

微结构固体中孤立波的动力稳定性^{*}

韩元春[†] 那仁满都拉

(内蒙古民族大学 数理学院, 通辽 028043)

摘要 描述微结构固体中波传播的一种 KdV 类方程作为控制方程并利用积分因子方法, 对微结构固体中传播孤立波的动力学稳定性进行了数值模拟研究. 主要以高斯波、Ricker 子波以及双曲正割波扰动作为初始扰动, 考察了不同小扰动下孤立波能否较长时间保持波形结构和传播速度而稳定传播问题. 结果表明, 不同的小扰动对孤立波的影响不同, 孤立波的稳定传播与扰动幅度和宽度都有关系, 只有受到幅度和宽度都非常小的扰动下在弱微尺度非线性效应的微结构固体中传播的孤立波才能显现出一定程度的抗干扰性和动力学稳定性, 能够在微结构固体中较长时间稳定传播.

关键词 微结构固体, 孤立波, 稳定性, 积分因子方法

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-055

引言

随着科学技术的迅速发展, 人们越来越关注微晶、合金、岩石、陶瓷以及功能梯度材料等含微结构的固体材料中波传播问题. 这主要是因为当今检测技术中所使用的一些高频波的波长越来越接近材料的微结构特征长度, 导致微结构效应对波场产生了不可忽视的影响. 由于经典连续介质理论不能对含微结构的固体材料的力学行为给出准确描述, 人们提出了若干描述其变形与运动的理论和模型^[1-4]. 近年来, Engelbrecht 等根据 Mindlin 微结构理论, 重点研究了含微结构的固体材料中孤立波的存在与传播问题. 在文献[5]中建立了微结构固体的非线性基本模型, 并证明了微结构固体中可以存在一种非对称孤立波. 文献[6]中详细研究了微结构效应对孤立波的传播及相互作用的影响. 文献[7]中研究了微结构固体中孤立波传播的反问题. 文献[8]中本文作者之一用定性分析方法证明了微结构固体中对称与非对称孤立波的存在性.

含微结构的固体材料中孤立波的形成与传播问题的研究对该材料的无损检测与评价具有重要意义. 因为孤立波在固体材料中传播时, 其形状、幅度以及传播速度中携带着材料内部结构特性的重要信息. 从文献[7]的研究结果看, 这可能成为对固

体材料进行检测与评价的一种有效手段. 但不管是在实验中, 还是在实际检测中, 在固体材料中传播的孤立波始终受到不同程度的扰动, 所以在扰动影响下孤立波能否稳定传播成为关键问题, 只有稳定传播的孤立波, 才能克服扰动, 能够长时间存在, 且能在实验中观测到和实际中应用到. 近年来, 对复杂系统中孤立波的存在性和动力系统的稳定性问题的研究受到了越来越多的重视^[9-12].

本文以描述微结构固体的一种 KdV 类方程作为控制方程并利用积分因子方法, 将对微结构固体中传播的孤立波在不同小扰动的影响下能否稳定传播问题进行数值模拟研究.

1 波模型及积分因子方法

在文献[13]中建立了描述 Mindlin 型微结构固体中一维孤立波传播的新模型

$$u_t + p_1(u^2)_x + p_2 u_{xxx} + p_3(u_x^2)_{xx} = 0 \quad (1)$$

其中, $p_1 = \frac{1}{2}\gamma_N^2$, $p_2 = (1 - \gamma_i^2)$, $p_3 = \frac{1}{2}\varepsilon\gamma_M^2$. 这是一种 KdV 类方程, 描述微结构固体中单向波的传播. 当无微尺度非线性效应, 即 $p_3 = 0$ 时, 此方程就变成著名的 KdV 方程. 下面就以方程(1)作为控制方程并利用积分因子方法, 对微结构固体中孤立波的稳定传播特性进行数值模拟研究.

