

1:1 内共振环形桁架天线的稳定性分析^{*}

孙莹[†] 张伟

(非线性振动及机械结构强度北京市重点实验室, 北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124)

摘要 复杂的太空环境易导致环形桁架天线产生大幅非线性振动,严重影响天线的稳定性和结构性能.在大幅的非线性振动中不同模式之间的能量可以相互传递和转换,将引起天线产生内振动.因此内共振在天线的大幅振动中起着重要的作用.本文所研究的环形桁架天线被简化成等效圆柱壳模型,建立其非线性动力学方程.根据有限元模态分析,得出环形桁架天线第四阶模态和第五阶模态的振动频率接近 1:1.所以本文利用理论分析和数值计算研究 1:1 内共振情形下环形桁架天线的局部动力学性质.即系统受到小扰动后平衡点的稳定性.详细研究了两种不同形式下的平衡点的稳定性,即系统特征根为双零和两个负数时的稳定性以及系统特征根为双零和一对纯虚复数时的稳定性.利用中心流形理论、非线性变换、Routh-Hurwitz 判据得到平衡点的稳定区域、不稳定区域和临界分岔曲线.最后通过数值模拟验证理论分析.

关键词 环形桁架天线, 非线性振动, 动力学行为, 稳定性, 局部动力学分析

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-024

引言

环形桁架天线具有大口径、重量轻、灵敏度高、拓扑结构简单等特点,是目前大型卫星天线的较为理想的结构形式.由于结构尺寸大以及材料的柔韧性等自身结构特点,环形桁架天线在空中展开后易出现变形,外加复杂的太空环境如:太阳辐射、热激励和微重力等,天线展开锁定后在运行中易导致大幅的非线性振动.其振动形式主要有以下四种类型:(1) 环形桁架与展开臂的整体弯曲振动;(2) 环形桁架绕展开臂的面内扭转振动;(3) 环形桁架绕展开臂的横摇振动;(4) 环形桁架面内的呼吸振动.此外,还存在上述四种振动模态之间的非线性耦合振动.所以越来越多的国内外学者对于环形桁架天线的非线性动力学行为展开了详细的研究. Makarov 等人^[1]研究了环形柔性可展天线在稳定状态下的动力学行为.张等人^[2]建立了环形桁架天线的运动方程,并分析了在 1:2 内共振下的非线性动力学行为.孙和张等人^[3]利用能量相位法研究了环形桁架天线的全局分岔和多脉冲混沌运动.胡等人^[4,5]建立了大型可展天线展开锁定后在空中运

行的动力学模型并分析了其动力学特性,而且还研究了一种由两个刚性臂所支撑的大型空间可展天线的非线性动力学行为.范震等人^[6]分析了大型空间环行天线结构振动的前四阶模态,并且研究了材料参数和边界条件对振动模态和固有频率的影响.

由于大幅振动严重影响卫星天线的结构性能以及稳定性,所以研究卫星天线运行中的稳定性变得尤为重要.而通常用高维非线性系统描述大型可展开天线的动力学行为.因此,可以利用高维非线性系统的局部分岔理论研究大型可展天线在临界点附近可能发生的复杂动力学行为.近些年,国内外学者在高维非线性系统的局部分岔问题研究方面取得了一些成果. Yu 等人^[7]研究了双摆系统的稳定性并给出了分岔解的稳定性条件.陈等人^[8-10]利用理论和数值方法分析了不同非线性系统平衡点的稳定性和分岔解. Wei 等人^[11-13]针对不同的三维自治系统应用 Routh-Hurwitz 判据研究了系统的稳定性、分岔行为以及混沌吸引子等.徐等人^[14]利用规范型理论和中心流型定理分析了具有负阻尼的延迟振子的 Hopf 分岔及稳定性.

本文利用高维非线性理论以及数值方法研究

了1:1内共振情况下环形桁架天线的稳定性以及分岔特性. 在文献[2]所建立的运动方程的基础上,利用多尺度法得到直角坐标系下的平均方程. 根据中心流形理论、非线性变换以及 Routh-Hurwitz 判据等得到了环形桁架天线的临界条件. 分析了环形桁架天线平衡点附近的稳定性,并通过数值计算验证了理论分析的准确性.

