + m_f}} \frac{t}{L^2},$$
$$\beta = \frac{m_f}{m_c + m_f}, u = UL \sqrt{\frac{m_f}{EI}}, \mu = \left(\frac{e_0 a}{L}\right)^2,$$
$$\psi = \eta A H_X^2 \frac{L^2}{EI}, g = G \frac{L^2}{EI}, k = K \frac{L^4}{EI}$$

则上述方程(11)及边界条件(12)可改写为无量纲 方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (u^2 - \psi - g) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2u \sqrt{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \tau} + kw + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \mu \left[ (u^2 - \psi - g) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2u \sqrt{\beta} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial \tau} + k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \tau^2} \right] = 0 \quad (13)$$

及相应的边界条件

$$x = 0, 1;$$
  $w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$  (14)

设方程(13)的解为,代入方程(13)有

$$\frac{d^{4}\varphi}{dx^{4}} + (u^{2} - \psi - g) \frac{d^{2}\varphi}{dx^{2}} + 2u\sqrt{\beta}\Omega \frac{d\varphi}{dx} + (\Omega^{2} + k)\varphi - \mu \left[ (u^{2} - \psi - g) \frac{d^{4}\varphi}{dx^{4}} + 2u\sqrt{\beta}\Omega \frac{d^{3}\varphi}{dx^{3}} + (\Omega^{2} + k) \frac{d^{2}\varphi}{dx^{2}} \right] = 0$$
(15)

采用微分变换法(DTM)求解方程(15),DTM 法应用于纳米级别输流管道系统振动稳定性分析 已在文献[12]得到证实.

$$2\mu u \sqrt{\beta} \Omega(n+3)! \Phi(n+3) + [(u^2 - \psi - g) - \mu(\Omega^2 + k)](n+2)! \Phi(n+2) + 2u \sqrt{\beta} \Omega(n+1)! \Phi(n+1) + (\Omega^2 + k)n! \Phi(n) = 0$$
 (16)  
边界条件的微分变换形式:  
 $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$  (17)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n) = 0,$$
  
$$\sum_{n=0}^{\infty} n \Phi(n) = 0$$
(18)

令 $\Phi(2) = C_1, \Phi(3) = C_2, 进而与式(17) 一起$  $代入式(16), 迭代求得<math>\Phi(n), n = 4, 5, \dots, N$ . 然后 将 $\Phi(n), n = 0, 1, 2, \dots, N$ 代入式(18), 可得到以 下两个方程:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0 \tag{19}$$

令上式系数矩阵行列式为零,即可获得输流碳 纳米管系统无量纲复频率  $\Omega$ ,其中虚部 Im( $\Omega$ )是 系统的无量纲频率,研究<sup>[4]</sup>表明,在 Im( $\Omega$ )=0 时, 固支管道系统出现屈曲失稳,此时流速称为系统发 散失稳的临界流速  $u_{\rm cr}$ .

#### 2 数值计算结果分析

本文采用的分析参数为<sup>[12]</sup>:管内流体的密度  $\rho_{\rm f}$ =1000kg/m<sup>3</sup>,碳纳米管密度  $\rho_{\rm c}$ =2300kg/m<sup>3</sup>,其外 层半径  $R_0$ =3nm,壁厚  $t_d$ =0.1nm,弹性模量 E= 3.4TPa. 泊松比  $\nu$ =0.3.振动中为不计剪切变形与 转动惯量,长径比取  $L/2R_0$ =40,磁导率  $\eta$ =4 $\pi$ × 10<sup>-7</sup>,其余参数选择在算例中将给予说明,选取 DTM 算法收敛截取数 60 以确保各项数值解足够 精确<sup>[12]</sup>.

图 2 为不考虑磁场作用及尺度效应时,Pasternak 弹性基体的弹性系数 k 与剪切系数 g 对管道 频率、管道发散失稳无量纲临界流速的影响.

