

梁式结构动力模型降阶方法及其应用*

赵阳¹ 许博谦^{1†} 李晓波¹ 李玉韦²

(1.中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130033)(2.大连理工大学 工程力学系, 大连 116024)

摘要 工程项目当中常会遇到运载火箭、火车车厢和高层建筑等大型梁式结构的动力学性能分析,其计算工作量非常大,往往需要对动力模型进行降阶处理.针对这一问题,提出了面向梁式实体结构的多点凝聚法,基于梁平截面假设,该方法将结构每个截面上的有限元节点通过位移转换矩阵凝聚到该截面的多个凝聚点上,从而利用减缩基向量实现了模型的降阶.多点凝聚法还可推广应用到运载火箭液体推进剂的模拟当中,进一步提出了实体降阶法,该方法首先采用实体单元建立液体推进剂,并利用液体不可压缩和不能承受剪切应力的特性合理定义其弹性模量和泊松比这两个材料属性,随后便可利用多点凝聚法得到简化模型.算例表明,采用本文提出的模型降阶方法得到的简化模型一方面可以大幅提升计算效率,另一方面计算结果的相对误差可保证在 8% 以内,验证了降阶方法的有效性.

关键词 梁式结构, 模型降阶, 液体推进剂, 模态分析

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-054

引言

一直以来,计算机的处理速度和存储能力虽然在不断提高,但始终满足不了越来越复杂的工程与科学问题对计算能力的需求.对于结构静力分析,我们尚且可以建立规模很大、网格很密的有限元模型,但对于结构动力分析,一方面其计算量要比静力分析大几个量阶,另一方面包含太多细节的有限元模型会干扰我们对动力学总体性能的认识.因此,在结构动力分析领域,通常需要通过模型降阶构造简化模型来提升动力分析效率,并获得足够精度的动力响应.

物理模型降阶方法的核心思想为构造减缩基来进行矩阵降阶.国外经典的方法有静力凝聚法^[1,2]、动态凝聚法^[3]、IRS 法^[4]和里茨法^[5,6]等.国内学者近些年也提出了一些新的动力模型降阶方法,如邓佳东^[7]提出的基于局部插值的降阶方法、郑淑飞^[8]提出的基于变形修正的局部刚体化降阶方法和刘斌^[9]提出的基于柔度修正的局部刚体化降阶方法等.本文主要针对纵向尺度显著大于横向的梁式结构动力模型降阶进行研究,在这方面,王文胜^[10]提出了基于梁平截面假设的降阶方法,但此方

法仅适用于采用壳单元和梁单元等每个节点具有六个自由度建模的梁式结构.为此,针对采用实体单元这种每个节点只有三个自由度建模的梁式结构,本文在王文胜的研究基础上提出了多点凝聚法.由其进一步衍生出来的实体降阶法还可应用到运载火箭贮箱动力建模中液体推进剂的模拟当中.最后,相应的算例表明了本文提出的两种方法均具有很好的工程应用价值.

1 多点凝聚法

王文胜^[10]提出的动力模型降阶方法由于梁平截面假设的引入,会导致简化模型的刚度普遍偏大,若将其应用于梁式实体结构,计算精度会非常低,故本文在进行动力模型降阶时,重点关注了简化模型刚度的修正.

1.1 方法介绍

根据结构动力学理论^[11,12],精细模型的无阻尼自由振动方程可表示为:

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (1)$$

其中, $M(r \times r)$ 为精细模型的质量阵, $\ddot{U}(r \times 1)$ 为结构的加速度向量, $K(r \times r)$ 为精细模型的刚度阵, $U(r \times 1)$ 为结构的位移向量, r 为精细模型的自

202-01-15 收到第 1 稿, 2020-03-21 收到修改稿.

* 国家重点研发计划项目(2016YFE0205000)

† 通讯作者 E-mail: ciomp_xubq@126.com

由度数. 为了对精细模型进行降阶, 需引入减缩基向量 T ($r \times m$), 且 ($m \ll r$), 此时可进行矩阵运算:

$$U = TQ \quad (2)$$

$$M_R = T^T M T \quad (3)$$

$$K_R = T^T K T \quad (4)$$

其中, Q ($m \times 1$) 为简化模型的位移向量, M_R ($m \times m$) 为简化模型的质量阵, K_R ($m \times m$) 为简化模型的刚度阵, m 为简化模型的自由度数, 将式(2)、式(3)和式(4)代入式(1), 可得简化后结构的无阻尼自由振动方程:

$$M_R \ddot{Q} + K_R Q = 0 \quad (5)$$

结构的特征方程可表示为:

$$(K_R - \lambda_{mm} M_R) \varphi_{mm} = 0 \quad (6)$$

其中, λ_{mm} 为第 mm 阶自振频率, φ_{mm} 为第 mm 阶特征向量, 求解式(6)便可得到简化模型的模态信息.