1 运动方程

在文献[2]中环形桁架天线被简化成等效圆柱壳结构模型,其动力学模型如图 1 所示.为了研究环形桁架天线在实际情况下能够产生何种内共振情形,利用有限元方法对实际可展天线结构进行仿真,通过模态分析得到天线结构的振动频率.根据有限元的模态析,给出了第四阶和第五阶振动模式,如图 2 和图 3 所示.同时,得到了环形桁架天线前五阶振动模式频率,如图 4 所示.从图 2,3 和 4 中可以看出第四阶模态和第五阶模态的振动频率比接近 1:1.因此,在第四阶模态和第五阶模态之间可能出现 1:1 内共振关系.所以,本文研究了环形桁架天线在 1:1 内共振下的稳定性以及非线性动力学行为.

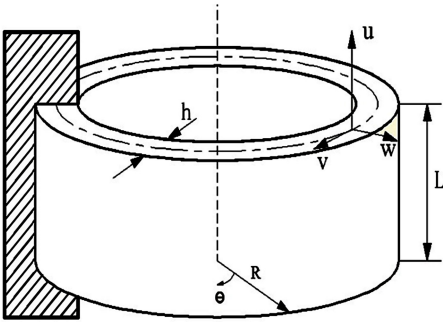


图 1 等效圆柱壳模型

Fig.1 Model of equivalent circular cylindrical shell

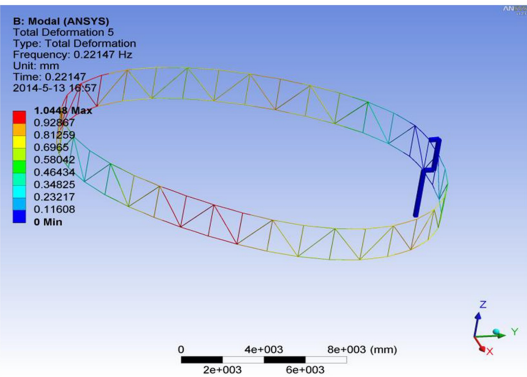


图 2 环形桁架天线第四阶振动模式

Fig.2 The fourth order mode in vibration of the circular truss antenna

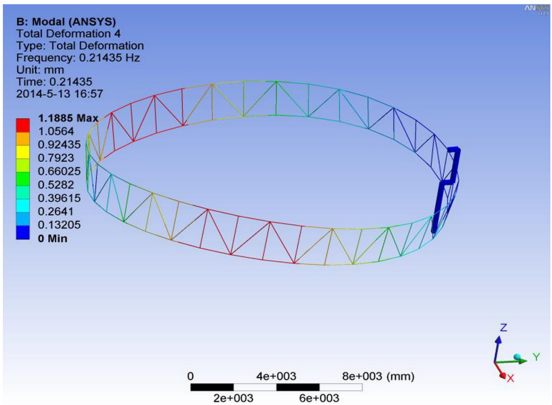


图 3 环形桁架天线第五阶振动模式

Fig.3 The fifth order mode in vibration of the circular truss antenna

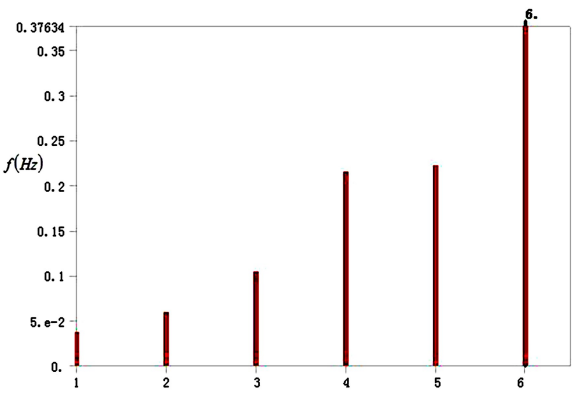


图 4 环形桁架天线振动频率

Fig.4 The vibration frequency of the circular truss antenna

根据一阶剪切变形理论, von Karman 几何关系以及 Hamilton 原理得到了等效圆柱壳的非线性偏微分方程,利用 Galerkin 方法对偏微分方程进行离散,我们主要考虑系统的横向非线性振动,得到了两自由度等效圆柱壳非线性呼吸振动常微分方程如下:

