

一个周期性强迫的四维超混沌系统的复杂动力学性质^{*}

陈熙统[†] 鲍江宏

(华南理工大学 数学学院, 广州 510640)

摘要 基于 Hide-Skeldon-Acheson 系统, 构建了一个新的四维周期性强迫的超混沌系统, 不仅包含三角函数非线性项和三次多项式, 而且具有无穷多个孤立平衡点. 首先分析了新系统的平衡点与稳定性; 然后发现在适当的参数条件下, 周期解和隐藏混沌吸引子共存的多稳定(multistability)性质. 进一步研究表明系统具有可共存可数无穷多个周期解或混沌吸引子的大稳定(megastability)性质; 最后研究了系统的 Hopf 分叉, 数值模拟证实了理论的结果.

关键词 超混沌, 隐藏吸引子, 多稳定性, 大稳定性, Hopf 分叉

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-090

引言

近百年来, 动力系统和混沌学得到飞速发展. “混沌学之父” Lorenz 在预测天气时, 由于将数据省略了万分之一后输入, 导致了预测天气结果的截然不同, 之后 Lorenz 提出了震惊世界的“蝴蝶效应”. Lorenz 在气象局研究的 Lorenz 系统, 成为新世纪混沌学的开端. 之后产生的众多混沌系统包括 Chen system^[1]、Lorenz-like system^[2-5]等极大地推动了混沌学的发展. 混沌已经在越来越多的地方被人们发现. 在传统的应用数学、物理化学工程、计算机科学中都时常有混沌学的身影, 甚至在金融领域, 也被人们用来做分析. 有目的地研究混沌, 超混沌系统是一个关键的、可值得探究的领域.

由于多项式类型微分方程的孤立平衡点是有限的, 如果想要构造一个拥有无穷多孤立平衡点的动力系统, 那它必然含有非线性项. Yang 和 Qiao^[6]于 2019 年提出了一个拥有任意多个平衡点的 3D 动力系统, 并具有丰富的动力学性质.

多稳定性(multistability)是指系统对于不同的初始条件和一组固定参数, 具有不同吸引子(周期的、拟周期的、稳定的、混沌的或超混沌的)共存的性质^[7]. 此类系统对噪声、初始条件和系统参数都

非常敏感. 多稳定性是动力系统中最重要现象之一. 它发生在许多科学领域, 包括物理、化学、生物学、经济学和自然. 例如, 在具有特定特性的商业设备的设计中, 为了在噪声环境中稳定所需的状态, 就必须避免产生多稳定性. 另一方面, 在不改变参数的情况下, 多稳态允许系统性能的灵活性, 并且可以与正确的控制策略一起使用, 以诱导不同共存状态之间的切换. 有时有无穷多吸引子共存于动力系统中, 当这些无穷多的吸引子是不可数时, 这种情况称为极端多稳定性(extreme multistability); 当这些无穷多的吸引子是可数时, 这种情形称为大稳定性(megastability)^[7]. 大稳定性在文献中较为少见, 通常只在一些非线性振荡器中偶尔出现.

Prakash 等^[8]研究了一个具有良好多稳定性和大稳定性质的动力系统. Bao 和 Chen^[9]探究了具有直线平衡点的 4D 系统的多稳定性. Bao 和 Liu^[10]研究了具有曲线平衡点 5D 动力系统的多稳定性和 Hopf 分叉等. Leutcho 等^[11]探究了一个二维具有无穷多吸引子的非线性振荡器的性质. Vo 等^[12]利用吸引子图像及其吸引域的熵, 能量和均匀性分析了一个四维的大稳定性振荡器.

本文基于 Hide-Skeldon-Acheson 动力系统,

2020-07-19 收到第 1 稿, 2020-09-02 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(11671149)

[†] 通讯作者 E-mail: 13246866243@163.com

构建了一个新的,具有无穷多孤立平衡点,并且具有多稳定性、大稳定性质的四维周期强迫性超混沌系统,并分析了其Hopf分叉.