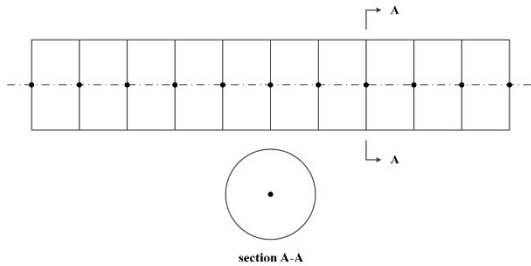


图1 动力模型降阶示意图

Fig.1 A schematic diagram of dynamic model reduction

动力模型降阶的关键在于减缩基向量 T 的构造, 对于采用实体建模的纵向尺度显著大于横向的梁式结构, 可引入梁平面假定, 将具有 s 个有限元节点的梁式结构如图1所示沿轴向划分为 p 个截面, 以单一凝聚点为例, 每个截面形心处的六个基准刚体模态均可表示出该截面上任一节点的位移:

$$u_j = R_j q_i \quad (7)$$

其具体展开形式为:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{cj} & -y_{cj} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{cj} & 0 & x_{cj} \\ 0 & 0 & 1 & y_{cj} & -x_{cj} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{iz} \\ q_{\theta x} \\ q_{\theta y} \\ q_{\theta z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中, u_j 为截面上第 j 点的位移向量, R_j 为 j 点的位移转换矩阵, q_i 为该截面形心处的刚体模态, x_{cj} 、 y_{cj} 和 z_{cj} 分别为第 j 点坐标与该截面形心坐标在三个方向的差值. 如果将截面 i 上的 n_i 个有限元节点均凝

聚到该截面形心处, 则有:

$$U_i = T_i q_i \quad (9)$$

其中, $U_i = (u_{i1}, \dots, u_{in_i})^T$ 表示这一截面内 n_i 个有限元节点位移向量, $T_i = (R_{i1}, \dots, R_{in_i})^T$ 表示这一截面的位移转换矩阵, 大小为 $3n_i \times 6$. 整个结构的位移转换关系式可表示为:

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{pmatrix} = TQ \quad (10)$$

其中, U 是 $3s \times 1$ 的列向量, T 大小为 $3s \times 6p$, Q 大小为 $6p \times 1$, 由于 $p = s$, 降阶后自由度数会大幅下降, 简化模型的节点数为 p , 自由度数为 $m = 6p$.

实体模型中的节点没有转动自由度, 引入梁平面假定进行减缩基构造时, 无法考虑转动自由度的影响, 并且该假设的引入本身会使得简化模型整体偏刚, 因此在采用此方法对梁式实体结构进行模型降阶时得到的简化模型计算精度往往不好. 如图2所示(以8凝聚点为例), 可针对性地将单一截面分区, 采用多点凝聚的模型降阶方法, 由于简化模型的特征值与凝聚点位置无关^[10], 故未标注凝聚点的具体位置, 只说明了截面分区数, 即凝聚点个数, 且对于红色边界上的黑色共享节点, 如果归属于 N 个区域, 则其对应的自由度在位移转换矩阵 T 中只取其 $1/N$ 的贡献^[10]. 相较于单点凝聚, 多点凝聚法在单一截面内允许出现面内变形, 故随着简化模型自由度数的增多, 虽然会影响到计算效率, 但可以显著降低因结构整体刚度偏大而导致的计算误差, 且针对截面含有翘曲的结构改善效果更为明显.