由图 2 可以看出有无弹性基体的作用,随着管 内流体流速的增加,输流固支碳纳米管均将经历模 态频率逐渐降低,进而出现系统发散失稳(一阶模 态频率为零),再到第一、二阶模态耦合颤振这一复 杂振动过程.不同之处在于,嵌入弹性基体的系统, 其临界流速将提高,管道的稳定性将提升,这一结 论现有文献获取的结论一致.进一步比较可以发现 剪切系数 g 的提高对系统稳定性的提升优于弹性 系数k.



流速变化关系( $\beta$ =0.5,  $H_X = \mu = 0$ ) Fig.2 The imaginary component of the eigenfrequency,  $\Omega$  as functions of the flow velocity, embedded in Pasternak foundation ( $\beta$ =0.5,  $H_X = \mu = 0$ )

对于外加轴向磁场以及碳纳米管小尺度效应 对管道稳定性的影响,文献[12]已有了相应结论, 即轴向磁场增强将提高管道稳定性,而小尺度效应 则降低管道的稳定性.



将碳纳米管输流系统嵌入弹性基体后,图 3、 图 4 给出了弹性系数 k 与剪切系数 g 对磁场作用 下管道发散失稳临界流速的影响.

分析图 3 可以看到,对于不同的弹性系数 k, 磁场的增强都能提高纳米管道系统临界流速进而 提升其稳定性.但详细比较增加相同磁场强度临界 流速的提升值时,可以发现,不同弹性系数 k 下磁 场对稳定性的提升程度不同.例如,*H*x 均由 9× 10<sup>7</sup> A/m 增加到 10×10<sup>7</sup> A/m,当 k = 0 时,无量纲 临界流速  $u_{cr}$ 由 8.83 增至 9.32,增量  $\Delta u_{cr}$ 为 0.49; 当 k = 100,200,...,500 时, $\Delta u_{cr}$ 分别为 0.48,0.46, ...,0.41,尽管差别不大,但仍可说明:随着弹性系 数 k 的增大,磁场对管道稳定性的提升作用受到了 一定程度的抑制.



values g ( $\beta$ =0.5, k= $\mu$ =0)

分析图 4 同样可以得到类似结论:不同剪切系数 g 的基体中,输流碳纳米管的稳定性会随着磁场的增强而提高,但剪切系数 g 仍然一定程度地抑制了磁场对管道稳定性的提升作用,尽管这一抑制作用不明显,且磁场越弱,这一作用越不明显.



 $k \ (\beta = 0.5, H_X = g = 0)$ 

图 5、图 6 给出了考虑小尺度效应时弹性系数 k 与剪切系数 g 对管道发散失稳临界流速的影响.

由图 5、图 6 可以看到,有无弹性基体,小尺度 系数  $\mu$  的增加都会降低管道系统稳定性.详细比较 两个基体参数在不同数值下,增加相同小尺度系数  $\mu$ ,无量纲临界流速的降低值  $\Delta u_{cr}$ 可以发现,弹性 基体的剪切系数 g 抑制了小尺度参数  $\mu$  对系统稳 定性的影响,例如: $\mu$  由 0.18 增至 0.2,当 g = 0 时,  $\Delta u_{cr}$  = -0.25;当 g = 50 时, $\Delta u_{cr}$  = -0.12. 但弹性 系数 k 却放大了小尺度系数对管道稳定的影响, 如: $\mu$  由 0.18 增至 0.2,当 k = 0 时, $\Delta u_{cr}$  = -0.25; 当 k = 500 时, $\Delta u_{cr}$  = -0.4,说明弹性基体的两个 参数对尺度效应的影响出现了相反的结果.



