

四维超 Jerk 系统的分岔特性及同步控制研究^{*}

姜丽爽¹ 李静^{1†} 张伟²

(1.北京工业大学 理学部,北京 100124)(2.北京工业大学 材料与制造学部,北京 100124)

摘要 研究具有双翼混沌吸引子的四维超 Jerk 系统的分岔特性和混沌路径,并设计有效的自适应反馈控制器实现该系统的全局指数同步.通过相图、Poincaré 映射图、分岔图和 Lyapunov 指数谱等揭示系统的混沌特性,并得到系统进入混沌的主要路径是逆倍周期分岔和大幅度的周期振荡.将高维分岔理论和扰动方法应用于该系统的动力学分析中,建立分岔点处参数之间的精确关系,进一步得出产生的周期轨道的稳定性及其近似解表达式.基于自适应同步理论,提出一种实现混沌系统完全同步的方案.数值模拟结果表明所提出机制的可行性和有效性.本文可为此类系统在混沌加密领域内的实际应用提供理论参考.

关键词 超 Jerk 系统, 奇异吸引子, 分岔, 周期轨道, 同步控制

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-108

引言

混沌动力学在生物、工程、物理、化学、经济等不同的领域中具有重要的应用.自从 Lorenz^[1]首次三维自治常微分方程中发现混沌吸引子以来,混沌理论在过去的五十年里得到了发展和深入的研究.混沌动力系统的特点是对初始条件的敏感性以及具有正的 Lyapunov 指数.这些特性为混沌系统在安全通信、图像加密和超快物理随机数发生器等工程中的应用提供了灵活性和广泛性^[2-6].

目前,国内外学者对混沌系统进行了大量的研究,例如经典的 Lorenz 系统^[1]、Rössler 系统^[7]、Chua 系统^[8]、Sprott 系统^[9]、Jerk 系统^[10]、Chen 系统^[11]、Lü 系统^[12]等等.超 Jerk 系统由于其数学形式简单、动力学复杂以及在力学中的实际应用而引起了研究者的兴趣.混沌超 Jerk 系统是由 Sprott 等^[13,14]首次提出的,他们将其应用到现场可编程模拟阵列应用板的设计中,可以作为一种易于编程和可重构的混沌发生器.2011 年, Buncha 等^[15]提出了五种不同的具有二次和指数非线性元素的混沌捕捉流.2018 年, Kengne 等^[16]在三维 Jerk 电路的基础上设计了一种新的带有简单非线性部分的自治 Snap 电路,数值研究表明系统具有复杂的动力学特性.2019 年, Zhang 等^[17]提出了一个具有无穷多个

平衡点的超混沌超 Jerk 系统,它可以产生 $N + M + 2$ 个涡旋混沌吸引子,并利用离散元件对所提出的多涡旋混沌系统进行了硬件实验.2020 年, Li 等^[18]发现忆阻器的初始条件可以作为控制器来实现混沌吸引子的偏置增强.然而在实际的实验过程中,可能会出电路故障或者一些意外的结果.因此,对混沌超 Jerk 系统进行动力学特性分析,揭示产生非线性振动的原因,从而实现控制是非常重要的.

混沌信号的控制和同步在保密通信领域同样取得了长足的发展.2017 年, Wang 等^[3]利用反推控制方法研究一种新型超 Jerk 系统的自适应控制和同步问题.2018 年, Vaidyanathan 等^[4]提出一种适用于同一修正超 Jerk 系统的全局反推混沌同步方案,并设计混沌电路实验验证理论分析的可行性.2020 年, Mahmoud 等^[19]利用线性反馈控制技术研究了振荡器解的控制收敛到不动点,提出一种实现两个分布阶超混沌非强迫复 Van der Pol 振子完全同步的方案.混沌的同步与控制研究可使得超 Jerk 系统更适合应用于随机数发生器、数据安全、数据加密等科学领域.

本文研究具有双翼混沌吸引子的四维超 Jerk 系统的分岔特性,并设计自适应反馈控制器实现全局指数同步.通过相图、Poincaré 映射、分岔图和 Lyapunov 指数谱等非线性诊断工具对系统的混沌

2020-11-07 收到第 1 稿,2020-12-07 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(11772007, 11832002, 11290152)和北京市自然科学基金资助项目(1172002, Z180005)

[†] 通讯作者 E-mail: leejing@bjut.edu.cn

特性进行分析.运用分岔理论和扰动分析技术探讨关键参数对系统动力学行为的影响,分别获得Hopf分岔的存在条件和性质、周期轨道的稳定性及其近似解表达式.这些结果建立了分岔点处参数之间的精确关系,可为电路实验中的分岔控制和故障诊断提供一定理论参考.基于Lyapunov稳定性理论和同步技术设计一个自适应反馈控制器,以实现驱动系统和响应系统在参数未设定情况下动力学行为的完全同步.借助Matlab软件数值模拟验证理论研究的有效性.本文结果有助于研究者在实验过程中更好地理解和分析非线性系统所表现出的各种动态行为,从而实现有效的控制和同步,使该系统更适合应用于以混沌为基础的数据加密领域.