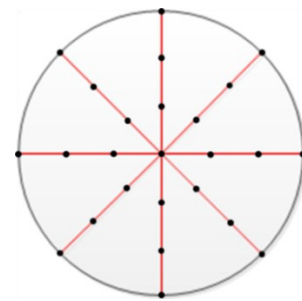


图2 8凝聚点横截面

Fig.2 A section of eight cohesion points

1.2 算例验证

建立半径为 500mm, 高 10024mm, 厚度为 20mm 的蒙皮圆筒, 其上均布 4 根轴向筋条和 6 根环向筋条, 筋条高 30mm, 厚度为 4mm, 材料密度为 $2.7e-9t/mm^3$, 弹性模量为 73Gpa, 泊松比为 0.3, 具

体模型如图3所示.

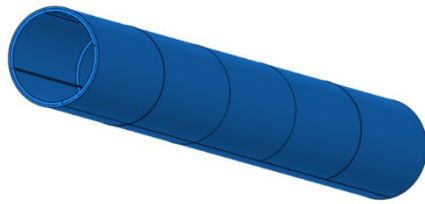


图3 网格加筋结构精细模型

Fig.3 The original grid stiffened structure model

在进行模型降阶时,先沿轴向确定精细模型的横截面个数,随后提取精细模型的刚度阵、质量阵和节点信息,进一步确定单一截面凝聚点的个数来基于平截面假定构造减缩基向量,最后便可通过矩阵相乘来降低原刚度阵和原质量阵的阶数,得到简化模型.此外,随着单一截面凝聚点个数的增加,简化模型的计算精度往往会提升,而计算效率会下降,因此可根据计算精度和计算效率两者的具体需求,适当确定简化模型中单一截面的凝聚点个数.本算例中将精细模型沿轴向取107个截面,在每个截面上分别采用单凝聚点和16个凝聚点的模型降阶方法对其进行降阶,得到相应的简化模型后进一步将精细模型和简化模型的上下端边界固支来进行模态分析,其中精细模型和简化模型的模态信息均利用商业软件 MATLAB 来获取,提取其前三阶弯曲模态和前三阶扭转模态,计算结果如图4-图9和表1所示.

由图4-图9可知,降阶前后结构低阶整体模态的振型基本一致.由表1可知,一方面,简化模型的扭转频率比弯曲频率计算精度高,这是因为结构的扭转模态振型相较于弯曲模态振型能够更好地满足梁的平截面假设;另一方面,采用单点凝聚的计算效率极高,但得到的弯曲频率计算误差较大,采

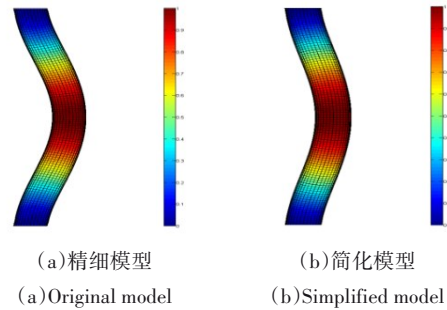


图4 一阶弯曲振型

Fig.4 1st-order bending mode shape

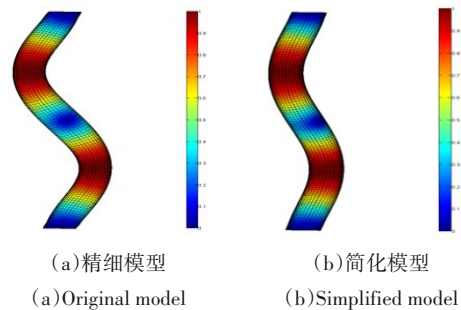


图5 二阶弯曲振型

Fig.5 2nd-order bending mode shape

用16点凝聚得到的简化模型对比精细模型可在计算效率提升89%的情况下,低阶频率的相对误差均小于8%,说明多点凝聚虽然对比单点凝聚计算效率有所下降,但仍可在较高的计算效率下明显改善结构的低阶频率计算精度,方法可行.

2 实体降阶法

液体推进剂在运载火箭当中约占箭体总质量的80%^[13],其质量对运载火箭结构的动力学特性有着重要影响,因此对液体推进剂的合理模拟一直是箭体结构动力学建模当中的重点.在现有的液体推进剂模拟方法中,集中质量法^[13,14]的应用最为广