1 一个新的周期性强迫的四维超混沌系统

1.1 新四维超混沌系统的提出

上世纪末,Hide等人介绍了一种三维的非线性耦合常微分方程,对自激法拉第圆盘同极发电机进行建模,称为 Hide-Skeldon-Acheson 动力系统^[13]:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y-1) - dz \\ \dot{y} = f(1-x^2) - gy \\ \dot{z} = x - kz \end{cases} \quad (1)$$

其中 d, f, g, k 均为实常数. 基于系统(1), 我们引入下面的系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y-1) - dz + ew \\ \dot{y} = f(1-x^2) - gy + qz \\ \dot{z} = x - kz \\ \dot{w} = a - b \sin z + cx^3 - hz \end{cases} \quad (2)$$

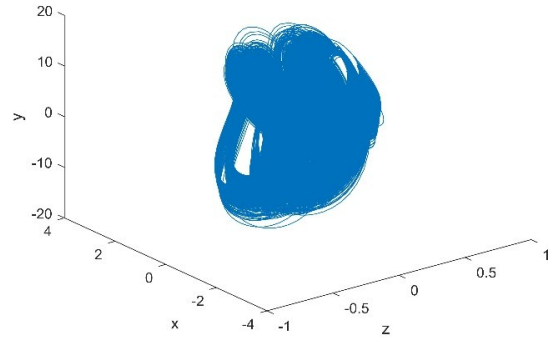
其中 $a, b, c, d, e, f, g, k, q$ 和 h 都是系统的实常数参数. 取定系统参数 $(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) = (0.01, 30, 0, 2, 0.001, 28.5, 1, 1.2, 0, 0)$ 时, 选择初始条件为 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$, 对应的李雅普诺夫指数为 $(0.3546, 0.0108, 0, -0.9302)$, 李雅普诺夫维数是 3.3937, 系统(2)展现出超混沌特性. 图1给出了对应的 $z-x-y$ 空间相图和 $z-w$ 平面庞加莱映射图, 证实了系统(2)此时确实存在一个超混沌吸引子.

1.2 平衡点与稳定性

若 $k = h = 0$, $|a| > |b|$ 或 $k = h = b = 0$, $ac \neq 0$, 系统(2)没有平衡点; 若 $k = h = a = b = 0$, $gec \neq 0$, 系统(2)有曲线平衡点 $(0, (f+qz)/g, z, dz/e)$, 其中 $z \in \mathbf{R}$; 若 $a = f = g = 0$, $qe \neq 0$, 系统(2)具有直线平衡点 $(0, 0, y, 0)$, 其中 $y \in \mathbf{R}$; 若 $a = b = 0$, $ckh < 0$, $ge \neq 0$, 系统(2)只有一个平衡点 $Q(0, f/g, 0, 0)$, 对应的特征方程为:

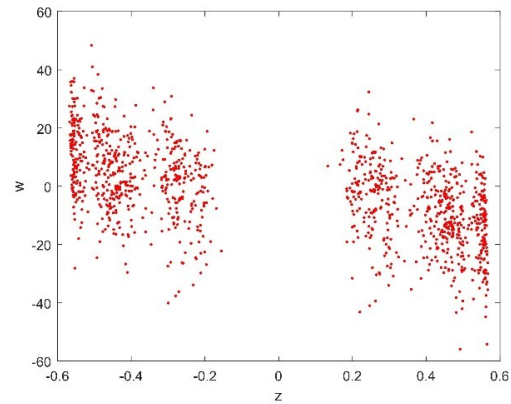
$$(\lambda + g) \left(\lambda^3 + \frac{kg + g - f}{g} \lambda^2 + \frac{dg + kg - kf}{g} \lambda + eh \right) = 0 \quad (3)$$

根据 Routh-Hurwitz 判据, 方程(3)的根 λ 的实部全为负, 当且仅当:



(a) $z-x-y$ 空间相图

(a) Phase diagram in $z-x-y$ space



(b) $z-w$ 平面庞加莱映射图

(b) Poincaré mapping in $z-w$ plane

图1 系统(2)超混沌吸引子的相图与庞加莱映射图

Fig.1 Phase diagram and Poincaré mapping of a hyperchaotic attractor of system (2)

$$g > 0$$

$$\Delta_1 = \frac{kg + g - f}{g} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{kg + g - f}{g} & eh \\ 1 & \frac{dg + kg - kf}{g} \end{vmatrix} = \frac{(kg + g - f)(dg + kg - kf)}{g^2} - eh > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{kg + g - f}{g} & eh & 0 \\ 1 & \frac{dg + kg - kf}{g} & 0 \\ 0 & \frac{kg + g - f}{g} & eh \end{vmatrix} = eh\Delta_2 > 0$$

这些不等式化简为

$$\begin{aligned}
 &g > 0 \\
 &kg + g - f > 0 \\
 &(kg + g - f)(dg + kg - kf) - ehg^2 > 0 \\
 &eh > 0
 \end{aligned}$$