2018-10-05 收到第 1 稿, 2020-04-06 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(11462019)

[†] 通讯作者 E-mail: han7371@163.com

积分因子方法是数值求解偏微分方程的一种计算速度快、精度高、稳定性好并能容易编程实现的有效方法,是属于一种伪谱方法^[14,15].该方法通过作快速傅里叶变换(FFT)和乘积分因子的巧妙手段,消掉方程中导致数值频散的刚性项(即线性空间导数项),从而达到高精度求解方程的目的.依据该方法的基本思想,对方程(1)作傅里叶变换,可得

$$\hat{u}_t + ikp_1\hat{u}^2 - ik^3p_2\hat{u} - k^2p_3\hat{u}_x^2 = 0 \quad (2)$$

上式中,符号“ $\hat{\cdot}$ ”表示对应函数的傅里叶变换, i 是虚数单位, k 是变换常数.方程(2)两边乘以 $e^{-ik^3p_2t}$,并令 $\hat{U} = e^{-ik^3p_2t}\hat{u}$,可得

$$\hat{U}_t + ikp_1e^{-ik^3p_2t}\hat{u}^2 - k^2p_3e^{-ik^3p_2t}\hat{u}_x^2 = 0 \quad (3)$$

又因为

$$u = F^{-1}(e^{ik^3p_2t}\hat{U}), u_x = F^{-1}(ik\hat{U}) \quad (4)$$

把(4)式代入方程(3),可得

$$\begin{aligned} \hat{U}_t + ikp_1e^{-ik^3p_2t}F\{[F^{-1}(e^{ik^3p_2t}\hat{U})]^2\} - \\ k^2p_3e^{-ik^3p_2t}F\{[F^{-1}(ike^{ik^3p_2t}\hat{U})]^2\} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

上式中, F 表示傅里叶变换, F^{-1} 表示傅里叶逆变换.由方程(5)可看到,原方程中导致数值频散的线性空间导数项全部被消掉.因此,我们可以利用四阶龙格库塔方法直接解出 $\hat{U}$,然后利用关系式 $u = F^{-1}(e^{ik^3p_2t}\hat{U})$,可求解得到 u .

2 微结构固体中孤立波传播的稳定性

由于在方程(1)中微尺度非线性项 $p_3(u_x^2)_{xx}$ 的出现,很难求得出其精确孤立波解,但当 $p_3 = 0$ 时,

可求得一种精确孤立波解

$$u_0(x, t) = A_0 \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{A_0 p_1}{6 p_2}} \left(x - \frac{2 A_0 p_1}{3} t \right) \right] \quad (6)$$

这里常数 A_0 表示孤立波的波幅.式(6)表示一种向右传播的对称钟型孤立波,其传播速度和宽度都与波幅有关,这是非线性波的重要特性.为考察未受扰孤立波在微结构固体中的传播特性,这里以式(6)为初始条件,并采用周期性边界条件,在区间 $[-\pi, \pi]$ 上进行数值计算.计算时选取的材料常数为 $p_1 = 100, p_2 = 3, p_3 = 0.01$,孤立波的幅度为 $A_0 = 1$.图1绘制的是 $t = 0.4$ 时刻在弱微尺度非线性效应的微结构固体中传播的孤立波波形以及此时的孤立波波形与初始波形上对应点的位移偏差(图中用 Δu 表示偏差).可看出,随着时间的推移,初始时刻的孤立波(6)缓慢变形并产生了一些偏差,但这种弱微尺度非线性效应下所产生的偏差非常小,即孤立波能够较长时间基本保持波形和传播速度在微结构固体中稳定传播.因此,在弱微尺度非线性效应的微结构固体中孤立波基本能够保持波形和传播速度而较长时间稳定传播.值得注意的是微结构固体中传播孤立波的动力学稳定性与固体介质的材料常数有关,当固体的微尺度非线性效应较强(p_3 较大)时,微结构固体中的孤立波明显变形、失去其对称性,并形成一种非对称孤立波或根本不能形成孤立波^[5,8].因此,微结构固体中孤立波的形成需要合适的条件,不同的微结构固体(材料常数不同)中形成的孤立波的形状特性不同,其传播的稳定性也应有所不同.