表1 降阶前后频率计算结果对比

Table1 Comparison of frequency results before and after model reduction

	Original model	Single point simplified model	Relative error (%)	Sixteen points simplified model	Relative error (%)
1 st -order bending mode frequency (Hz)	55.55	66.78	20.22	59.92	7.86
2 nd -order bending mode frequency (Hz)	134.81	166.09	23.20	142.97	6.06
3 rd -order bending mode frequency (Hz)	233.17	292.51	25.45	244.46	4.84
1 st -order torsional mode frequency (Hz)	159.86	160.56	0.44	160.04	0.11
2 nd -order torsional mode frequency (Hz)	319.93	321.08	0.36	320.04	0.03
3 rd -order torsional mode frequency (Hz)	479.47	481.52	0.43	479.96	0.10
Number of degrees of freedom	43380	642	-	10272	-
Computation time (s)	15.75	0.08	-	1.76	-

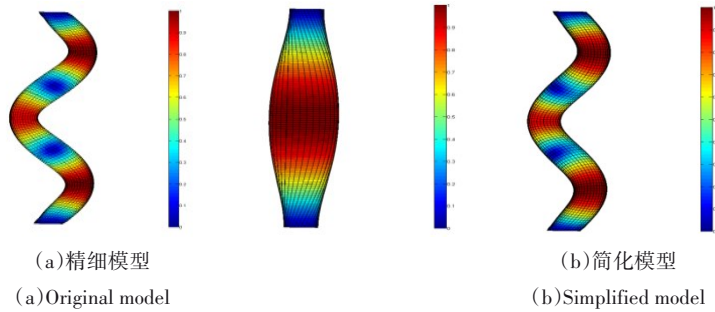
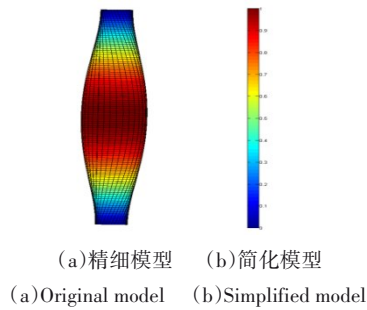


图6 三阶弯曲振型

Fig.6 3rd-order bending mode shape

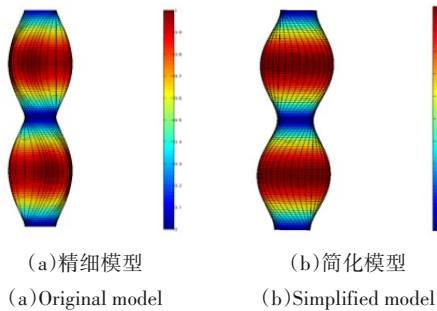


(a)精细模型 (b)简化模型

(a)Original model (b)Simplified model

图7 一阶扭转振型

Fig.7 1st-order torsional mode shape



(a)精细模型

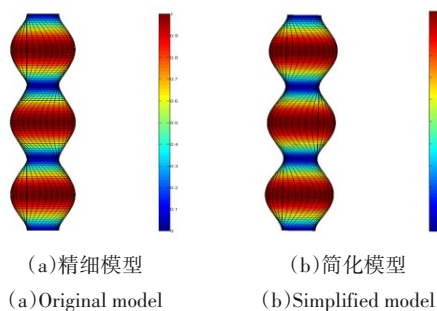
(b)简化模型

(a)Original model

(b)Simplified model

图8 二阶扭转振型

Fig.8 2nd-order torsional mode shape



(a)精细模型

(b)简化模型

(a)Original model

(b)Simplified model

图9 三阶扭转振型

Fig.9 3rd-order torsional mode shape

2.1 方法介绍

实体降阶法在应用过程中应采用实体建立贮箱和液体推进剂的有限元模型,而液体推进剂的实体建模需要合理定义其弹性模量和泊松比这两个材料属性,以模拟液体的不能承受剪切应力和不可压缩的特性.对于弹性模量 E ,流体在受到一定的切应力作用时会产生无限大的变形,一直到切应力消失,可将这种情况理解成当模拟流体的固体微团在切应力 τ 的作用下,其切应变 $\gamma \rightarrow \infty$,因此切变模量 G 有:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \rightarrow 0 \quad (11)$$

故

$$E = 2G(1 + \mu) \rightarrow 0 \quad (12)$$

即弹性模量取值越小越能模拟出流体的这一特性,考虑到实际计算,本文取 $1e-30\text{Gpa}$.对于泊松比 μ ,分析一个固体微团在三维直角坐标系中 x 向受到单向拉伸时的应变情况,其各方向应变为:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \quad (13)$$

其中, σ_x 是 x 向拉压应力, ε_x 是 x 向应变, ε_y 是 y 向应变, ε_z 是 z 向应变,固体微团要模拟流体不可压缩的特性,体应变 ε_v 应该为0,有

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_x}{E}(1 - 2\mu) = 0 \quad (14)$$

所以用 $\mu = 0.5$ 来定义固体,可以模拟流体不可压缩的特性,但在实际计算中 μ 不能取值为0.5,只能取接近0.5的值,本文取0.499999.结构有限元模型建立后便可采用多点凝聚法对其进行模型降阶,进而进行相关动力学分析.