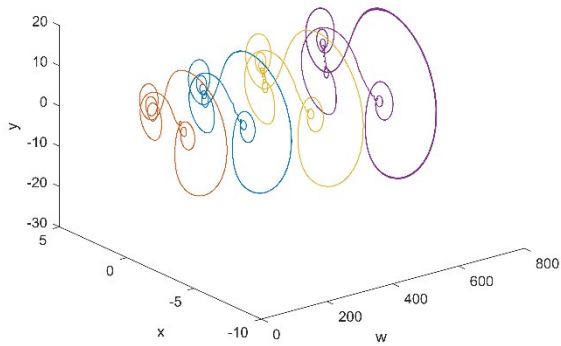
当 $f=g$ 时,上述不等式化简为:

$$g > 0, k > 0, eh > 0, kd - eh > 0 \quad (4)$$

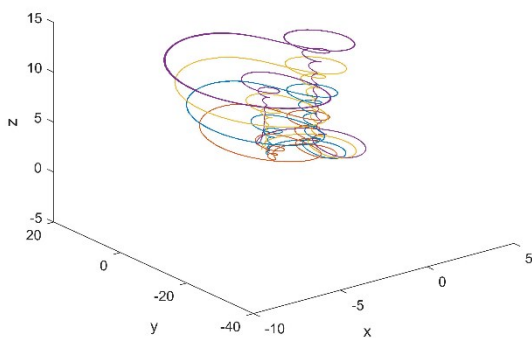
在条件(4)下, Q 是渐进稳定的.

1.3 多稳定性

取定系统参数 $(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) = (0.56, 0, 1, 2, 0.01, 20, 1, 0, 10, 0)$ 时, 系统(2)没有平衡点. 选择初始条件 $(-1.9004, -2.1667, 1.8691, 125.0434)$, $(1.2111, 2.2270, 2.4232, 292.4852)$, $(-1.0330, 3.6740, 0.8440, 470.7031)$, $(0.6574, -7.7984, 1.0309, 662.9689)$ 时, 系统(2)均有周期解, 图2是此时系统的相图. 当初值为 $(-1.9004, -2.1667, 1.8691, 125.0434)$ 时, 对应的李雅普诺夫指数为 $(0, -0.0036, -0.1210, -0.2672)$.



(a) w - x - y 空间相图
(a) Phase diagram in w - x - y space



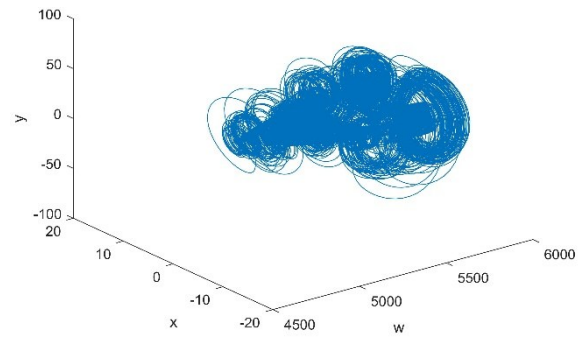
(b) x - y - z 空间相图
(b) Phase diagram in x - y - z space

图2 系统(2) 4个周期解的相图

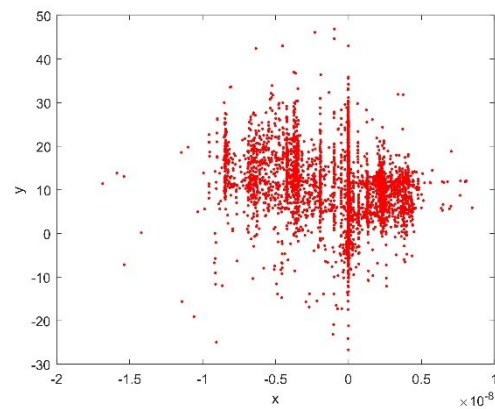
Fig.2 Phase diagram of 4 periodic solutions of system (2)

当选择初始条件为 $(200, 100, 100, -100)$ 时, 对应的李雅普诺夫指数为 $(0.0119, 0, -0.1421, -0.4571)$, 李雅普诺夫维数是2.0837, 这意味着系

统(2)存在一个隐藏混沌吸引子. 图3展示了对应的 w - x - y 空间相图和 x - y 平面庞加莱映射图.



