

# 双边碰撞 Duffing 振子的对称性、尖点分岔与混沌\*

李冠强<sup>†</sup> 谢建华

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

**摘要** 以单自由度双边碰撞 Duffing 振子的对称系统以及非对称系统为研究对象. 分析了对称系统 Poincaré 映射的对称性, 借助不连续映射和打靶法分析系统的周期解及稳定性. 数值模拟表明: 对于对称系统, 首先一条对称周期轨道通过音叉分岔形成两条具有相同稳定性的反对称周期轨道, 然后两条反对称的周期轨道分别经历两个同步的周期倍化分岔各自生成一个反对称的混沌吸引子, 最后两个反对称的混沌吸引子融合为同一个对称的混沌吸引子. 对于非对称系统, 非对称周期运动的分岔可用一个两参数开折的尖点分岔描述, 音叉分岔过程发生了典型的对称破缺现象.

**关键词** 碰撞, 对称性, 音叉分岔, 尖点分岔, 混沌

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-089

## 引言

碰撞振动是工程 and 实际生活中一种常见的现象, 碰撞导致系统具有强非线性、不连续性和奇异性<sup>[1,2]</sup>. 文献[3]研究了一类单自由度受简谐激励的对称碰撞系统, 通过 Poincaré 映射和中心流形定理解析地分析了系统周期解的稳定性和局部分岔. 文献[4]分析了受激倒摆与刚性固定壁碰撞振动系统的局部和全局分岔. 文献[5]研究了一类单自由度双面碰撞振子的对称型周期  $n-2$  运动和非对称型周期  $n-2$  运动, 通过分析对称系统 Poincaré 映射的对称性, 证明对称周期运动只会产生音叉分岔, 找到了系统通向混沌的路径. 文献[6]研究了在双边约束的两自由度碰撞振动系统中, 找到了由音叉分岔和周期倍化分岔通向混沌的路径以及对称和反对称运动的 Hopf 分岔. 文献[7]研究了一类两自由度碰撞振动系统, 通过计算系统 Poincaré 映射的线性化矩阵, 确定系统的稳定性. 文献[8]将 OGY 混沌控制方法应用到含双侧碰撞振动系统, 把混沌控制到期望的目标控制轨道. 由于以上问题都是分段线性的, 可以求得系统的解析解进行分析. 但是由于许多实际问题都是非线性的, 难以求得其精确解, 需借助近似解析方法和数值方法分析系统的动力学行为. 文献[9]研究了具有刚性约束的  $n$  维非

线性动力系统, 通过几何方法推导了局部映射的 Jacobi 矩阵的解析式, 给出了该类系统 Poincaré 映射 Jacobi 矩阵的计算方法. 文献[10, 11]借助非光滑的 Melnikov 方法研究了双边碰撞 Duffing 系统的动力学行为. 文献[12]用改进的胞映射方法分析了双边碰撞 Duffing 系统的全局分岔和多解共存现象. 文献[13]研究了冲击减振器与非线性能量阱 (NES) 耦合系统, 数值模拟表明了该装置吸振效果的高效性. 文献[14]分析了 Duffing 单边碰撞系统的混沌鞍. 此外, 文献[15]研究了动力系统的对称性. 文献[16]将 Duffing-Holmes 系统离散为两维 Holmes 映射, 运用中心流形定理分析了该映射的 Pitchfork 分支、Flip 分支和 Hopf 分支.

本文考虑单自由度双边碰撞 Duffing 振子的对称系统和非对称系统, 采用打靶法和不连续映射分析系统的周期解及其稳定性. 数值模拟表明: 随着参数的变化, 对称系统通过音叉分岔产生两条具有相同稳定性的反对称周期轨道, 观察到通过周期倍化通向混沌的路径. 当参数发生非对称扰动时, 系统中的音叉分岔过程产生了典型的对称破缺现象.