1 四维混沌超Jerk系统的设计

考虑四维超Jerk系统的无量纲数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = ax_4 \\ \dot{x}_4 = x_1 - \gamma x_2 - x_3 - bx_4 - cx_1^3 \end{cases} \quad (1)$$

式中, $a, b, c, \gamma \in \mathbf{R}^+$ 为系统可调节控制参数.

取定参数 $a = 8, b = 8, c = 1.5, \gamma = 1$, 系统中出现了一个双翼混沌吸引子.图1(a)和图1(b)分别展示了系统在 $x_1 - x_2 - x_4$ 空间和 $x_1 - x_4$ 平面上的混沌相图,图1(c)展示了系统在 $x_3 - x_4$ 平面上的Poincaré映射图,图1(d)是关于变量 x_4 的时间轨迹图.当设定初值条件 $(0.001, -0.3, 1.1, 0.1)$ 和仿真时间 10000s 时,系统所对应的 Lyapunov 指数为 $LE_1 = 0.06, LE_2 = 0, LE_3 = -1.06, LE_4 = -7$, 此时分维数 $D_{KY} = 2.06$, 这表明系统中存在的吸引子是具有分形维数的奇异吸引子.

为了探究混沌吸引子的产生路径,本文绘制了系统关于参数 a 在 $[7.9, 12]$ 范围内的分岔图和 Lyapunov 指数谱,如图2所示.从图2中可以看出,随着参数 a 的减小,系统首先表现为周期运动,随后发生倍周期分岔.当 $a = 8.3$ 时,系统出现了大幅度的周期振荡,如图3所示.继续减小 a 的值直至 8.25 时,系统中产生了混沌行为,对应的 Lyapunov 指数谱中有正值区域,说明系统已完全进入混沌状态.对应的 LE_1 在正值区域内随着参数 a 的减小而逐渐增大的现象,表明系统的混沌程度在逐步增强,而后慢慢趋于平稳.

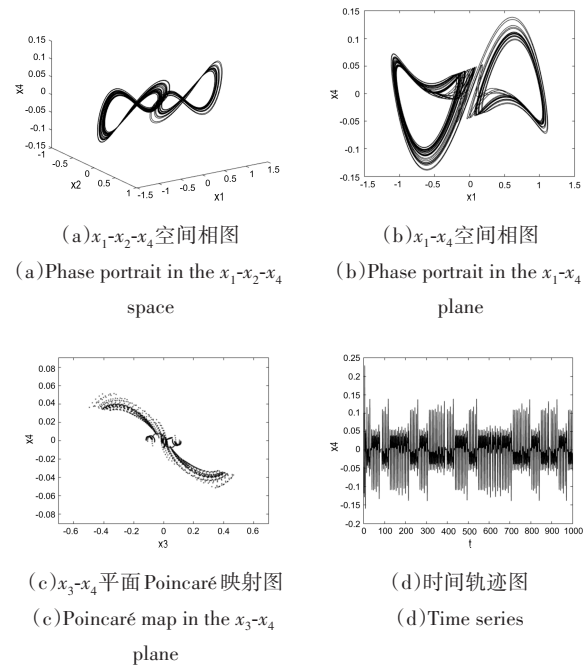


图1 系统中的双翼混沌吸引子

Fig.1 Double-scroll chaotic attractor

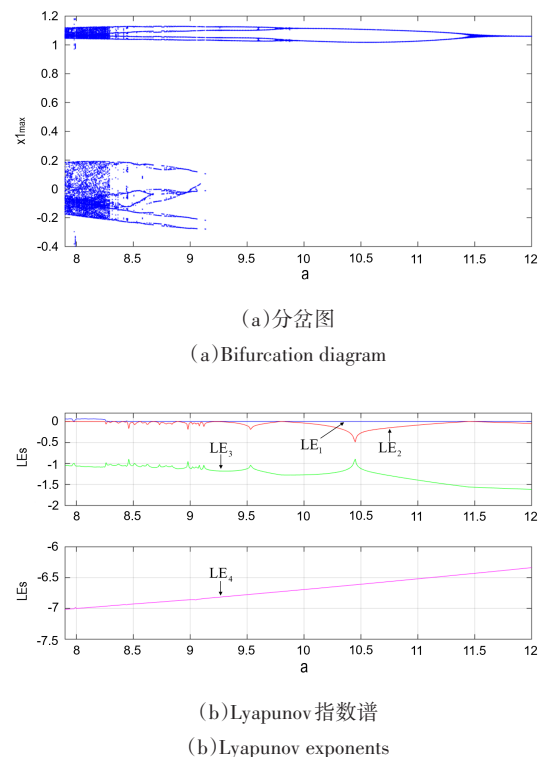
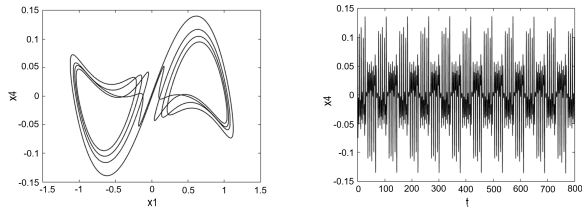