(a) w - x - y 空间相图
(a) Phase diagram in w - x - y space



(b) x - y 平面庞加莱映射图
(b) Poincaré mapping in x - y plane

图3 系统(2)隐藏混沌吸引子的相图与庞加莱映射图

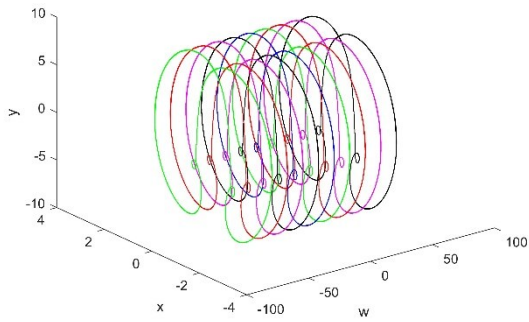
Fig.3 Phase diagram and Poincaré mapping of a hidden chaotic attractor of system (2)

系统参数 $(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) = (0.56, 0, 1, 2, 0.01, 20, 1, 0, 10, 0)$ 时, 不同的初值可产生周期解或隐藏混沌吸引子, 这表明系统(2)具有多稳定性.

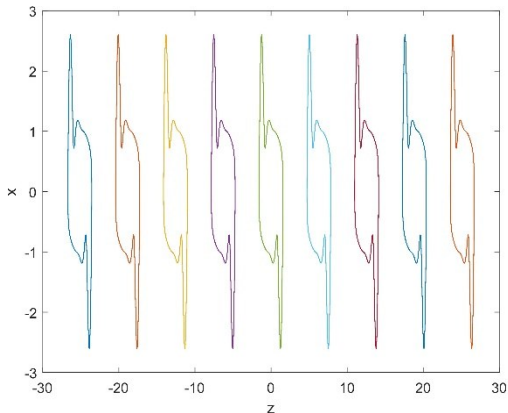
2 大稳定性

取定系统参数 $(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) = (0.01, 5, 0.11, 2, 1, 20, 1, 0, 0, 0)$ 时, 系统(2)有无穷多孤立平衡点. 当选择初始条件 $(0, 0, u, 2u)$, 其中 $-28 \leq u \leq 28$, 并且间隔为7时, 系统均表现为周期解, 对应的 z - x 平面相图, w - x - y 空间相图如图(4)所示. 特别的, 当初值为 $(0, 0, 7, 14)$ 时, 对应的李雅普诺夫指数为 $(0, -0.3182, -1.0545, -2.1036)$.

保持其它参数不变 $(a, b, c, d, e, g, k, q, h) =$



(a) w - x - y 空间相图
(a) Phase diagram in w - x - y space



(b) z - x 平面相图
(b) Phase diagram in z - x plane

图4 系统(2)大稳定参数下的相图(周期的)

Fig.4 Phase diagram of system (2) under megastability parameters (periodic)

(0.01, 5, 0.11, 2, 1, 1, 0, 0, 0), 变动 f , 令 $f \in [0.1, 100]$, 做出对应的分叉图如图5. 特别的, 取 $f = 44$, 即 $(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) = (0.01, 5, 0.11, 2, 1, 44, 1, 0, 0, 0)$, 系统(2)有无穷多孤立平衡点. 当选择初始条件 $(0, 0, u, 2u)$, 其中 $-28 \leq u \leq 28$, 并且间隔为7时, 系统均表现为混沌吸引子, 对应的 z - x 平面相图, x - z - w 空间相图如图6所示. 特别的, 当初值为 $(0, 0, 7, 14)$ 时, 对应的李雅普诺夫指数为 $(0.0196, 0, -0.9040, -1.3294)$. 令 $u = 700000$, 图7是对应的 z - x - y 空间相图与 x - w 平面庞加莱映射图.

3 Hopf分叉

本节利用文献[14]中描述的投影方法计算与Hopf分叉相关的第一个李雅普诺夫系数. 为了计算与表示的方便, 在系统(2)中, 将 a 和 b 设为0, 当 $ckh < 0, ge \neq 0$, 系统(2)有且只有一个平衡点 $P_0[0, f/g,$