## 1 双边碰撞 Duffing 振子的运动微分方程

考虑单自由度双边碰撞的 Duffing 振子, 在相邻两次碰撞间, 即  $|x| < d$ , 系统的运动微分方程为

2020-06-23 收到第 1 稿, 2020-08-31 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助重点项目 (11732014)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: gq16321@163.com

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + ax + bx^3 = \gamma\cos(\omega t) \quad (1a)$$

在碰撞面处,即 $x=\pm d$ ,碰撞前后的速度满足

$$\dot{x}_{i+} = -r_i\dot{x}_{i-} \quad (i=1,2) \quad (1b)$$

式中, $\dot{x}_{i-}, \dot{x}_{i+}$  ( $i=1,2$ ) 分别表示碰撞前后的瞬时速度, $r_1, r_2$  分别表示振子与左、右碰撞面的碰撞恢复系数. 如果 $r_1=r_2$ , 则该系统为对称系统; 如果 $r_1 \neq r_2$ , 则该系统为非对称系统. 引入速度变量 $y$ , 将方程(1a)写成一阶形式

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -ax - bx^3 - \beta y + \gamma\cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

即

$$\dot{X} = F(X, t) \quad (3)$$

这里, $X=(x, y)$ ,  $F(X, t)=(y, -ax-bx^3-\beta y+\gamma\cos(\omega t))$ . 方程(3)满足

$$\begin{cases} F(X, t+T) = F(X, t) \\ F(-X, t+T/2) = -F(X, t) \end{cases} \quad (4)$$

其中, $T=2\pi/\omega$ .

## 2 对称系统 Poincaré 映射的对称性

本节考虑对称系统, 即 $r_1=r_2$ , 由方程(4)可知, 在一个周期 $T$ 内, 如果 $X^*(t)$ 表示方程(1)的周期解, 那么 $-X^*(t+T/2)$ 也是方程(1)的周期解. 选取时间 Poincaré 截面

$$\Sigma = \{(x, y, t) \in [-d, d] \times R \times S^1 | t = t_0\} \quad (5)$$

建立时间 Poincaré 映射 $P$

$$P = \Sigma \rightarrow \Sigma \quad (6)$$

定义对称变换 $N$

$$N(x, y, t) = (-x, -y, t + T/2) \quad (7)$$

由于 $t \in S^1$ , 所以 $N^2=E$ , 其中, $E$ 为单位变换.

定义 $Q_1$ 表示相点 $(x, y)$ 从 $t=t_0$ 到 $t=t_0+T/2$ 的子映射(其间经历一次碰撞),  $Q_2$ 表示相点 $(x, y)$ 从 $t=t_0+T/2$ 到 $t=t_0+T$ 的子映射(其间经历一次碰撞). 由式(7), 可知

$$N \circ Q_1 = Q_2 \circ N \quad (8)$$

由式(8), 可得

$$Q_2 = N \circ Q_1 \circ N^{-1} \quad (9)$$

若记映射

$$Q_\alpha = N^{-1} \circ Q_1 \quad (10)$$

则 Poincaré 映射 $P$ 表示为

$$\begin{aligned} P &= Q_2 \circ Q_1 = N \circ Q_1 \circ N^{-1} \circ Q_1 \\ &= N^2 \circ (N^{-1} \circ Q_1)^2 = Q_\alpha^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Poincaré 映射 $P$ 可以表示为映射 $Q_\alpha$ 的二次迭代. 若 Poincaré 映射的不动点 $X_1$ 满足

$$X_1 = Q_\alpha(X_1) \quad (12)$$

则称不动点 $X_1$ 为对称不动点, 对应系统的对称周期轨道. 若 Poincaré 映射的不动点 $X_1$ 满足

$$X_2 = Q_\alpha(X_1) \neq X_1 \quad (13)$$

则称 $X_1$ 和 $X_2$ 为一对反对称的不动点, 对应系统的两条反对称的周期轨道.

## 3 打靶法求系统的周期解

方程(1)的周期解可以看作常微分方程两点的边值问题:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, t) \\ X(t_0 + T) - X(t_0) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

引入参数变量 $S=X(t_0)$ , 方程(14)改写为

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, t, S) \\ \Delta(S) = X(t_0 + T, S) - X(t_0, S) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中的 $S$ 需迭代改进, 直到边界条件满足设置精度为止. 迭代采用 Newton 迭代法:

$$S^{i+1} = S^i - [\Delta'(S^i)]^{-1} \Delta(S^i) \quad (16)$$

式中,

$$\Delta'(S^i) = \frac{\partial X(t_0 + T, S)}{\partial S} - \frac{\partial X(t_0, S)}{\partial S} = DP - I \quad (17)$$

其中, $DP$ 表示系统的 Poincaré 映射 $P$ 的 Jacobi 矩阵, $I$ 为单位矩阵. 以下利用变分方程和不连续映射求时间 Poincaré 映射 $P$ 的 Jacobi 矩阵 $DP$ .