图2 当参数为 $b = 8, c = 1.5, \gamma = 1$ 时,系统通向混沌的路径

Fig.2 Route to chaos of system with parameters $b = 8, c = 1.5, \gamma = 1$

2 Hopf分岔和周期轨道分析

系统(1)存在三个平衡点 $E_0 = (0, 0, 0, 0)$, $E_{1,2} = (\pm \frac{1}{\sqrt{c}}, 0, 0, 0)$, 其中非平凡平衡点所对应的



(a) x_1 - x_4 平面相图 (b) 时间轨迹图
(a) Phase portrait in the x_1 - x_4 plane (b) Time series

图3 当 $a = 8.3$ 时, 系统出现周期振荡

Fig. 3 Periodic oscillations when $a = 8.3$

特征方程为

$$\lambda^4 + b\lambda^3 + a\lambda^2 + a\gamma\lambda + 2a = 0 \quad (2)$$

根据 Routh-Hurwitz 准则, 当 $a > a_h = \frac{2b^2}{\gamma(b-\gamma)}$

时, 方程(2)的根

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm i\omega_0 \\ \lambda_{3,4} &= \frac{-b\gamma \pm \sqrt{b\gamma(b\gamma - 8)}}{2\gamma} \end{aligned}$$

全部具有负实部, 平衡点 $E_{1,2}$ 是渐进稳定的. 当 a 穿过 a_h 时, 平衡点 $E_{1,2}$ 的稳定性发生改变, 相应的 Hopf 分岔条件可以计算得到

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{2b}{b-\gamma}}, \quad a = a_h, \quad b\gamma \geq 8 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Re}(\lambda'(a_h)|_{\lambda=i\omega_0}) &= \\ &= -\frac{\gamma^2(b-\gamma)^2}{2b(b\gamma^2(b-\gamma) + 2(b-2\gamma)^2)} \neq 0 \end{aligned}$$

因此, 系统在对称的非平凡平衡点附近产生两个周期轨道. 为了方便表示, 本节将关于参数 b, γ 的 n 次多项式 $s \sum_{l=l_1, \dots, l_m} M_{l, n-l} b^l \gamma^{n-l}$ 记作如下符号:

$${}^{\mathbf{P}}_{b^l \gamma^{n-l}}^{l=l_1, \dots, l_m} (M_{l_1, n-l_1}, \dots, M_{l_m, n-l_m})$$

其中, $s, M_{l, n-l} (l, n \in \mathbf{N}, l \leq n)$ 为系数, 定义 $q_k (k = 1, \dots, 6)$ 为

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{b\gamma(b\gamma - 8)} \\ q_2 &= b - \gamma \\ q_3 &= {}^2\mathbf{P}_{b^l \gamma^{5-l}}^{l=1, \dots, 4} (3, -8, 7, -2) + q_4 - bq_5/\gamma \\ q_4 &= {}^4\mathbf{P}_{b^l \gamma^{3-l}}^{l=0, \dots, 3} (-2, 5, -4, 1) \\ q_5 &= {}^1\mathbf{P}_{b^l \gamma^{7-l}}^{l=1, \dots, 4} (1, -3, 3, -1) \\ q_6 &= {}^1\mathbf{P}_{b^l \gamma^{4-l}}^{l=0, \dots, 4} (1, -4, 6, -4, 1) \end{aligned}$$

下面利用多尺度法和扰动理论^[20-22] 计算分析系统 Hopf 分岔的性质和产生的周期轨道的近似解. 将非平凡平衡点移动至原点, 得到变换后的微分系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = ax_4 \\ \dot{x}_4 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{c}} - \gamma x_2 - x_3 - bx_4 - c \left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^3 \end{cases} \quad (4)$$

设 $a = a_h + \alpha$, 其中 α 为小的扰动参数. 对系统(4)作如下变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\omega_0 & -\lambda_3 & \lambda_4 \\ -\omega_0^2 & 0 & -\lambda_3 - \frac{2b}{\gamma} & -\lambda_4 - \frac{2b}{\gamma} \\ 0 & \frac{\gamma}{b}\omega_0 & \frac{p_{43}}{2} & \frac{p_{44}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