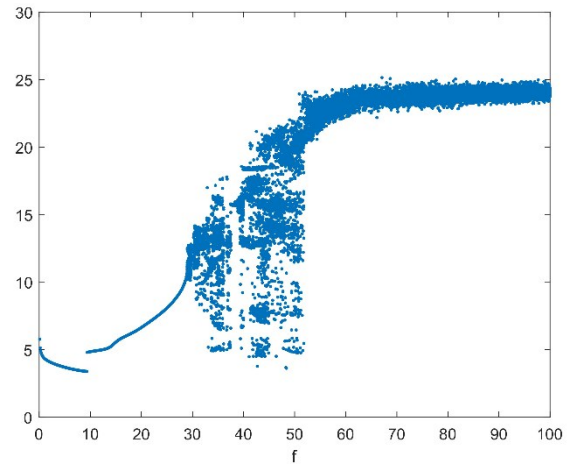
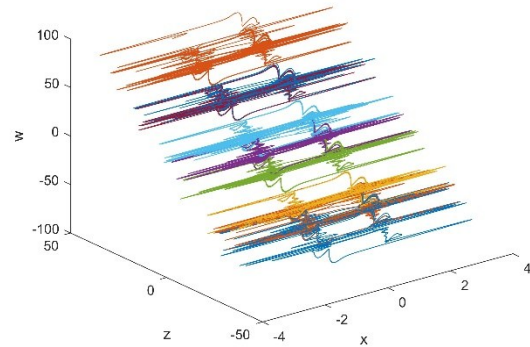
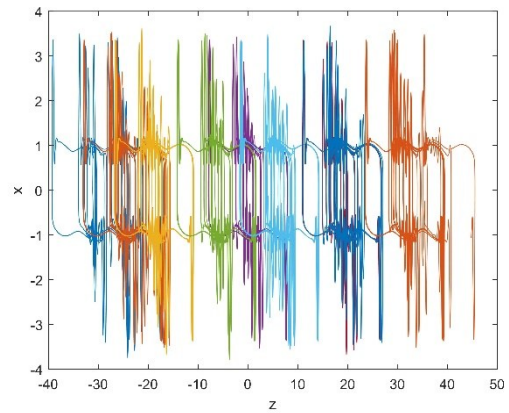


图5 系统(2)参数 f 的分叉图

Fig.5 Bifurcation graph for parameter f of system (2)



(a) x - z - w 空间相图
(a) Phase diagram in x - z - w space



(b) z - x 平面相图
(b) Phase diagram in z - x plane

图6 系统(2)大稳定参数下的相图(混沌的)

Fig.6 Phase diagram of system (2) under megastability parameters (chaotic)

$0, 0]$. 平衡点 P_0 对应的特征方程为方程(3). 记:

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \frac{kg + g - f}{g} \lambda^2 + \frac{dg + kg - kf}{g} \lambda + eh$$

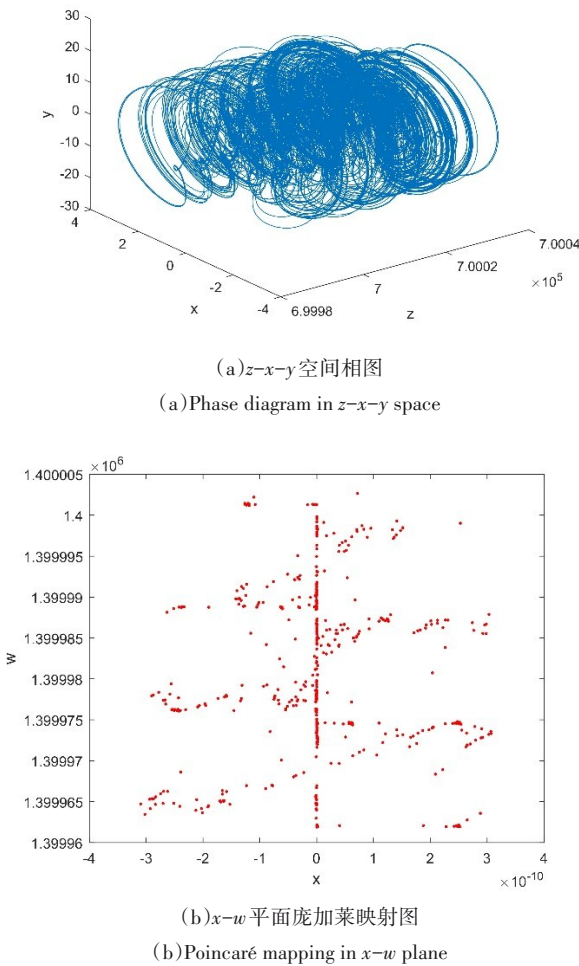


图7 系统(2)在条件 $u = 700000$ 下的相图与庞加莱映射图
Fig.7 Phase diagram and Poincaré mapping of system (2)
under condition $u = 700000$

$$e_0 = \frac{dg + kg - kf}{g} \cdot \frac{kg + g - f}{g}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{g(dg + kg - kf)}}{g}$$

$$S = \{(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) | a = b = q = 0, \\ ck < 0, f = g - 1, g > 0, \\ kg > -1, h = 1, e = e_0\}$$