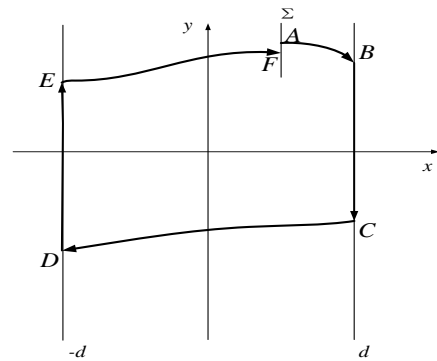


图1 双碰运动的相轨线

Fig.1 Phase portrait of double-impact motion

在一个周期 $T$ 内, 系统的双碰运动轨线如图1所示, 假定振子先与右碰撞面发生碰撞. 时间 Poincaré 映射在一个周期内可分为五个过程: (I)  $A \rightarrow B$ : 质量块从 $t=t_0$ 到右碰撞面的过程; (II)  $B \rightarrow C$ : 质量块与右碰撞面发生碰撞的过程; (III)  $C \rightarrow D$ : 质量块与右碰撞面碰撞后运动到左碰撞面的过程; (IV)  $D \rightarrow E$ : 质量块与左碰撞面发生碰撞的过程.

程;  $(V) E \mapsto F$ : 质量块与左碰撞面碰撞后运动到  $t = t_F = t_0 + T$  的过程. 那么这五个过程对应的映射可以表示如下:

$$\left. \begin{aligned} P_1: (x(t_A), y(t_A)) &\mapsto (x(t_B), y(t_B)) \\ P_{d2}: (x(t_B), y(t_B)) &\mapsto (x(t_C), y(t_C)) \\ P_2: (x(t_C), y(t_C)) &\mapsto (x(t_D), y(t_D)) \\ P_{d1}: (x(t_D), y(t_D)) &\mapsto (x(t_E), y(t_E)) \\ P_3: (x(t_E), y(t_E)) &\mapsto (x(t_F), y(t_F)) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Poincaré 映射  $P$  可以写成以上五个子映射的复合

$$P = P_3 \circ P_{d1} \circ P_2 \circ P_{d2} \circ P_1 \quad (19)$$

Poincaré 映射  $P$  的 Jacobi 矩阵可以表示为:

$$DP = DP_3 \circ DP_{d1} \circ DP_2 \circ DP_{d2} \circ DP_1 \quad (20)$$

式中,  $DP_1 = \begin{bmatrix} \partial(x(t_B), y(t_B)) \\ \partial(x(t_A), y(t_A)) \end{bmatrix}$ ,

$$DP_2 = \begin{bmatrix} \partial(x(t_D), y(t_D)) \\ \partial(x(t_C), y(t_C)) \end{bmatrix}, DP_3 = \begin{bmatrix} \partial(x(t_F), y(t_F)) \\ \partial(x(t_E), y(t_E)) \end{bmatrix}.$$

$DP_{d1}$ 、 $DP_{d2}$  表示在碰撞面的跳跃矩阵, 可借助不连续映射求解, 表示为<sup>[17]</sup>:

$$DP_{di} = \begin{pmatrix} -r_i & 0 \\ (a_{i+} + r_i a_{i-})/v_{i-} & -r_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2) \quad (21)$$

式中,  $v_{i-}$  表示碰撞前的速度,  $a_{i-}$  和  $a_{i+}$  分别表示碰撞前后的加速度, 碰撞时刻和碰撞前速度可通过 Matlab 中的 events 函数求得. 由于系统的非线性, 难以求得 Jacobi 矩阵  $DP_1$ ,  $DP_2$ ,  $DP_3$  的解析表达式, 可通过变分方程求其数值解. 考虑以下初值问题

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (22)$$

定义映射

$$P^c: (x(0), y(0)) \mapsto (x(t), y(t)) \quad (23)$$

对应的 Jacobi 矩阵  $DP^c$  满足变分方程:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(X, t) = \frac{\partial F}{\partial X} \Phi(X, t), \Phi(X, t) = DP^c \\ \Phi(X, 0) = I \end{cases} \quad (24)$$