式中, $p_{4j} = (-1)^j (b\gamma\lambda_j - \gamma^2\lambda_j - 2\lambda_j + \frac{2\gamma}{b}\lambda_j) + \omega_0^2(b-\gamma)^2, j = 3, 4$, 从而得到系统的实 Jordan 规范形为

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + k_0 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

式中,

$$\begin{aligned} k_0 &= \gamma / (8q_1(q_2^2q_2 + 2b^3)) \\ f_i &= \alpha(a_{0100}^i y_2 + a_{0010}^i y_3 + a_{0001}^i y_4) + \\ &= 12a_0^i b^2 \sqrt{c} (y_1 + y_3 + y_4)^2 + \\ &= a_0^i \sqrt{c} (y_1 + y_3 + y_4)^3 \end{aligned}$$

系数 $a_{0100}^i, a_{0010}^i, a_{0001}^i, a_0^i (i = 1, \dots, 4)$ 分别为:

$$\begin{aligned} a_{0100}^1 &= 4\sqrt{2}q_2(q_2(2-b\gamma) - 2\gamma) \\ a_{0010}^1 &= q_3(q_2 - q_1) + 2q_1(q_4 + 2q_5) \\ a_{0001}^1 &= a_{0010}^1 + 2q_2q_3, \quad a_{0100}^2 = -8\gamma q_1 q_2^2 \\ a_{0010}^2 &= \sqrt{2}q_6((b\gamma - q_1)(b\gamma - 2) - 4b\gamma)/\gamma \\ a_{0001}^2 &= a_{0010}^2 + 2\sqrt{2}q_1 q_6(b\gamma - 2)/\gamma \\ a_{0100}^3 &= 4\gamma(b\gamma(q_2(q_1 + b - 6) + 2\gamma) - 2q_1(q_2 - \gamma))/\omega_0 \\ a_{0010}^3 &= 8\gamma^2\lambda_3 q_2^2 - 4q_4 \\ a_{0001}^3 &= {}^{4q_1}\mathbf{P}_{b^l \gamma^{3-l}}^{l=0, \dots, 3} (5, -13, 11, -3) + {}^2\mathbf{P}_{b^l \gamma^{5-l}}^{l=1, \dots, 4} \\ &= (26 - 5q_1, 14q_1 - 70, 62 - 13q_1, 4q_1 - 18) \\ &+ {}^1\mathbf{P}_{b^l \gamma^{9-l}}^{l=3, \dots, 6} (1, -14, 3, -1) + 4q_4 + bq_1 q_5/\gamma \\ a_{0100}^4 &= 4\gamma(b\gamma(q_2(q_1 - b + 6) - 2\gamma) - 2q_1(q_2 - \gamma))/\omega_0 \\ a_{0010}^4 &= {}^1\mathbf{P}_{b^l \gamma^{9-l}}^{l=3, \dots, 6} (-2, 17, -6, 2) - {}^8\mathbf{P}_{b^l \gamma^{5-l}}^{l=1, \dots, 4} \\ &= (13, -35, 31, 2) - {}^2\mathbf{P}_{b^l \gamma^{7-l}}^{l=2, \dots, 5} \\ &= (-7, 20, -19, 6) + a_{0001}^3 - 8q_4 \\ a_{0001}^4 &= -8\gamma^2\lambda_4 q_2^2 + 4q_4/\gamma \end{aligned}$$

$$a_0^1 = 6q_1q_2, a_0^2 = 8q_1(q_2 - \gamma)/(\omega_0\gamma)$$

$$a_0^3 = -2(q_2(\gamma\lambda_3 + 2) - 2\gamma)$$

$$a_0^4 = -2(q_2(\gamma\lambda_3 - 2) + 2\gamma)$$

设系统(5)在零平衡点附近的三阶近似解

$$y_i = \sum_{k=1}^3 \varepsilon^k y_{ik}(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4), i = 1, \dots, 4$$

其中, $T_j = \varepsilon^j t (j = 0, 1, 2)$ 表示不同的时间尺度, ε 是一个小无量纲参数. 将参数 a 中的扰动参数表示为 $\alpha = \varepsilon^2 \mu + O(\varepsilon^3)$, 使得控制参数与系统的非线性项在分析计算中具有同等的影响^[22]. 对系统(5)引入极坐标变换 $A(T_2) = \frac{1}{2} r(T_2) e^{i\Phi(T_2)}$, 其中, 实函数 r 和 Φ 可以计算得到