当 $(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) \in S$, 有唯一的平衡点 $[0, fg, 0, 0]$, 系统(2)的特征方程拥有两个负的实数根 $-g, -(kg+1)/g$ 和一对共轭纯虚根 $i\omega$. 将 $\lambda = \alpha(e) + i\omega(e)$ 代入 $f(\lambda) = 0$ 中, 对 e 求微分, 可以得到:

$$\frac{d\lambda(e)}{de} = -\frac{g}{3g\lambda^2 + 2(kg+1)\lambda + (dg+k)}$$

考虑到 $i\omega$ 是 $f(\lambda) = 0$ 的根, 进而可以得到

$$\frac{d\lambda(e)}{de} \Big|_{e=e_0} = \frac{g}{3g\omega^2 - 2i(kg+1)\omega - (dg+k)}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda'(e)) \Big|_{e=e_0} = \frac{g^2}{2\omega^2 g^2 + 2(kg+1)^2} > 0 \quad (5)$$

因此 ϵ 条件满足, 证明了 $(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) \in S$ 时, Hopf分叉在 $P_0[0, f/g, 0, 0]$ 处发生. Hopf点的稳定性取决于第一李雅普诺夫系数的值, 如定理1所述.

定理1 考虑系统(2), 在平衡点 $P_0[0, f/g, 0, 0]$ 和参数 $(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) \in S$ 时, 第一李雅普诺夫系数为:

$$l_1 = -\frac{3\omega T(\omega^2 + g^2(d - \omega^2)^2)}{2(g^2 + 4\omega^4)S} \quad (6)$$

其中,

$$t = \frac{8}{3}\omega^8 - \frac{16d}{3}\omega^6 + \left(\frac{8}{3}d^2 + 3\right)\omega^4 - 3d\omega^2 + d^2$$

$$s = 8\omega^6 - \left(8d - \frac{2}{3}\right)\omega^4 + \left(\frac{8}{3}d^2 + 2\right)\omega^2 - d$$

$$m = \omega^2(d - \omega^2)^2 g^8 - \omega^2(d - \omega^2)^2 g^7$$

$$n = 4\omega^2(-c\omega^4 + (cd + \frac{4}{3})\omega^2 - \frac{c}{4} - \frac{2d}{3} + \frac{1}{6})g^2 \\ + \frac{2\omega^2(4d - 8\omega^2 - 1)}{3}g$$

$$T = tg^6 - tg^5 - (s - c\omega^4 + cd\omega^2)g^4 - sg^3 + m + n + 4c\omega^4$$

$$S = 1 + g^4(d - \omega^2)^2 + g^2(3\omega^2 - 2d)$$

(1) 如果 $l_1 > 0$, 系统(2)在 P_0 有一个横向 Hopf 点, 且这个 Hopf 点是不稳定的(弱排斥焦点). 此外, 对于每一个 $e < e_0$ 但是接近 e_0 , 在稳定的平衡点 P_0 附近会存在一个不稳定的极限环.

(2) 如果 $l_1 < 0$, 系统(2)在 P_0 有一个横向 Hopf 点, 且这个 Hopf 点是稳定的(弱吸引焦点). 此外, 对于每一个 $e > e_0$ 但是接近 e_0 , 在不稳定的平衡点 P_0 附近会存在一个稳定的极限环.

证明: 对系统(2)进行变换:

$$\begin{cases} x = x \\ y_1 = y + \frac{f}{g} \\ z = z \\ w = w \end{cases}$$

系统(2)变换为如下系统(仍用 y 表示 y_1), 并且 $(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) \in S$ 时, 唯一的平衡点 P_0 移动至 $O[0, 0, 0, 0]$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y + \frac{f}{g} - 1) - dz + ew \\ \dot{y} = -fx^2 - gy + qz \\ \dot{z} = x - kz \\ \dot{w} = a - b \sin(z) + cx^3 - hz \end{cases}$$

从式(5)的计算可知,横截性条件满足.现在来计算第一李雅普诺夫系数,它是用来表明平衡点的稳定性和周期轨道是否存在的量.由文献[14]可知,对于参数 $(a, b, c, d, e, f, g, k, q, h) \in S$,我们有特征根 $\lambda_1 = -g$, $\lambda_2 = -(gk+1)/g$, $\lambda_{3,4} = i\omega$. 计算可得:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{g} & 0 & -d & \frac{(gd+k)(gk+1)}{g^2} \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