打靶法可以求得系统稳定的和不稳定的周期解. 在给定精度的条件下, 可以得到系统周期解比较精确的迭代初值, 利用求得的初值直接数值积分可得到系统的周期解. 另外, 打靶法可求得 Jacobi 矩阵  $DP$  的特征值, 如果所有特征值的模都小于 1, 周期解是稳定的; 如果存在特征值的模大于 1, 周期解是不稳定的. 在复平面上, 当矩阵  $DP$  的模最大的特征值  $\lambda_{\max}$  以 +1 穿越单位圆时, 系统的周期解可能发生音叉分岔、鞍结分岔或超临界分岔;  $\lambda_{\max}$  以 -1 穿越单位圆时, 系统的周期解将发生周期倍

化分岔;  $\lambda_{\max}$  以一对共轭的复特征值穿越单位圆时, 系统的周期解将发生 Hopf 分岔.

## 4 非对称系统的分岔

对于非对称系统 ( $r_1 \neq r_2$ ), 由于破坏了系统的对称性条件, 则对称系统周期运动的音叉分岔将会演变为尖点分岔. 对于对称系统  $r_1 = r_2 = r$ , 取  $r$  和  $\gamma$  为控制参数, 假定音叉分岔的临界值  $(r, \gamma) = (r_c, \gamma_c)$ , 控制参数  $\gamma$ , 使得  $\eta = \gamma - \gamma_c \neq 0$ , 系统的周期解将会发生音叉分岔, 此时对应的 Jacobi 矩阵的一个特征值以 +1 穿越单位圆, 另一个特征值仍在单位圆内. 对非对称系统, 设  $r_1 = r_c$ ,  $r_2 = r_c + \mu$ . 周期解的分岔可以用尖点分岔的两参数开折表示, 如图 2 所示.

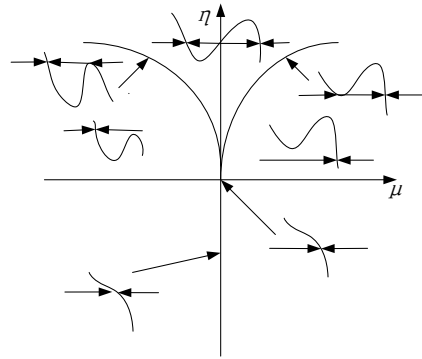


图2  $\mu$ - $\eta$  平面上的尖点分岔

Fig.2 Cusp bifurcation on the plane  $(\mu, \eta)$

## 5 数值模拟

### 5.1 对称系统的分岔与混沌

令  $\gamma$  为控制参数, 并取系统参数如下:  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $r_1 = r_2 = 0.8$ . 当  $\gamma = 0.64$  时, 系统对应的 Jacobi 矩阵的两个特征值分别为  $\lambda_1 = 0.851351$ ,  $\lambda_2 = 0.136931$ , 因此对应的对称周期轨道是稳定的, 系统的相轨线如图 3(a) 所示. 当  $\gamma = \gamma_c = 0.650526$ , 此时 Poincaré 映射不动点的 Jacobi 矩阵的特征值  $\lambda_1 = 0.999992$ ,  $\lambda_2 = 0.116577$ , 此时的  $\gamma_c$  为音叉分岔的临界值.  $\gamma = 0.73 > \gamma_c$  时, 通过音叉分岔形成两条反对称的周期轨道, 这两条轨道具有相同的稳定性, 对应 Poincaré 映射不动点的 Jacobi 矩阵的特征值  $\lambda_1 = -0.174665$ ,  $\lambda_2 = -0.667428$ ; 同时对称的周期轨道失稳, 对应 Poincaré 映射不动点的 Jacobi 矩阵的特征值  $\lambda_1 = 2.09827 > 1$ ,  $\lambda_2 = 0.0555581$ , 系统的相轨线如图 3(b). 当  $\gamma$  继续增加到  $\gamma = \gamma_d = 0.741262$ , 对应 Poincaré 映射不动点的 Jacobi 矩阵的特征值  $\lambda_1 = -0.999996$ ,  $\lambda_2 = -0.116577$ , 此时的  $\gamma_d$  为周期倍化分岔的临界

值.当 $\gamma=0.75$ 时,系统的相轨线如图3(c),两条反对称的周期轨道同时发生周期倍化.