$$\begin{aligned} \dot{r} = & -\frac{3bc\gamma r^3}{4K_4} ({}^2P_{b^l\gamma^{5-l}}^{l=0,\dots,5}(-32, -40, 162, -119, \\ & 32, -3) - {}^1P_{b^l\gamma^{7-l}}^{l=1,\dots,5}(-66, 143, -83, 1, 5) \\ & -5b\gamma q_5) - \frac{\mu\gamma^2 r}{2bK_4} ({}^2P_{b^l\gamma^{6-l}}^{l=0,\dots,6}(100, -340, 449, \\ & 292, 98, -16, 1) + {}^1P_{b^l\gamma^{8-l}}^{l=1,\dots,6} \\ & (-41, 149, -206, 134, -41, 5) + 2b^2\gamma^4 q_6) \\ \dot{\Phi} = & -\frac{3\sqrt{2}b^2cr^2}{8\omega_0 K_4} ({}^2P_{b^l\gamma^{6-l}}^{l=0,\dots,6}(160, -323, -520, \\ & 624, -284, 56, -4) - {}^1P_{b^l\gamma^{8-l}}^{l=1,\dots,6}(280, \\ & -768, 718, -246, 1, 9) + {}^1P_{b^l\gamma^{10-l}}^{l=2,\dots,6}(21, \\ & -74, 96, -54, 11)) - \frac{\sqrt{2}\gamma^2\mu}{4\omega_0 K_4} \\ & ({}^4P_{b^l\gamma^{6-l}}^{l=0,\dots,6}(200, -580, 658, 375, 113, \\ & -17, 1) - {}^2P_{b^l\gamma^{8-l}}^{l=1,\dots,7}(182, -592, 753, \\ & -462, 144, -21, 1) + {}^1P_{b^l\gamma^{10-l}}^{l=2,\dots,7}(49, \\ & -177, 242, -154, 45, -5) - 2b^3\gamma^6 q_6) \end{aligned}$$

基于上述分析, 当 $\mu > 0$ 时, 非平凡平衡点是渐进稳定的; 当 $\mu < 0$ 时, 平衡点的稳定性发生改变, 系统产生两条半径为 $r = \sqrt{\frac{2\mu K_1}{3b^2cK_2}}$ 的稳定周期轨道.

因此, 系统在 $\mu = 0$ 处发生了超临界的 Hopf 分岔, 这与式(3)中得到的结果一致. 经过一系列数值计算, 得到分岔点处的周期轨道近似解表达式为

$$y_1 = \frac{K_3}{3b\omega_0 K_2} \left(\sqrt{2bq_2} (\gamma - q_2) (\cos(2\psi t) + 1) - 2b\gamma q_2 \sin(2\psi t) - \frac{\sqrt{6}\omega_0 K_1}{K_3} \cos(\psi t) \right)$$

$$\begin{aligned} y_2 = & \frac{K_3}{3b\omega_0 K_2} \left(2\sqrt{2bq_2} (\gamma - q_2) \sin(2\psi t) + \right. \\ & \left. b\gamma q_2 (\cos(2\psi t) - 1) - \frac{\sqrt{6}\omega_0 K_1}{K_3} \sin(\psi t) \right) \\ y_3 = & \frac{\gamma\omega_0 K_3 (q_2\gamma\lambda_4 + 2q_2 - 2\gamma)}{\lambda_3 q_1 K_2 (b\gamma\lambda_3 - 4\omega_0^2\gamma + 2b)} \\ & \left(b(\gamma\lambda_3 - 2) \cos(2\omega_0 t) + 2\gamma\lambda_3 \sin(2\omega_0 t) \right. \\ & \left. + \frac{b\gamma\lambda_3 - 4\omega_0^2\gamma + 2b}{\omega_0} \right) \\ y_4 = & \frac{\gamma\omega_0 K_3 (q_2\gamma\lambda_3 + 2q_2 - 2\gamma)}{\lambda_4 q_1 K_2 (b\gamma\lambda_4 - 4\omega_0^2\gamma + 2b)} \\ & \left(b(\gamma\lambda_3 - 2) \cos(2\omega_0 t) - \right. \\ & \left. 2\gamma\lambda_4 \sin(2\omega_0 t) - \frac{b\gamma\lambda_4 - 4\omega_0^2\gamma + 2b}{\omega_0} \right) \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned} \psi = & \omega_0 + \Phi, \Phi(0) = 0, \Phi = \frac{\mu\gamma\omega_0 K_5}{4b\sqrt{b}K_2} \\ K_1 = & {}^2P_{b^l\gamma^{5-l}}^{l=0,\dots,5}(100, -240, -83, 209, 15, -1) - \\ & {}^1P_{b^l\gamma^{7-l}}^{l=1,\dots,5}(41, -108, 98, -36, 5) + 2b\gamma q_5 \\ K_2 = & {}^2P_{b^l\gamma^{4-l}}^{l=0,\dots,4}(32, 72, -90, 29, -3) - \\ & {}^1P_{b^l\gamma^{6-l}}^{l=1,\dots,4}(66, -77, 6, 5) + {}^5P_{b^l\gamma^{8-l}}^{l=2,\dots,4}(1, -2, 1) \\ K_3 = & \frac{\alpha\gamma}{b\sqrt{c}} {}^1P_{b^l\gamma^{3-l}}^{l=0,\dots,3}(-25, 35, -11, 1) + \\ & \frac{2\alpha\gamma}{b\sqrt{c}} {}^1P_{b^l\gamma^{5-l}}^{l=1,\dots,3}(1, -2, 1) \\ K_4 = & (b\gamma^2 q_2 + 2(q_2 - \gamma)^2)(2b\gamma^2 q_2 + (q_2 - 4\gamma)^2) \\ K_5 = & -{}^1P_{b^l\gamma^{5-l}}^{l=0,\dots,5}(72, 48, -27, 200, -50, 4) + \\ & {}^1P_{b^l\gamma^{7-l}}^{l=1,\dots,5}(67, -147, 89, -5, 1) - 5b\gamma q_5 \end{aligned}$$