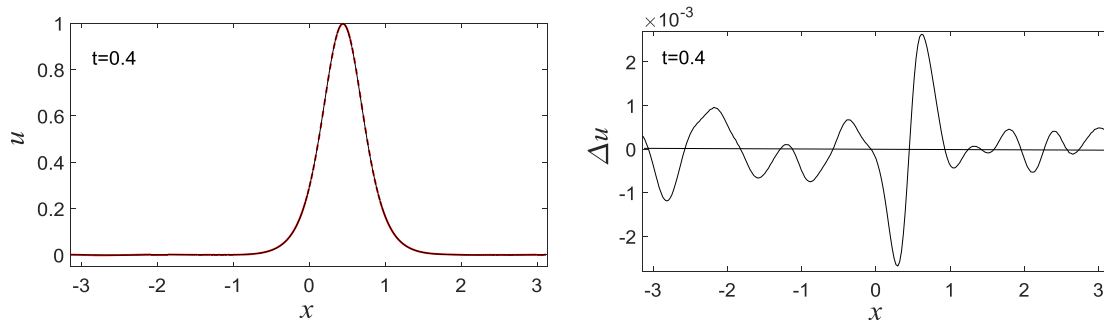


图1 未受扰孤立波(红色虚线)与初始波形的偏差

Fig.1 The deviation of undisturbed solitary wave (red dashed line) and initial waveform

2.1 高斯波扰动下的孤立波

假设微结构固体中传播的孤立波受到了高斯波扰动,其表达式为

$$u'(x, 0) = Ae^{-\mu x^2} \quad (7)$$

式中, A 为高斯波的幅度, μ 为高斯波的宽度因数.数值模拟时,采用周期性边界条件,并在区间 $[-\pi, \pi]$ 上进行计算,初始条件取为 $u(x, 0) = u_0(x, 0) + u'(x, 0)$,材料常数取为 $p_1 = 100, p_2 = 3,$

$p_3 = 0.01$, 孤立波幅度为 $A_0 = 1$. 由于考虑的是小扰动, 所以扰动幅度应足够小, 取为 $A = 0.01$, 约为孤立波幅度的 1%. 如果扰动幅度较大, 肯定会影响孤立波的稳定传播, 这是众所周知的. 一般来讲, 经过足够长时间的演化后, 如果扰动的幅度没有产生明显的增加, 受扰波的波幅、宽度等波形结构和传播速度基本保持不变, 则可判定该波是动力学稳定; 如果扰动的幅度产生明显的增加, 受扰波的波形结构和速度发生明显改变, 则可判定该波是动力学不稳定. 在图 2 中显示的是当 $A = 0.01, \mu = 40$ 时, $t = 0$ 和 $t = 0.4$ 时刻的孤立波的波形图. 可看出, 随着时间的推移, 初始时刻的局部扰动, 逐步弥散到整个计算区域, 但扰动幅度没有明显增加. 经过一定时间的演化后, $t = 0.4$ 时刻的受扰孤立波的波形和

传播速度有了一些小的变化, 出现了一些波尾, 在图 3 所示的受扰孤立波与未受扰孤立波在同一时刻的偏差图上也能看到这一点. 这表明微结构固体中的孤立波的抗干扰性不是很强, 其动力学稳定性也不是很稳定. 特别是当 $A = 0.01, \mu = 10$, 即改变局部扰动的宽度时, 受扰孤立波的波形结构和传播速度有了比较明显变化 (如图 4 所示), 在图 5 所示的偏差图上也明显看到这一点. 这表明高斯波扰动的幅值能够影响孤立波的稳定传播之外, 其宽度也能影响孤立波的稳定传播. 由此可总结出: 微结构固体中传播孤立波的抗干扰性即其动力学稳定性不是很强, 只有受到幅度和宽度都非常小的高斯波扰动下, 微结构固体中传播的孤立波才能显现出一定程度的动力学稳定性.