2.2 算例验证

为进行对比分析,本文分别采用集中质量法和实体降阶法对如图10所示的贮箱结构在自由状态下进行模态分析,结构由4个圆柱平底贮箱、2个箱

泛,但该方法操作复杂,需进行液段划分、参考点建立和质量分配等工作.针对这一问题,研究提出了操作简单的实体降阶法.

间段和1个级间段串联组成,直径为3000mm,一级燃箱高5000mm,一级箱间段高2500mm,一级氧箱高10000mm,级间段高4000mm,二级燃箱高4000mm,二级箱间段高2500mm,二级氧箱高8000mm,贮箱壁厚为3mm,贮箱的材料密度为 $2.710^{-9}t/mm^3$,弹性模量为70Gpa,泊松比为0.3,氧化剂密度为 $1.410^{-9}t/mm^3$,燃烧剂密度为 $110^{-9}t/mm^3$.在集中质量法中采用梁单元模拟贮箱箱壁,利用商业软件ABAQUS中的Lanczos算法^[15]进行计算,在实体降阶法中每个截面采用8个凝聚点,利用商业软件MATLAB获取模态信息,提取结构的低阶模态计算结果如图11-图15和表2所示.

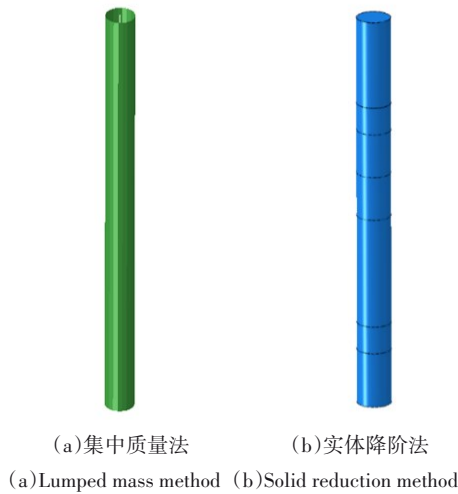


图10 贮箱结构示意图
Fig.10 Schematic diagram of the tank structure

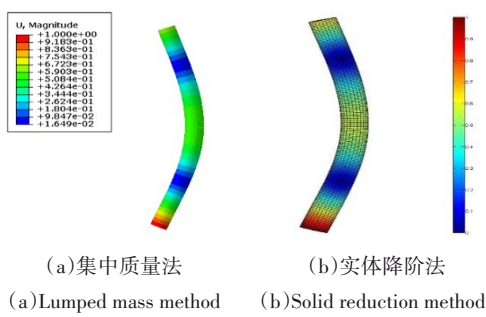


图11 一阶弯曲振型
Fig.11 1st-order bending mode shape

由于此贮箱结构低阶模态的准确信息未知,此处将集中质量法计算得到的估计值作为横向参考.由图11-图15可知,两种方法计算得到的结构低阶整体模态的振型基本一致;由表2可知,一方面,采用实体降阶法计算得到的频率值普遍大于集中质量法,这是因为如上文所述,多点凝聚法中引入的