$$\ddot{w}_1 + \mu_1 \dot{w}_1 + \omega_1^2 w_1 + \gamma_{11} f_T \cos(\Omega t) w_1 + \gamma_{12} w_2 + \gamma_{13} w_1^3 + \gamma_{14} w_1^2 w_2 + \gamma_{15} w_1 w_2^2 + \gamma_{16} w_2^3 = \gamma_{17} + \gamma_{18} f_T \cos(\Omega t) \tag{1a}$$

$$\ddot{w}_2 + \mu_2 \dot{w}_2 + \omega_2^2 w_2 + \gamma_{21} f_T \cos(\Omega t) w_2 + \gamma_{22} w_1 + \gamma_{23} w_2^3 + \gamma_{24} w_2^2 w_1 + \gamma_{25} w_2 w_1^2 + \gamma_{26} w_1^3 = \gamma_{27} + \gamma_{28} f_T \cos(\Omega t) \tag{1b}$$

其中, $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 分别是第四阶和第五阶振动的模态函数, f_T 为环形桁架天线的外激励, μ_1 和 μ_2 为结构阻尼系数.

利用多尺度法分析等效圆柱壳的非线性呼吸振动方程,为了便于分析,引入如下参数变换:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &\rightarrow \varepsilon \gamma_{11}, \gamma_{12} \rightarrow \varepsilon \gamma_{12}, \gamma_{13} \rightarrow \varepsilon \gamma_{13}, \\ \gamma_{14} &\rightarrow \varepsilon \gamma_{14}, \gamma_{15} \rightarrow \varepsilon \gamma_{15}, \gamma_{16} \rightarrow \varepsilon \gamma_{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{17} &\rightarrow \varepsilon \gamma_{17}, \gamma_{21} \rightarrow \varepsilon \gamma_{21}, \gamma_{22} \rightarrow \varepsilon \gamma_{22}, \\
\gamma_{23} &\rightarrow \varepsilon \gamma_{23}, \gamma_{24} \rightarrow \varepsilon \gamma_{24}, \gamma_{25} \rightarrow \varepsilon \gamma_{25}, \\
\gamma_{26} &\rightarrow \varepsilon \gamma_{26}, \gamma_{27} \rightarrow \varepsilon \gamma_{27}, \mu_1 \rightarrow \varepsilon \mu_1, \\
\mu_2 &\rightarrow \varepsilon \mu_2
\end{aligned} \quad (2)$$

考虑 1:1 内共振情形, 关系如下:

$$\omega_1^2 = \Omega^2 + \varepsilon \sigma_1, \quad \omega_2^2 = \Omega^2 + \varepsilon \sigma_2 \quad (3)$$