记 p_1, p_2 是 A, A^T 的特征向量

$$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{gi}{2\omega(dg^2 - g^2\omega^2 + gi\omega - 1)} \\ 0 \\ \frac{(g\omega + 1)i}{2\omega(dg^2 - g^2\omega^2 + gi\omega - 1)} \\ \frac{-1 + dg^2 - g^2\omega^2}{2(dg^2 - g^2\omega^2 + gi\omega - 1)} \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} \frac{-(g\omega^2 - gd + i\omega)i\omega}{0} \\ \frac{\omega(gi\omega - 1)}{g\omega + i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} x_1y_2 + x_2y_1 \\ (-2g - 2)x_1y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6cx_1y_1z_1 \end{pmatrix}$$

然后我们可以计算以下值

$$A^{-1}B(p_2, p_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(g\omega^2 - gd - i\omega)\omega^2 P}{(g\omega^2 - gd + i\omega)g} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2i\omega E - A)^{-1}B(p_2, p_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\omega^2 P}{g + 2i\omega} \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中,

$$P = 2(g-1)(g\omega^2 - gd + i\omega)^2$$

因此可得:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re} \left[\langle p_1, C(p_2, p_2, \bar{p}_2) \rangle - \right. \\ &\quad 2 \langle p_1, B(p_2, A^{-1}B(p_2, \bar{p}_2)) \rangle + \\ &\quad \left. \langle p_1, B(\bar{p}_2, (2i\omega E - A)^{-1}B(p_2, p_2)) \rangle \right] \\ &= -\frac{3\omega T(\omega^2 + g^2(d - \omega^2)^2)}{2(g^2 + 4\omega^4)S} \end{aligned} \quad (7)$$

其中,

$$t = \frac{8}{3}\omega^8 - \frac{16d}{3}\omega^6 + \left(\frac{8}{3}d^2 + 3\right)\omega^4 - 3d\omega^2 + d^2$$

$$s = 8\omega^6 - (8d - \frac{2}{3})\omega^4 + \left(\frac{8}{3}d^2 + 2\right)\omega^2 - d$$

$$m = \omega^2(d - \omega^2)^2g^8 - \omega^2(d - \omega^2)^2g^7$$

$$\begin{aligned} n &= 4\omega^2(-c\omega^4 + (cd + \frac{4}{3})\omega^2 - \frac{c}{4} - \frac{2d}{3} + \frac{1}{6})g^2 \\ &\quad + \frac{2\omega^2(4d - 8\omega^2 - 1)}{3}g \end{aligned}$$

$$T = tg^6 - tg^5 - (s - c\omega^4 + cd\omega^2)g^4 - sg^3 + m + n + 4c\omega^4$$

$$S = 1 + g^4(d - \omega^2)^2 + g^2(3\omega^2 - 2d)$$

下面对 Hopf 分叉的存在和第一李雅普诺夫系数的结果进行数值模拟,取参数 $(a, b, c, d, f, g, k, q, h) = (0, 0, -0.56, 0.1, 0.5, 1.5, 0.2, 0, 1)$, 取 $e = 0.2164$. 计算可得第一李雅普诺夫系数 $l_1 = -0.0577$, 选择初始值 $(0.0240, 0.3332, 0.0094, 0.1646)$, 可以得到一个稳定的极限环. 对应的 x - z - w 平面相图和 x - z - y 平面相图如图8所示.

4 结论

基于三维的 Hide-Skeldon-Acheson 动力系统, 构建了一个新的、具有无穷多孤立平衡点的、四维周期强迫性超混沌系统, 主要做了以下研究: (1) 分析新系统的平衡点与稳定性; (2) 在一组系统参数下, 变化初始条件, 得到了四条周期轨和一个隐藏混沌吸引子, 表明新系统具有多稳定性性质; (3) 在一组系统参数下, 数值模拟表明了系统中可共存可数无穷多周期解或混沌吸引子, 表明新系统具有大稳定性性质; (4) 利用横截性条件, 证明了 Hopf 分叉的存在, 并计算出第一李雅普诺夫系数. 接着进行数值模拟, 在第一李雅普诺夫系数小于0的情况下, 找到了对应的稳定的极限环.