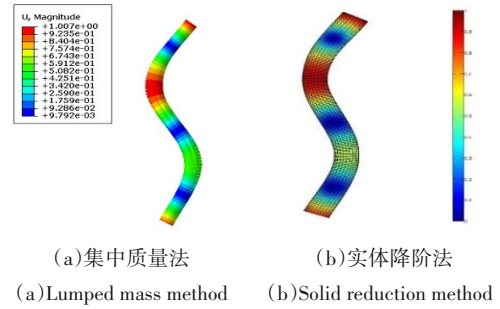


图12 二阶弯曲振型
Fig.12 2nd-order bending mode shape

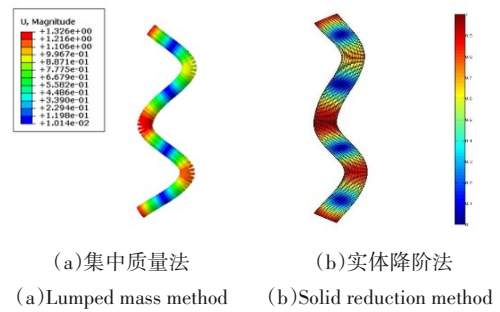


图13 三阶弯曲振型
Fig.13 3rd-order bending mode shape

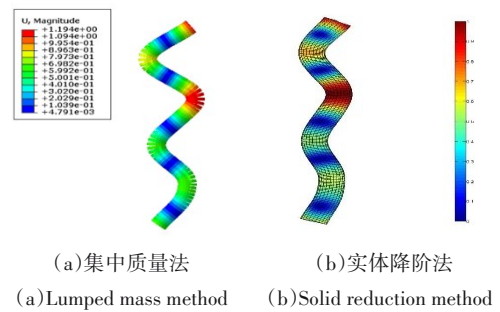


图14 四阶弯曲振型
Fig.14 4th-order bending mode shape

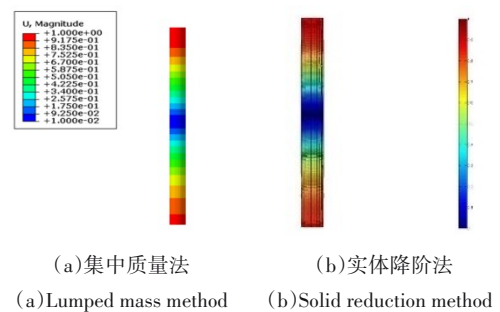


图15 一阶纵向振型
Fig.15 1st-order longitudinal mode shape

梁平截面假设会导致简化模型的整体刚度偏大;另一方面,采用两种液体推进剂模拟方法得到的低阶频率相对变化均在8%以内,综合说明将多点凝聚

表2 两种方法频率计算结果对比

Table 2 Comparison of frequency results of the two methods

	Lumped mass method	Solid reduction method	Relative change (%)
1 st -order bending mode frequency (Hz)	1.52	1.63	6.89
2 nd -order bending mode frequency (Hz)	3.93	4.15	5.81
3 rd -order bending mode frequency (Hz)	7.48	7.84	4.72
4 th -order bending mode frequency (Hz)	10.52	10.96	4.18
1 st -order longitudinal mode frequency (Hz)	7.14	7.71	7.98

法拓展应用到液体推进的模拟当中有效可行。

3 结论

本文基于梁平截面假设,对梁式实体结构的动力模型降阶提出了多点凝聚法,并进一步针对液体推进剂的模拟提出了实体降阶法,两种方法均具有清晰的理论基础,且操作简单。

(1) 多点凝聚法适用于采用实体单元建模的梁式结构,利用减缩基向量,可以大幅降低其自由度。简化模型可在计算效率提升89%的情况下,结构低阶频率的相对误差均小于8%。

(2) 实体降阶法适用于梁式贮箱结构,可通过合理定义实体单元的材料属性来模拟液体推进剂。与传统的集中质量法相比,可在操作简洁性更优的同时,低阶频率的相对变化均在8%以内。