当 $\gamma$ 继续增加时,系统通过周期倍化分岔通向混沌.当 $\gamma$ 增加到 $\gamma=0.765$ 时,Poincaré截面上各自

生成两个离散的反对称的混沌吸引子,如图4(a).当 $\gamma=0.77$ 时,两个离散的反对称的混沌吸引子各自融合成了一体,形成两个反对称的混沌吸引子,如图4(b)所示.当 $\gamma=0.78$ 时,两个反对称的混沌吸引子演化为同一个对称的混沌吸引子,如图4(c).

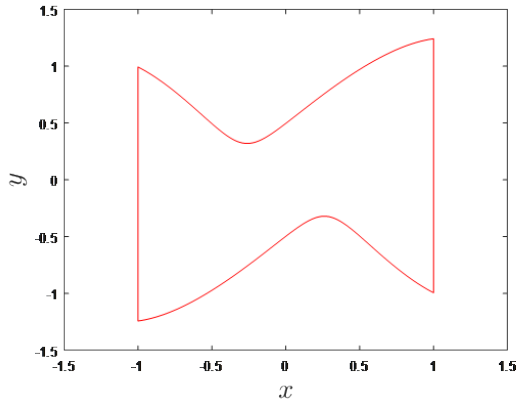
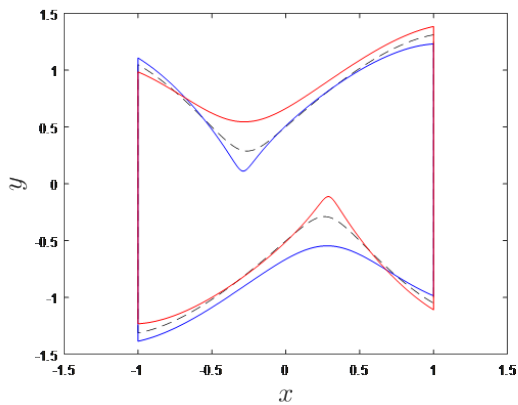
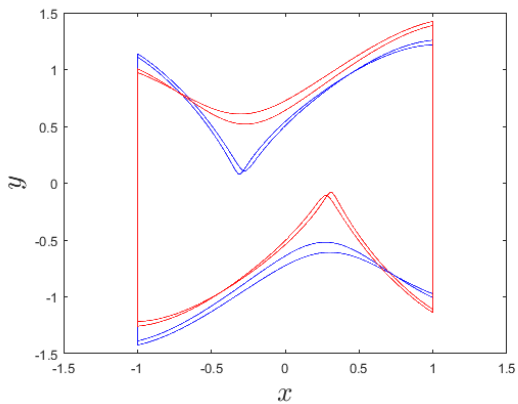
(a) $\gamma=0.64$ (b) $\gamma=0.73$ (c) $\gamma=0.75$ 

图3 相轨线(一对反对称稳定的周期轨道(实线),不稳定的对称周期轨道(虚线))

Fig.3 Phase portrait(A pair of antisymmetric stable period orbits denoted by solid lines, unstable symmetric period orbit denoted by dashed line)