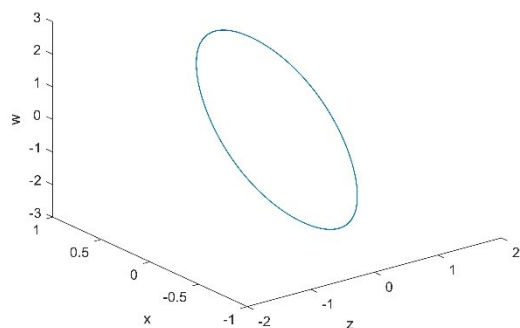
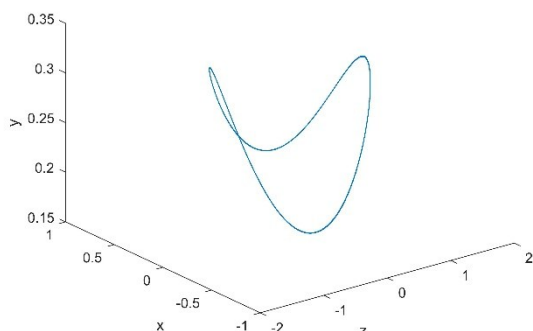
(a) z - x - w 空间相图(a) Phase diagram in z - x - w space(b) z - x - y 空间相图(b) Phase diagram in z - x - y space

图8 系统(2)Hopf分叉的数值模拟

Fig.8 Numerical simulation of Hopf bifurcation of system (2)

参 考 文 献

- Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1465~1466
- Li X Y, Ou Q J. Dynamical properties and simulation of a new Lorenz-like chaotic system. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 65(3): 255~270
- Leonov G A, Pogromsky A Y, Starkov K E. The dimension formula for the Lorenz attractor. *Physics Letters A*, 2011, 375(8): 1179~1182
- Chen Y M, Yang Q G. The nonequivalence and dimension formula for attractors of Lorenz-type systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, 23(12): 1350200
- Yang Q G, Chen Y M. Complex dynamics in the unified Lorenz-type system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, 24(4): 1450055
- Yang Q G, Qiao X M. Constructing a new 3D chaotic system with any number of equilibria. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, 29(5): 1950060
- Jafari S, Rajagopal K, Hayat T, et al. Simplest megastable chaotic oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, 29(13): 1950187
- Prakash P, Rajagopal K, Singh J P, et al. Megastability, multistability in a periodically forced conservative and dissipative system with signum nonlinearity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2018, 28(9): 111~115
- Bao J H, Chen D D. Coexisting hidden attractors in a 4D segmented disc dynamo with one stable equilibrium or a line equilibrium. *Chinese Physics B*, 2017, 26(8): 18~27
- Bao J H, Liu Y J. Multistability and bifurcations in a 5D segmented disc dynamo with a curve of equilibria. *Advances in Difference Equations*, 2019, 2019(1): 1~15
- Leutcho G D, Jafari S, Hamarash L L, et al. A new megastable nonlinear oscillator with infinite attractors. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, 134: 109703
- Vo T P, Shaverdi Y, Khalaf A J M, et al. A giga-stable oscillator with hidden and self-excited attractors: a megastable oscillator forced by his twin. *Entropy*, 2019, 21(5): 535
- Hide R, Skeldon A C, Acheson D J. A study of two novel self-exciting single-disk homopolar dynamos: theory. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1996, 452(1949): 1369~1395
- 尤里·阿·库兹涅佐夫. 应用分支理论基础. 北京: 科学出版社, 2010 (Yuri·A·Kuznetsov. Theory basis of applied branch. Beijing: Science Press, 2010(in Chinese))

COMPLEX DYNAMICAL PROPERTIES OF A FOUR-DIMENSION PERIODICALLY-FORCED HYPERCHAOTIC SYSTEM *

Chen Xitong[†] Bao Jianghong

(*Institute of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China*)

Abstract Based on the Hide-Skeldon-Acheson system, a new four-dimension periodically-forced hyperchaotic system is constructed, which not only contains nonlinear terms of trigonometric function and cubic polynomial, but also has infinitely many isolated equilibria. Firstly, the equilibrium and stability of the new system are analyzed, and then a multistability property is found with appropriate parameters, i.e., periodic solutions and a hidden chaotic attractor coexist. Further studies show that the current system has a megastability property, i.e., countable infinite periodic solutions or chaotic attractors coexist. Finally, Hopf bifurcation of the system is studied, and numerical simulations verify the theoretical results.

Key words hyperchaos, hidden attractor, multistability, megastability, Hopf bifurcation

Received 19 July 2020, revised 2 September 2020.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11671149)

† Corresponding author E-mail: 13246866243@163.com