为了证明理论分析的正确性, 根据第一节的参数设置, 计算得到 $a_h = 18.29$, 系统在此处发生超临界的 Hopf 分岔. 一对稳定的周期轨道在平衡点 $(\pm 0.816, 0, 0, 0)$ 附近产生, 如图 4(b) 所示.

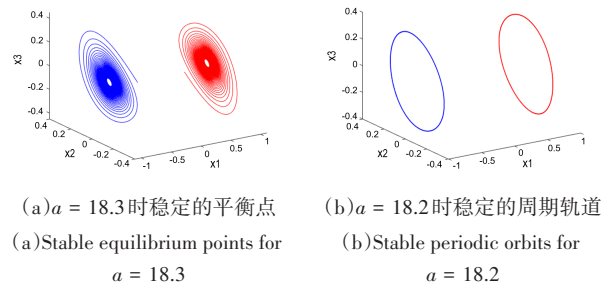


图 4 系统在 $x_1 - x_2 - x_3$ 空间中的相图

Fig. 4 Phase portraits in the $x_1 - x_2 - x_3$ space

3 自适应同步机制

混沌系统的动力学同步与控制研究对于其在实际的物理硬件实现中具有重要意义^[3,4,19]. 本节运用反馈控制技术^[3,23], 设计了一个自适应反馈控制器, 以实现混沌超Jerk系统在参数未设定的情况下动力学行为的完全同步. 考虑驱动系统(1)所对应的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + u_1 \\ \dot{y}_2 = y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = \hat{a}y_4 + u_3 \\ \dot{y}_4 = y_1 - \hat{\gamma}y_2 - y_3 - \hat{b}y_4 - \hat{c}y_1^3 + u_4 \end{cases} \quad (6)$$

式中, $u_i (i = 1, \dots, 4)$ 表示设计的控制器, 时变参数 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{\gamma}$ 需要根据估计的更新律进行预测, 直到实现两个系统行为同步. 定义驱动系统和响应系统之间的同步误差为

$$e_i = y_i - x_i, i = 1, \dots, 4$$

则可得到误差动力系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 + u_1 \\ \dot{e}_2 = e_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 = \hat{a}e_4 + e_a x_4 + u_3 \\ \dot{e}_4 = e_1 - \hat{\gamma}e_2 - e_\gamma x_2 - e_3 - \hat{b}e_4 - e_b x_4 - \hat{c}e_1(y_1^2 + y_1 x_1 + x_1^2) - e_c x_1^3 + u_4 \end{cases} \quad (7)$$

式中, e_a, e_b, e_c, e_γ 表示参数的误差估计.

定理1 当选取如下控制器

$$\begin{cases} u_1 = -e_2 - k_1 e_1 \\ u_2 = -e_3 - k_2 e_2 \\ u_3 = -\hat{a}e_4 - k_3 e_3 \\ u_4 = -e_1 + \hat{\gamma}e_2 + e_3 + \hat{b}e_4 - k_4 e_4 + \hat{c}e_1(y_1^2 + y_1 x_1 + x_1^2) \end{cases} \quad (8)$$

时, 驱动系统(1)和响应系统(6)是全局和指数同步

的, 对应的时变参数估计为

$$\dot{\hat{a}} = -e_3 x_4, \dot{\hat{b}} = e_4 x_4, \dot{\hat{c}} = e_4 x_1^3, \dot{\hat{\gamma}} = e_4 x_2 \quad (9)$$

证明: 定义一个无界的二次 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_\gamma^2)$$

其中 $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_a, e_b, e_c, e_\gamma)^T$. 值得注意的是对于所有的 $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^8 \setminus \{0\}$, 函数 $V(\mathbf{e})$ 始终是正定的. 计算 V 沿着(7)的正半轨线对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}) = & -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_4^2 + \\ & e_a (e_3 x_4 + \dot{e}_a) - e_b (e_4 x_4 - \dot{e}_b) + \\ & e_c (e_4 x_1^3 + \dot{e}_c) + e_\gamma (e_4 x_2 + \dot{e}_\gamma) \end{aligned}$$

选取自适应控制器(8)和更新律(9), 可以得到

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_4^2$$

在 $\mathbf{R}^8$ 上它是一个半负定函数.