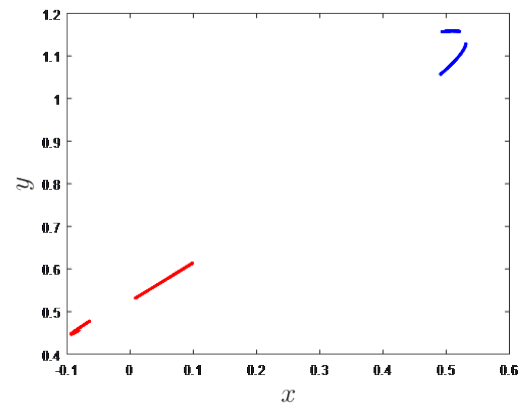
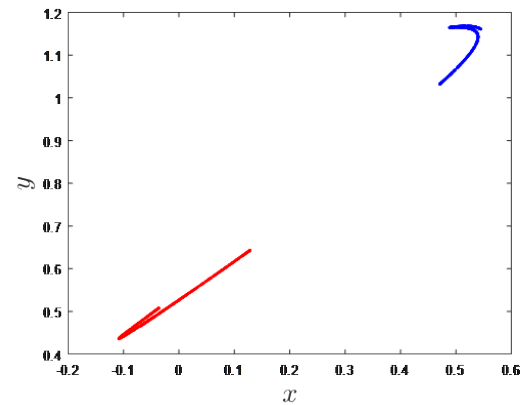
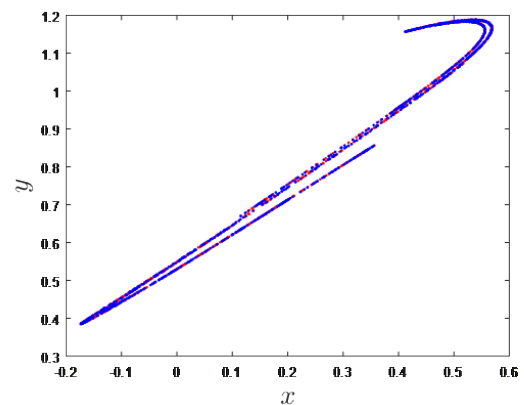
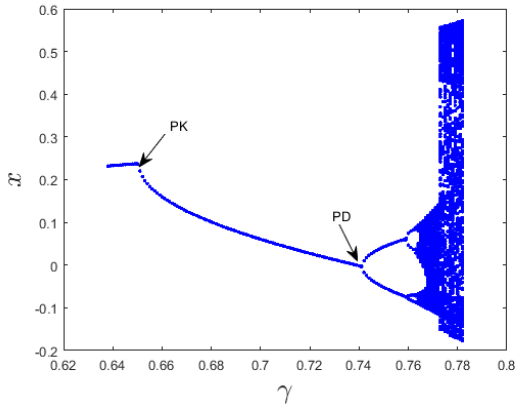
(a) $\gamma=0.765$ (b) $\gamma=0.77$ (c) $\gamma=0.78$ 

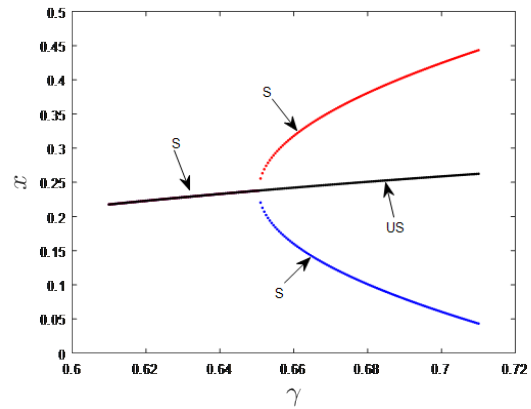
图4 奇异吸引子的演变

Fig.4 Evolution of chaotic attractors

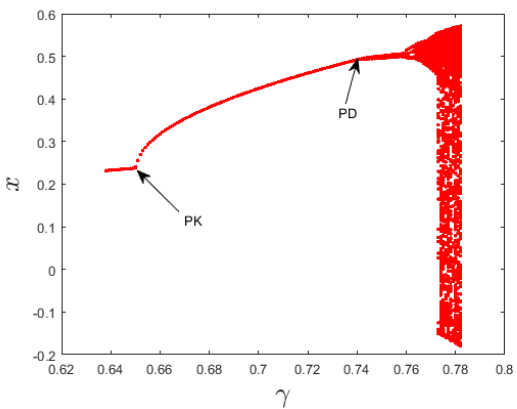
图5给出了系统的全局分岔图,其中,图5(a)对应的初值为(0.05, 0.5),图5(b)对应的初值为(0.4, 1),图5(c)为(a)和(b)两种情况的组合.



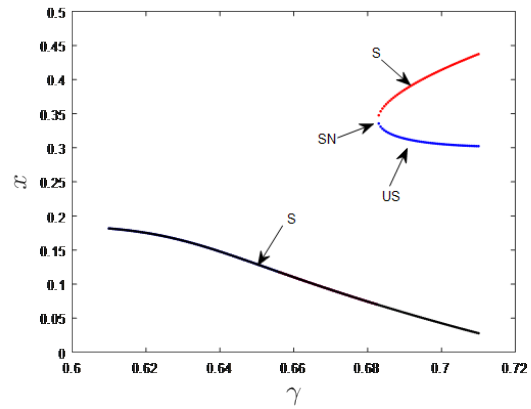
(a) 初值(0.05, 0.5)  
(a) Initial value (0.05, 0.5)