相应的算例验证了两种方法的有效性,同时也说明了本文提出的动力模型降阶方法和液体推进剂模拟方法具有很好的工程应用前景。

参 考 文 献

- Guyan R J. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 1965, 3(2): 380
- Irons B. Structural eigenvalue problems-elimination of unwanted variables. *AIAA Journal*, 1965, 3(5): 961 ~ 962
- Kuhar E J, Stahle C V. Dynamic transformation method for modal synthesis. *AIAA Journal*, 1974, 12(5): 672 ~ 678
- O'Callahan J C. A procedure for an improved reduced system (IRS) model. In: Proceedings of the 7th International Model Analysis Conference, Las Vegas, 1989: 17 ~ 21
- Wilson E L, Yuan M W, Dickens J M. Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1982, 10(6): 813 ~ 821
- 陈丽华,薛坚,张伟.带边角裂纹悬臂Mindlin板的振动特性研究.动力学与控制学报,2018,16(1):41~47(Chen L H, Xue J, Zhang W. Study on vibration characteristics of cantilevered Mindlin plate with side crack. *Journal of Dynamic and Control*, 2018, 16(1): 41 ~ 47 (in Chinese))
- 邓佳东,程耿东.基于局部插值的结构动力模型降阶方法.力学学报,2012,44(2):342~350(Deng J D, Cheng G D. Structure dynamic model reduction technique based on local interpolation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(2): 342 ~ 350 (in Chinese))
- 郑淑飞,丁桦.基于变形修正的局部刚体化动力模型简化方法.力学与实践,2008,30(6):31~34(Zheng S F, Ding Y. A model reduction method for dynamic analysis based on deformation modification and local rigid body mode. *Mechanics in Engineering*, 2008, 30(6): 31 ~ 34 (in Chinese))
- 刘彬,丁桦,时忠民.基于柔度修正的局部刚体化结构动力模型简化方法.工程力学,2007,24(10):25~29(Liu B, Ding Y, Shi Z M. A model reduction method for dynamic analysis based on quasi-rigid-body mode and flexibility modification. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(10): 25 ~ 29 (in Chinese))
- 王文胜.复杂细长结构动力模型降阶及优化研究[博士学位论文].大连:大连理工大学,2012(Wang W S. Study on dynamic model reduction and optimization of complicated slender structures [Ph.D Thesis]. Dalian: Dalian University of Technology, 2012 (in Chinese))
- 张亚辉,林家浩.结构动力学基础.大连:大连理工大学出版社,2007(Zhang Y H, Lin J H. Fundamentals of structural dynamics. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2007 (in Chinese))
- 从继庆,荆建平,陈昌敏,等.汽轮机转子碰摩热弯曲动力特性研究.动力学与控制学报,2018,16(3):272~280(Cong J Q, Jing J P, Chen C M, et al. Research on dynamic characteristics of thermal bending induced by rotor-to-stator rub. *Journal of Dynamic and Control*, 2018, 16(3): 272 ~ 280 (in Chinese))
- 邱吉宝,张正平,向树红,等.结构动力学及其在航天工程中的应用.合肥:中国科学技术大学出版社,2015(Qiu J B, Zhang Z P, Xiang S H, et al. Structural dynamics and its applications in space engineering. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2015 (in Chinese))
- 潘忠文,邢誉峰,朱礼文,等.运载火箭动力学建模中液体推进剂模拟技术.中国科学:技术科学,2010,40(8):920~928(Pan Z W, Xing Y F, Zhu L W, et al. Liquid propellant analogy technique in dynamic modeling of

- launch vehicle. *Science China Technological Sciences*, 2010, 40(8): 920 ~ 928 (in Chinese))
- 15 Lanczos C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 1950, 45(4): 255 ~ 282

A DYNAMIC MODEL REDUCTION METHOD OF BEAM-TYPE STRUCTURES AND ITS APPLICATION *

Zhao Yang¹ Xu Boqian^{1†} Li Xiaobo¹ Li Yuwei²

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

(2. Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract In engineering projects, we often have to deal with dynamic analysis of large beam-type structures such as launch vehicles, train cars and high-rise buildings. As the computational workload is very large, model reduction is usually essential. In order to solve this problem, a multi-point cohesion method for beam-type solid structures is proposed. Based on the plane section assumption of beam theory, the displacements of FEM nodes on each cross section are approximated by the motion of cohesion points of the cross section through a displacement transformation matrix, resulting in the localized base vectors which will be used for model reduction. The method can also be applied to simulation of liquid propellant launch vehicles. The solid reduction method is then further proposed. Utilizing the characteristics that the liquid is incompressible and can't withstand shear stress, the elastic modulus and Poisson's ratio of the solid elements used to establish the liquid propellant are reasonably defined. Then the simplified model can be obtained by the multi-point cohesion method. Results of illustrative examples indicate that, the simplified model derived by the multi-point cohesion method can not only improve computation efficiency, but also ensure that the relative error of the results is less than eight percent. In the meanwhile, the results confirm effectiveness of the model reduction method.

Key words beam-type structures, model reduction, liquid propellant, modal analysis

Received 15 January 2020, revised 21 March 2020.

* The project is supported by the National Key Research and Development Plan Project (2016YFE0205000)

† Corresponding author E-mail: ciomp_xubq@126.com