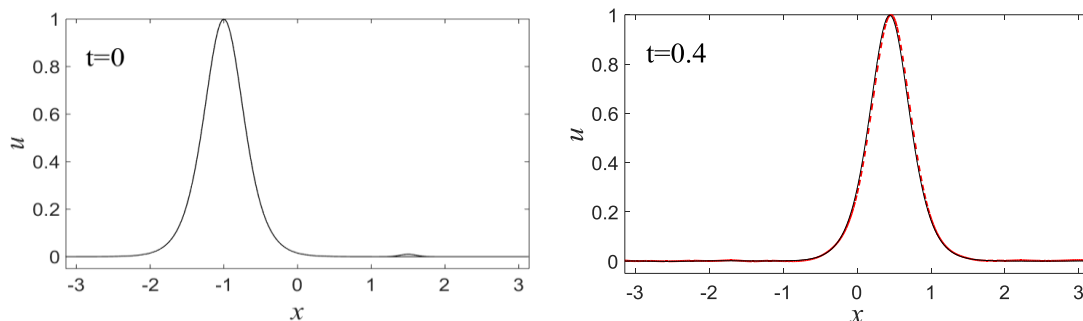


图2 高斯波扰动下的孤立波(红色虚线)

Fig.2 The solitary wave (red dashed line) disturbed by Gaussian wave

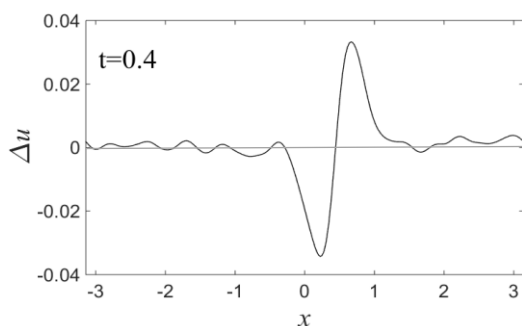


图3 受扰孤立波与未受扰孤立波的偏差

Fig.3 The deviation of disturbed solitary wave and undisturbed solitary wave

2.2 Ricker子波扰动下的孤立波

假设微结构固体中传播的孤立波受到了 Ricker子波扰动, 其表达式为

$$u'(x, 0) = A(1 - 2(\lambda x)^2)e^{-(\lambda x)^2} \quad (8)$$

其中, A 为 Ricker子波的幅度, λ 为 Ricker子波的宽度因数. 数值模拟时, 所采用的边界条件、初始条件、材料常数和孤立波幅度都与上节的相同. 图 6

中显示的是当 $A = 0.01, \lambda = 6$ 时, $t = 0$ 和 $t = 0.4$ 时刻受到 Ricker子波扰动的孤立波波形图. 由图可看出, 随着时间的推移, 初始时刻的局部扰动, 逐步弥散到整个计算区域, 但扰动幅度没有明显增加. 经过一定时间演化后, 受扰孤立波的波形和传播速度开始发生了一些微小的变化, 但还能够保持原有特性. 如图 7 所示的受扰孤立波与未受扰孤立波的偏差图上可以看到两者的偏差, 显然偏差度很小. 因此, 在 Ricker子波小扰动下孤立波的波形和传播速度也发生了一些微小的变化, 但相比于高斯波扰动下的变化要小一些. 当 $A = 0.01, \lambda = 3$, 即改变局部扰动的宽度时 (如图 8 所示), 受扰孤立波的波形和传播速度有了较明显变化 (如图 9 所示). 这表明 Ricker子波的宽度也能够影响孤立波的稳定传播. 由此可得: 微结构固体中传播孤立波的抗干扰性和动力学稳定性不是很强, 只有受到幅度和宽度都非常小的 Ricker子波扰动下, 微结构固体中传播的孤立波才能显现出一定程度的动力学稳定性.

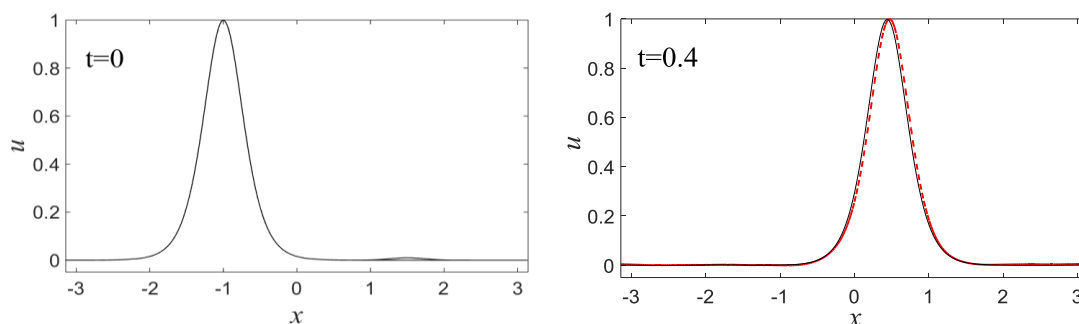


图4 高斯波扰动下的孤立波(红色虚线)