根据 Barbalat 引理^[24], 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 对于所有的 $e_i(0) \in \mathbf{R}^4$, 误差函数 $e_i(t)$ 趋近于 0. 此时, 同步误差是全局渐近稳定的. 因此, 响应系统(6)的状态变量和时变参数在一定的时间间隔后可与驱动系统(1)趋近同步.

下面通过数值仿真, 可以直观的展现所设计控制器的同步效果. 设置驱动系统中参数值 $a = 4.738$, $b = 7$, $c = 1.5$, $\gamma = 2$ 和初始条件为 $(1.1, 0.5, -0.9, 0.9)$. 响应系统的参数估计初始值 $\hat{a} = 2.5$, $\hat{b} = 7$, $\hat{c} = 0.5$, $\hat{\gamma} = 1$ 和初始条件取值为 $(0.1, 0.5, -0.9, 0.9)$. 这里取定常数 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2$. 系统采用定理1设计的自适应控制技术的同步效果如图5所示, 其中实线和虚线分别代表驱动系统和响应系统的运行轨迹. 图6展示了同步误差的时间演化, 说明系统经过较短的时间间隔, 其同步误差收敛到零. 数值结果与理论结果一致, 证明了所提出的系统同步方案的合理性和有效性.

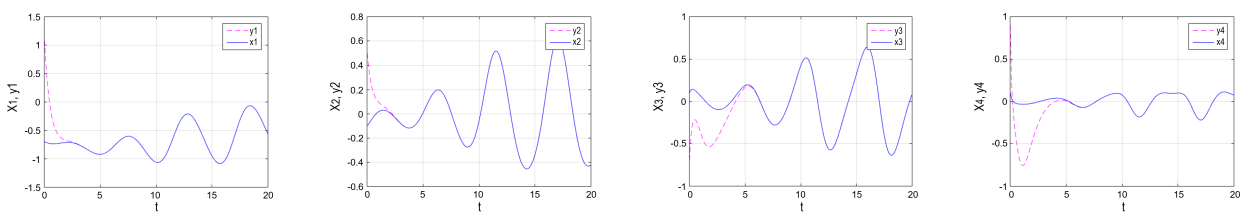


图5 驱动系统和响应系统状态变量的同步行为

Fig. 5 Synchronized states of drive system and response system for each state variable

4 结论

本文研究了一个四维混沌超Jerk系统的分岔特性和同步反馈方案, 借助非线性诊断工具直观地

展现出系统的混沌特性. 随着参数的持续变化, 系统通过逆倍周期分岔和大幅度的周期振荡产生了双翼混沌吸引子. 通过分岔理论和扰动方法, 得出系统 Hopf 分岔的存在条件及其特性, 并进一步获

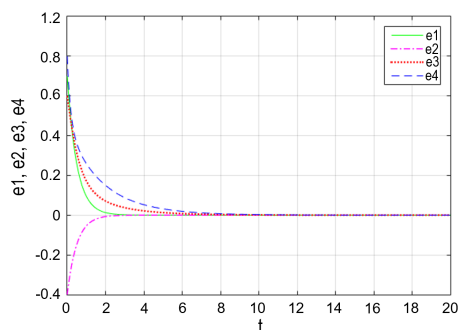


图6 状态变量同步误差的时间演化图

Fig. 6 Time-evolution of the synchronization errors for each state variable

得由分岔产生周期轨道的稳定性及其近似解表达式. 这些结果建立了分岔点处参数之间的精确关系, 可为电路实验中的分岔控制和故障诊断提供一定理论参考. 基于 Lyapunov 稳定性理论和同步技术, 提出了一种适用于混沌超 Jerk 系统的全局反馈同步方案. 通过分析系统结构参数的局部稳定性和潜在分岔情况, 研究人员可以进一步有效地在实际情况下调整结构参数, 以控制和保持两个动力系统之间的一致性. 本文的研究为后续该系统在混沌加密领域内的实际应用提供指导.