图 6 不同剪切模量 g 时小尺度系数对临界流速的影响 ( $\beta$ =0.5, $H_X = k = 0$ ) Fig.6 Critical flow velocities with longitudinal magnetic field in a fluid-conveyed SWCNT for different values g ( $\beta$ =0.5, $H_X = k = 0$ )

## 3 结论

本文应用非局部 Euler-Bernouli 梁模型,着重 研究了在轴向磁场、尺度效应与弹性基体耦合作用 时,嵌入弹性基体中的输流固支 SWCNT 的振动 失稳特性,弹性基体采用 Pasternak 弹性模型.研究 结果表明:随着磁场的增强,Pasternak 弹性基体的 两个参数不同程度地抑制了磁场对系统稳定性的 影响;但对小尺度系数的影响,两个参数却表现为 相反的作用,即剪切参数抑制了小尺度对纳米管道 系统的影响而弹性参数则放大了这一影响效应.

依据所得结论可以发现,通过外加轴向磁场及 增加弹性基体可以提高纳米输流管道稳定性,但是 一味增大二者强度从经济性考虑并不是一个明智 的策略;另外可以选取剪切系数高、弹性系数低的 基体来改善小尺度效应对系统稳定性的影响.

## 参考文献

- SAWANO S, ARIE T, AKITA S. Carbon nanotube resonator in liquid [J]. Nano Letters, 2010, 10(9): 3395-3398.
- WANG Q, ARASH B. A review on applications of carbon nanotubes and graphenes as nano-resonator sensors [J]. Computational Materials Science, 2014, 82(1): 350-360.
- [3] 随岁寒,李威. 输流管道弯曲和振动的有限元分析
  [J].动力学与控制学报,2022,20(4):83-90.
  SUISH, LIW. The finite element analysis on bending and vibration of the fluid-conveying pipes [J].
  Journal of Dynamics and Control,2022,20(4):83-90. (in Chinese)
- [4] AMIRI A, VESAL R, TALEBITOOTI R. Flexoelectric and surface effects on size-dependent flowinduced vibration and instability analysis of fluidconveying nanotubes based on flexoelectricity beam model [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2019, 156(6): 474-485.
- [5] WANG L, NI Q. A reappraisal of the computational modelling of carbon nanotubes conveying viscous fluid [J]. Mechanics Research Communications, 2009, 36(7): 833-837.
- [6] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocations and surface waves [J]. Journal of Applied Physics, 1983, 54(2): 4703-4710.
- [7] MOHAMMAD M. On the plastic buckling of curved carbon nanotubes [J]. Theoretical and Applied Mechanics Letters, 2020, 10(1): 46-56.
- [8] MUSTAPHA K B, ZHONG Z W. The thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube

studied using the Bubnov-Galerkin method [J]. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2010, 43(1): 375-381.

- [9] RAFIEI M, MOHEBPOUR S R, Daneshmand F. Small-scale effect on the vibration of non-uniform carbon nanotubes conveying fluid and embedded in viscoelastic medium [J]. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2012, 44(7-8): 1372-1379.
- DINI A, ABBAS Z B M, MAHMOUD S. Effects of van der Waals forces on hygro-thermal vibration and stability of fluid-conveying curved double-walled carbon nanotubes subjected to external magnetic field
   [J]. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2019, 106(10): 156-169.
- [11] GHANE M, SAIDI A, BAHAADINI R. Vibration of fluid-conveying nanotubes subjected to magnetic field based on the thin-walled Timoshenko beam theory [J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 80(11): 65-83.
- [12] 李明, 吕刘飞,郑华升等. 磁场对不同温度场中输流 悬臂碳纳米管颤振稳定性的影响[J]. 固体力学学 报, 2021, 42(1): 87-93.
  LI M, LV L F, ZHENG H S, et al. Magnetic field effect on flutter stability of a fluid-conveying cantilevered carbon nanotube under different temperature fields [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2021, 42(1): 87-93. (in Chinese)
- [13] GHAVANLOO E, DANESHMAND F, RAFIEI M. Vibration and instability analysis of carbon nanotubes conveying fluid and resting on a linear viscoelastic winkler foundation [J]. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2010, 42(9):2218-2224.