Fig.4 The solitary wave (red dashed line) disturbed by Gaussian wave

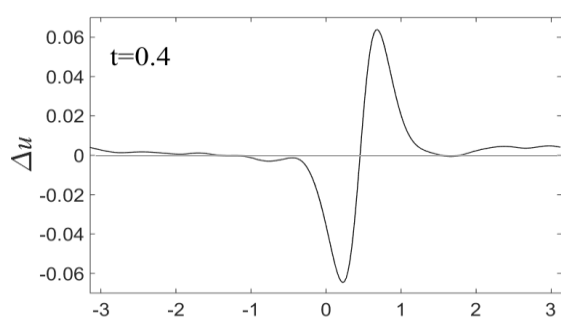


图5 受扰孤立波与未受扰孤立波的偏差

Fig.5 The deviation of disturbed solitary wave and undisturbed solitary wave

2.3 双曲正割波扰动下的孤立波

设微结构固体中传播的孤立波受到了双曲正割波小扰动,即 $u'(x, 0) = A \operatorname{sech}(\mu x)$, 同样我们采用数值方法考察了孤立波传播的动力学稳定性. 数值模拟时, 所采用的边界条件、初始条件、材料常数和孤立波幅度等都与上节相同. 图 10 给出的是当 $A = 0.01, \mu = 12$ 时, 在 $t = 0$ 和 $t = 0.4$ 时刻受到双曲正割波扰动的孤立波的波形图. 图 11 给出的是在 $t = 0.4$ 时刻受扰孤立波与未受扰孤立波的偏差图. 从偏差图可看出, 受到双曲正割波扰动的孤立波的波形和传播速度的变化情况非常类似于受到高斯

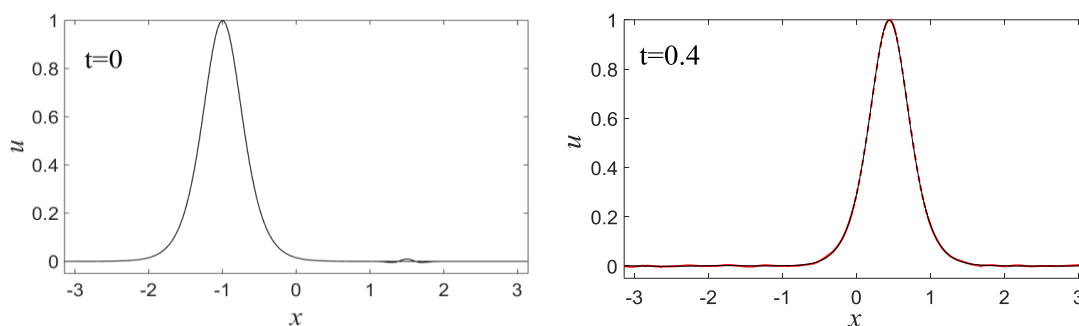


图6 Ricker子波扰动下的孤立波(红色虚线)

Fig.6 The solitary wave (red dashed line) disturbed by Ricker wavelet

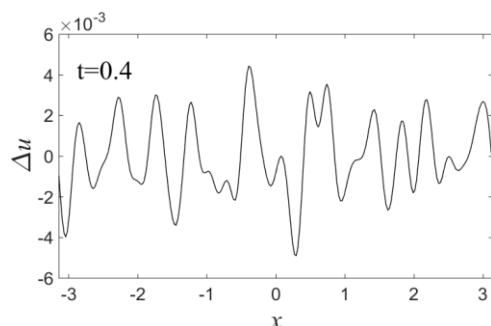


图7 受扰孤立波与未受扰孤立波的偏差

Fig.7 The deviation of disturbed solitary wave and undisturbed solitary wave

波扰动的孤立波的波形和传播速度的变化情况. 图 12 给出的是当 $A = 0.01, \mu = 6$ 时, 在 $t = 0$ 和 $t = 0.4$ 时刻受到双曲正割波扰动的孤立波的波形图, 即受到宽度较宽的双曲正割波扰动. 可以看出, 受到宽度较宽的双曲正割波扰动之后, 孤立波的波形和传播速度有了更明显的变化, 从偏差图 13 也可看到这一点. 此时的变化情况非常类似于受到高斯波扰动的孤立波的波形和传播速度的变化情况. 相比受到三种不同小扰动下的孤立波的波形和传播速度的变化, 可看出在 Ricker 子波扰动下孤立波