参 考 文 献

- 1 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric sciences*, 1963, 20(2): 130~141
- 2 Orue A B, Alvarez G, Pastor G, et al. A new parameter determination method for some double-scroll chaotic systems and its applications to chaotic cryptanalysis. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15: 3471~3483
- 3 Wang X, Vaidyanathan S, Volos C, et al. Dynamics, circuit realization, control and synchronization of a hyperchaotic hyperjerk system with coexisting attractors. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89: 1673~1687
- 4 Vaidyanathan S, Akgul A, Kacar S, et al. A new 4-D chaotic hyperjerk system, its synchronization, circuit design and applications in RNG, image encryption and chaos-based steganography. *European Physical Journal Plus*, 2018, 133: 46
- 5 王全宇, 王贺元, 李阔. 超混沌地磁系统的同步控制. 动力学与控制学报, 2019, 17(2): 151~158 (Wang Q Y, Wang H Y, Li K. Synchronization control of hyperchaotic earth's magnetic field system. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(2): 151~158 (in Chinese))
- 6 Han B, Wang N, Bao B C, et al. Initial condition-dependent dynamics and transient period in memristor-based hypogenetic jerk system with four line equilibria. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, 57: 264~275
- 7 Rössler O E. An equation for hyperchaos. *Physics Letters A*, 1979, 71: 155~157
- 8 Chua L O, Itoh M, Ljupco K, et al. Chaos synchronization in Chua's circuit. *Journal of Circuits Systems and Computers*, 1993, 3(1): 93~108
- 9 Sprott J C. Some simple chaotic flows. *Physical Review E*, 1994, 50: 647~650
- 10 Sprott J C. Some simple chaotic jerk functions. *American Journal of Physics*, 1997, 65: 537~543
- 11 Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9: 1465~1466
- 12 Lv J H, Chen G R. A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12: 659~661
- 13 Chlouverakis K E, Sprott J C. Chaotic hyperjerk systems. *Chaos Solitons & Fractals*, 2006, 28: 739~746
- 14 Dalkiran F Y, Sprott J C. Simple chaotic hyperjerk systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, 26: 1650189
- 15 Munmuangsaen B, Srisuchinwong B. Elementary chaotic snap flows. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2011, 44: 995~1003
- 16 Leutcho G, Kengne J, Kengne L K. Dynamical analysis of a novel autonomous 4-D hyperjerk circuit with hyperbolic sine nonlinearity: chaos, antimonotonicity and a plethora of coexisting attractors. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, 107: 67~87
- 17 Zhang X, Wang C H. Multiscroll hyperchaotic system with hidden attractors and its circuit implementation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, 29: 1950117
- 18 Li H M, Yang Y F, Li W, et al. Extremely rich dynamics in a memristor-based chaotic system. *European Physical Journal Plus*, 2020, 135: 579
- 19 Mahmoud G M, Farghaly A A, Abed-Elhameed T M, et al. Dynamics of distributed-order hyperchaotic complex Van der Pol oscillators and their synchronization and control. *European Physical Journal Plus*, 2020, 135: 32
- 20 Nayfeh A H. Perturbation Methods. New York: Wiley, 1973
- 21 Smith L L, Morino L. Stability analysis of nonlinear differential autonomous systems with applications to flutter. *AIAA Journal*, 1976, 14: 333~341
- 22 Nayfeh A H, Balachandran B. Motion near a Hopf bifurca-

- tion of a three-dimensional system. *Mechanics Research Communications*, 1990, 17: 191~198
- 23 Elabbasy E M, Agiza H N, El-Dessoky M M. Adaptive synchronization for four-scroll attractor with fully unknown parameters. *Physics Letters A*, 2006, 349: 187~191
- 24 Vukic Z, Kuljaca L, Donlagic D, et al. Nonlinear control systems. New York: Marcel Dekker, 2003

BIFURCATION AND SYNCHRONIZATION CONTROL OF A FOUR-DIMENSION HYPERJERK SYSTEM *

Jiang Lishuang¹ Li Jing^{1†} Zhang Wei²

(1. Faculty of Science, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

(2. Faculty of Materials and Manufacturing, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract The aim of this paper is to investigate bifurcation and chaos routes of a four-dimension hyperjerk system with double-scroll attractors, and to design an adaptive feedback controller to realize global exponential synchronization. The chaotic characteristics are revealed via phase diagram, Poincaré map, bifurcation diagram and Lyapunov exponents spectrum. It is concluded that the system achieves chaotic state through inverse period-doubling bifurcations and large amplitude periodic oscillations. Based on bifurcation theory and perturbation method, the exact relationship between the parameters at the bifurcation point is established. We further analyze stabilities of bifurcated periodic orbits and their approximate solutions. By using a adaptive synchronization technique, a scheme to realize complete synchronization of chaotic systems is proposed. Numerical simulations demonstrate that the proposed mechanism is feasible and effective. This work can provide a theoretical reference for practical applications of such system in the field of chaotic encryption.

Key words hyperjerk system, strange attractor, bifurcation, periodic orbit, synchronization control

Received 7 November 2020, revised 7 December 2020.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11772007, 11832002, 11290152) and the Beijing Natural Science Foundation (1172002, Z180005)

† Corresponding author E-mail: leejing@bjut.edu.cn