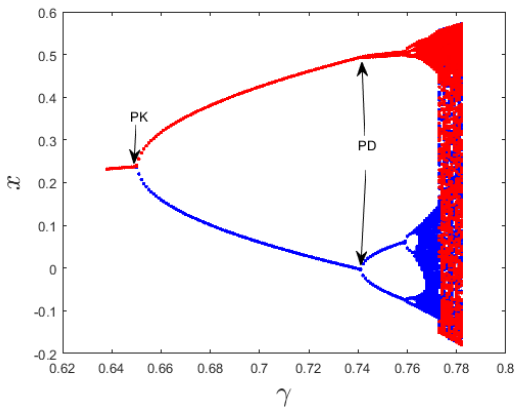
(a) 对称系统的分岔图  
(a) The bifurcation of the symmetric system



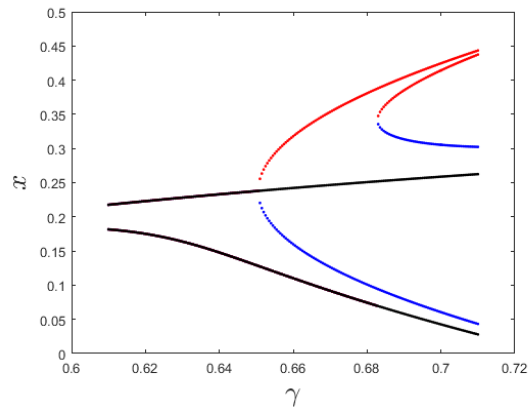
(b) 初值(0.4, 1)  
(b) Initial value (0.4, 1)



(b) 非对称系统的分岔图  
(b) The bifurcation of asymmetric system



(c) (a)、(b)的组合  
(c) Composition of (a) and (b)



(c) (a)、(b)的组合  
(c) Combination of (a) and (b)

图5 全局分岔图(PK: 音叉分岔; PD: 第一次周期倍化分岔)  
Fig.5 The global bifurcation diagram(PK: pitchfork bifurcation;  
PD: the first period doubling bifurcation)

图6 从对称系统到非对称系统的演变  
Fig.6 Evolution from symmetric system to asymmetric system  
(SN: 鞍结分岔, S: 稳定的周期运动; US: 不稳定的周期运动)  
(SN: saddle-node bifurcation, S: stable periodic motion;  
US: unstable periodic motion)

### 5.2 从对称系统到非对称系统的演变

如果改变恢复系数  $r_2$ , 使得  $r_1 \neq r_2$ , 则对称系统变为非对称系统. 与对称系统相比, 由于不再满足对称性条件, 在音叉分岔临界点附近的动力学行为发生了本质变化, 系统对应的分岔图如图 6 所示,

图 6(a) 反映了对称系统在音叉分岔附近的分岔图, 然而, 当  $r_2 = 0.805 \neq r_1$  时, 音叉分岔过程演变为一



支没有分岔的分支和一支鞍结分岔的分支,对应的分岔图如图6(b).图6(c)为对称系统和非对称系统两种情况的组合.

## 6 结论

对于单自由度双边碰撞 Duffing 振子系统,分析了对称系统 Poincaré 映射的对称性,借助打靶法和不连续映射求得系统的周期解并分析其稳定性.对于对称系统,随着参数的持续变化,通向混沌的路径可以概括为:一个对称不动点 $\rightarrow$ 一对反对称不动点 $\rightarrow$ 一对反对称的混沌吸引子 $\rightarrow$ 一个对称的混沌吸引子.若 $r_1 \neq r_2$ ,对称系统将演变为非对称系统,音叉分岔过程发生了典型的对称破缺现象,演变为两个相互独立的分支:其中一支没有发生分岔;另一支为鞍结分岔.