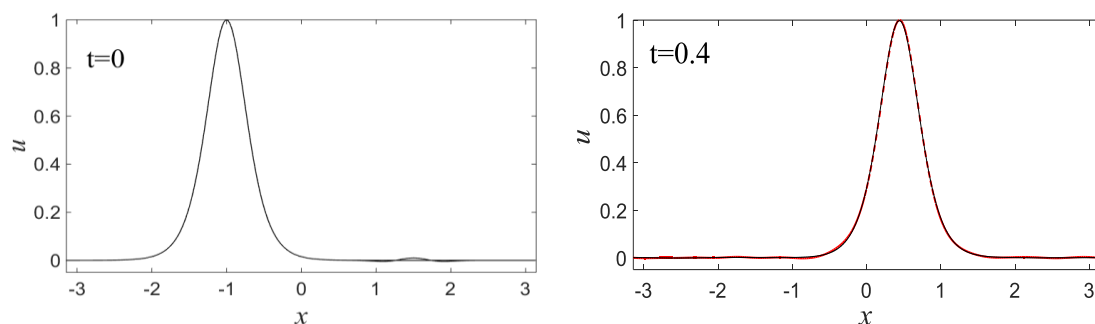


图8 Ricker子波扰动下的孤立波(红色虚线)

Fig.8 The solitary wave (red dashed line) disturbed by Ricker wavelet

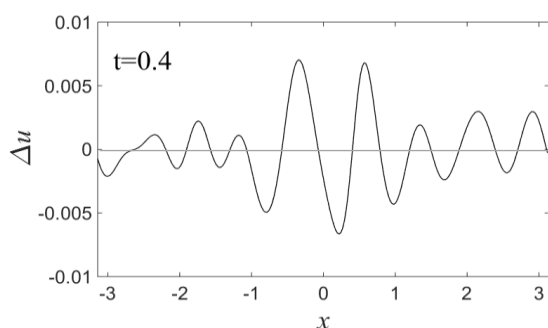


图9 受扰孤立波与未受扰孤立波的偏差

Fig.9 The deviation of disturbed solitary wave and undisturbed solitary wave

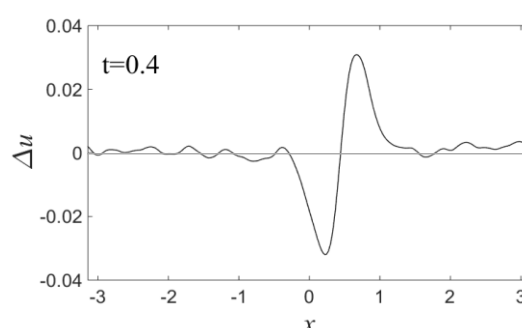


图11 受扰孤立波与未受扰孤立波的偏差

Fig.11 The deviation of disturbed solitary wave and undisturbed solitary wave

的波形和传播速度的变化最小,高斯波扰动和双曲正割波扰动下孤立波的波形和传播速度的变化非常类似,偏差程度也基本相同.

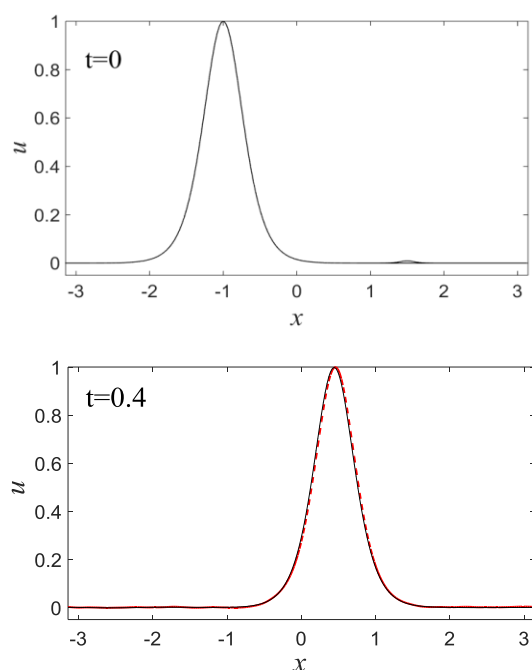


图10 双曲正割波扰动下的孤立波(红色虚线)

Fig.10 The solitary wave (red dashed line) disturbed by Hyperbolic secant wave

3 结论

描述微结构固体中波传播的一种KdV类方程作为控制方程,并利用积分因子方法,对受到不同小扰动的孤立波在具有弱微尺度非线性效应的微结构固体中传播的动力学稳定性进行了数值模拟研究.主要结论有:

(1)在高斯波扰动、Ricker子波以及双曲正割波扰动下,孤立波的动力学稳定性都与三种扰动的幅度和宽度有关.

(2)微结构固体中传播孤立波的动力学稳定性不是很强,只有受到幅度和宽度都非常小的小扰动下,微结构固体中传播的孤立波才能显现出一定程度的动力学稳定性.

(3)扰动幅度和宽度基本相同的情况下,相比Ricker子波扰动,高斯波扰动和双曲正割波扰动对孤立波的影响更明显一些.只有稳定传播的孤立波,才能克服扰动,能够长时间传播,且能在实验中观测到和实际中可能利用到.从此意义上讲,微结构固体中孤立波能否稳定传播问题的研究对固体材料性能的无损检测与评价具有重要实际意义.希望本文结果会对微结构固体的无损检测与评价提供理论指导和帮助.

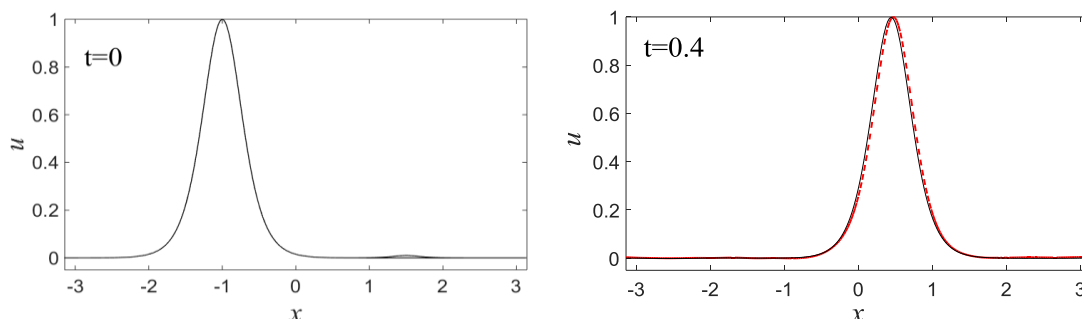


图12 双曲正割波扰动下的孤立波(红色虚线)