## 参 考 文 献

- 1 Nordmark A B. Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 145(2):279~297
- 2 Li Q H, Wei L M, Tian J Y, et al. Double grazing periodic motions and bifurcations in a vibroimpact system with bilateral stops. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 2014:1~9
- 3 Shaw S W. The dynamics of a harmonically excited system having rigid amplitude constraints, Part 1: Subharmonic motions and local bifurcations. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, 52 :453~458
- 4 Shaw S W, Rand R H. The transition to chaos in a simple mechanical system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1989, 24(1):41~56
- 5 乐源,谢建华.一类双面碰撞振子的对称性、尖点分岔与混沌.应用数学与力学,2007,28(8):991~998(Yue Y, Xie J H. Symmetry, cusp bifurcation and chaos of an impact oscillator between two rigid sides. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, 28(8):991~998(in Chinese))
- 6 Luo G W, Xie J H. Stability of periodic motion, bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom vibratory system with symmetrical rigid stops. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 273:543~568
- 7 乐源,谢建华,丁旺才.一类两自由度碰撞振动系统的 Hopf 分岔和混沌.动力学与控制学报,2004,2(3):38~43(Le Y, Xie J H, Ding W C. Hopf bifurcation and chaos of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3):38~43(in Chinese))
- 8 吕小红,朱喜锋,罗冠炜.含双侧约束碰撞振动系统的 OGY 混沌控制.机械科学与技术,2016,35(4):531~534(Lv X H, Zhu X F, Luo G W. Chaos control of a vibro-impact system with two-sided constraints based on OGY method. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2016, 35(4):531~534(in Chinese))
- 9 陆启韶,金俐.具有刚性约束的非线性动力系统的局部映射方法.固体力学学报,2005,26(2):132~138(Lu Q S, Jin L. The local map method for non-smooth dynamical systems with rigid constraints. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 26(2):132~138(in Chinese))
- 10 Du Z D, Zhang W N. Melnikov method for homoclinic bifurcation in nonlinear impact oscillators. *Computers & Mathematics with Applications*, 2005, 50:445~458
- 11 Xu W, Feng J Q, Rong H W. Melnikov's method for a general nonlinear vibro-impact oscillator. *Nonlinear Analysis*, 2009, 71:418~426
- 12 张思进,尹磊磊,文桂林.一类拟 Hamilton 碰振系统的全局分岔及多解共存现象分析.湖南大学学报(自然科学版),2014,41(10):55~61(Zhang S J, Yin L L, Wen G L. Analysis of the global bifurcations and coexistence of multiple solutions for a general Quasi-Hamiltonian vibro-impact system. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2014, 41(10):55~61(in Chinese))
- 13 李继伟,赵泽福.冲击减振器与非线性能量阱耦合系统的振动抑制研究.动力学与控制学报,2020,18(2):76~81(Li J W, Zhao Z F. Vibration reduce for an impact damper coupled with nonlinear energy sink. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(2):76~81(in Chinese))
- 14 冯进铃,徐伟. Duffing 单边碰撞系统的混沌鞍合并激变.物理学报,2011,60(8):59~64(Feng J Q, Xu W. Merging crisis of chaotic saddle in a Duffing unilateral vibro-impact system. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(8):59~64(in Chinese))
- 15 Ben-Tal A. Symmetry restoration in a class of forced oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2002, 171(4):236~248
- 16 陈志强,王进良,李由.二维离散 Duffing-Holmes 系统的分支与混沌研究.动力学与控制学报,2017,15(4):324~329(Chen Z Q, Wang J L, Li Y. Analysis on bifurcation and chaos of two-dimensional discrete Duffing-Holmes system. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(4):324~329(in Chinese))
- 17 徐慧东.非光滑动力系统周期解的分岔研究[博士学位论文].成都:西南交通大学,2008(Xu H D. Bifurcation of periodic solutions of non-smooth dynamical systems [Ph.D Thesis]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2008(in Chinese))

## SYMMETRY, CUSP BIFURCATION AND CHAOS OF THE DOUBLE-IMPACT DUFFING OSCILLATOR \*

Li Guanqiang<sup>†</sup> Xie Jianhua

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract** Both symmetric and asymmetric systems of one-degree-of-freedom double-impact Duffing oscillators are considered. The symmetry of Poincaré mapping is analyzed. By means of discontinuous mapping and the shooting method, periodic solution and its stability of the system are analyzed. Numerical simulation indicates that for the symmetric system, firstly a symmetric periodic orbit bifurcates into two antisymmetric period orbits, being of same stability, and the two antisymmetric periodic orbits go through two synchronous period-doubling bifurcations to form two antisymmetric chaotic attractors subsequently. Finally, the two antisymmetric chaotic attractors are fused into one symmetric chaotic attractor. For the asymmetric system, an asymmetric periodic motion can be characterized by a two-parameter unfolding of cusp bifurcation, and a typical symmetric breaking phenomenon takes place during pitchfork bifurcation.

**Key words** impact, symmetry, pitchfork bifurcation, cusp bifurcation, chaos

---

Received 23 June 2020, revised 31 August 2020.

\* The key project supported by the National Natural Science Foundation of China(11732041)

† Corresponding author E-mail: gq16321@163.com