Fig.12 The solitary wave (red dashed line) disturbed by Hyperbolic secant wave

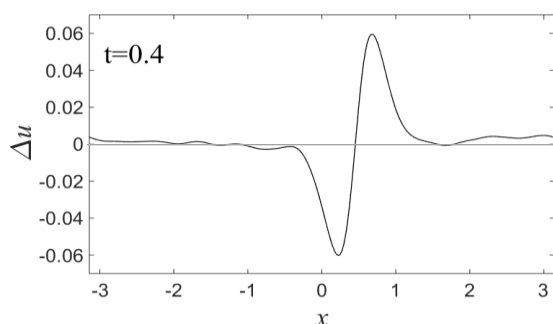


图13 受扰孤立波与未受扰孤立波的偏差

Fig.13 The deviation of disturbed solitary wave and undisturbed solitary wave

参 考 文 献

- Mindlin R D. Micro-structure in Linear Elasticity. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, 1964, 16(1): 51~78
- Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1966, 15(6): 909 ~ 923
- Erofeev V I. Wave processes in solids with microstructure. Singapore: World Scientific Press, 2003: 101 ~ 223
- 胡更开, 刘晓宁, 荀飞. 非均匀微极介质的有效性质分析. *力学进展*, 2004, 34(2): 195 ~ 202 (Hu G K, Liu X N, Xun F. Micromechanics of heterogeneous micropolar mediums. *Advances in Mechanics*, 2004, 34(2): 195 ~ 202 (in Chinese))
- Janno J, Engelbrecht J. Solitary waves in nonlinear microstructured materials. *Journal of Physics A: General Physics*, 2005, 38(38): 5159 ~ 5172
- Salupere A, Tamm K. On the influence of material properties on the wave propagation in Mindlin-type microstructured solids. *Wave Motion*, 2013, 50(7): 1127 ~ 1139
- Janno J, Engelbrecht J. An inverse solitary wave problem related to micro-structured materials. *Inverse Problems*, 2005, 21(6): 2019 ~ 2034
- 那仁满都拉. 微结构固体中的孤立波及其存在条件. *物理学报*, 2014, 63(19): 194301-1 ~ 194301-9 (Naranmandula. Solitary wave and thier existence conditions in microstructured solids. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(19): 194301-1 ~ 194301-9 (in Chinese))
- 杜勇, 化存才, 郑治波, 等. 一种岔路口分流交通流格子模型的孤立波分析. *动力学与控制学报*, 2013, 11(2): 133 ~ 136 (Du Y, Hua C C, Zheng Z B, et al. Analysis of soliton in a split-flow traffic flow lattice model on the crossing road. *Journal of Dynamics and Control*, 2013, 11(2): 133 ~ 136 (in Chinese))
- 沈华勋. 飞翼式柔性飞机纵向动力学建模与稳定性分析. *动力学与控制学报*, 2016, 14(3): 241 ~ 246 (Shen H X. Longitudinal danamic modeling and stability analysis of very flexible flying wings. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(3): 241 ~ 246 (in Chinese))
- 王德鑫, 那仁满都拉. 含微结构二维固体中非对称孤立波的存在条件. *动力学与控制学报*, 2018, 16(3): 211 ~ 216 (Wang D X, Naranmandula. Asymmetric solitary waves and their existence conditions in 2D solids with microstructures. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(3): 211 ~ 216 (in Chinese))
- 孙莹, 张伟. 1:1 内共振环形桁架天线的稳定性分析. *动力学与控制学报*, 2018, 16(3): 281 ~ 288 (Sun Y, Zhang W. Analysis on stability of circular mesh antenna with 1:1 internal resonance. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(3): 281 ~ 288 (in Chinese))
- Randrüüt M, Braun M. On one-dimensional solitary waves in microstructured solids. *Wave Motion*, 2010, 47: 217 ~ 230
- Chan T F, Kerkhoven T. Fourier methods with extended stability intervals for the Korteweg-De Vries equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1985, 22(3): 441 ~ 454
- Milewski P A, Tabak E G. A pseudo-spectral procedure for the solution of nonlinear wave equations with examples from free-surface flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1999, 21(3): 1102 ~ 1114

DYNAMICAL STABILITY OF SOLITARY WAVE IN MICROSTRUCTURED SOLIDS *

Han Yuanchun[†] Narenmandula

(*College of Mathematics and Physics, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao,
Inner Mongolia 028043, China*)

Abstract A KdV-like equation describing wave propagation in microstructured solids as governing equation, the dynamical stability of solitary waves propagating in microstructured solids was numerical simulated using the method of integrating factors. Taking Gaussian wave, Ricker wavelet and Hyperbolic secant wave as initial disturbances, stable propagation keeping structure of waveform and propagation speed of solitary wave for a long time was investigated, under those three small disturbances. The simulation results show that different small disturbances have different effects on solitary wave, the stable propagation of solitary wave is related to the amplitude and width of the disturbances. Only under disturbances of very small amplitude and width, the solitary waves can exhibit a certain degree of anti-interference and dynamical stability, and can stably propagate in microstructural solids with weak microscale nonlinear effects for a long time.

Key words microstructured solid, solitary wave, stability, method of integrating factors

Received 5 October 2018, revised 6 April 2020.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11462019)

[†] Corresponding author E-mail: han7371@163.com