经过计算, 得到四维直角坐标系下的平均方程:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 = & -\frac{1}{2}\bar{\mu}_1 x_1 - \frac{1}{2}\sigma_1 x_2 - \frac{1}{2}\gamma_{12} x_4 - \frac{1}{4}\gamma_{14} x_1 x_2 x_3 - \\
& \frac{3}{8}\gamma_{13} x_2 (x_1^2 + x_2^2) - \frac{3}{8}\gamma_{14} x_2^2 x_4 - \\
& \frac{1}{8}\gamma_{14} x_1^2 x_4 - \frac{1}{4}\gamma_{15} x_1 x_3 x_4 - \frac{1}{8}\gamma_{15} x_2^2 x_3 - \\
& \frac{3}{8}\gamma_{15} x_2 x_4^2 - \frac{3}{8}\gamma_{16} x_4 (x_3^2 + x_4^2)
\end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 = & -\frac{1}{2}\bar{\mu}_1 x_2 + \frac{1}{2}\sigma_1 x_1 + \frac{1}{2}\gamma_{12} x_3 + \frac{1}{4}\gamma_{14} x_1 x_2 x_4 + \\
& \frac{3}{8}\gamma_{13} x_1 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{8}\gamma_{14} x_1^2 x_3 + \frac{1}{8}\gamma_{14} x_2^2 x_3 + \\
& \frac{1}{4}\gamma_{15} x_2 x_3 x_4 + \frac{1}{8}\gamma_{15} x_1 x_4^2 + \frac{3}{8}\gamma_{15} x_1 x_3^2 + \\
& \frac{3}{8}\gamma_{16} x_3 (x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{2}\gamma_{18} f_T
\end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 = & -\frac{1}{2}\bar{\mu}_2 x_3 - \frac{1}{2}\sigma_2 x_4 - \frac{1}{2}\gamma_{22} x_2 - \frac{1}{4}\gamma_{24} x_1 x_3 x_4 - \\
& \frac{3}{8}\gamma_{23} x_4 (x_3^2 + x_4^2) - \frac{3}{8}\gamma_{24} x_2^2 x_4 - \frac{1}{8}\gamma_{24} x_2 x_3^2 - \\
& \frac{1}{4}\gamma_{25} x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{8}\gamma_{25} x_1^2 x_4 - \frac{3}{8}\gamma_{25} x_2^2 x_4 - \\
& \frac{3}{8}\gamma_{26} x_2 (x_1^2 + x_2^2)
\end{aligned} \quad (4c)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_4 = & -\frac{1}{2}\bar{\mu}_2 x_4 + \frac{1}{2}\sigma_2 x_3 + \frac{1}{2}\gamma_{22} x_1 + \frac{1}{4}\gamma_{24} x_2 x_3 x_4 + \\
& \frac{3}{8}\gamma_{23} x_3 (x_3^2 + x_4^2) + \frac{3}{8}\gamma_{24} x_1 x_3^2 + \frac{1}{8}\gamma_{24} x_1 x_4^2 + \\
& \frac{1}{4}\gamma_{25} x_1 x_2 x_4 + \frac{1}{8}\gamma_{25} x_2^2 x_3 + \frac{3}{8}\gamma_{25} x_1^2 x_3 + \\
& \frac{3}{8}\gamma_{26} x_1 (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}\gamma_{28} f_T
\end{aligned} \quad (4d)$$

2 稳定性和分岔分析

根据坐标平移原理, 微分方程的非零平衡点都可以平移到零解平衡点处, 因此, 我们只需考虑零解平衡点附近的稳定性。

由方程(4)可知, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$

为方程的平衡点, 对应的 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mu_1 & -\frac{1}{2}\sigma_1 & 0 & -\frac{1}{2}\gamma_{12} \\ \frac{1}{2}\sigma_1 & -\frac{1}{2}\mu_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma_{22} & -\frac{1}{2}\mu_2 & -\frac{1}{2}\sigma_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{22} & 0 & \frac{1}{2}\sigma_2 & -\frac{1}{2}\mu_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Jacobian 矩阵(5)对应的特征多项式如下:

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 \quad (6)$$

其中,

$$a_0 = 1 \quad (7a)$$

$$a_1 = \mu_1 + \mu_2 \quad (7b)$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & \frac{1}{4}\mu_1^2 + \frac{1}{4}\mu_2^2 + \frac{1}{4}\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2 + \\
& \mu_1 \mu_2 + \frac{1}{2}\gamma_{12} \gamma_{22}
\end{aligned} \quad (7c)$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & \frac{1}{4}[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 \mu_2 + \gamma_{12} \gamma_{22})] + \\
& \frac{1}{4}[(\mu_2 \sigma_1^2 + \mu_1 \sigma_2^2)]
\end{aligned} \quad (7d)$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & \frac{1}{16}[(\mu_1 \mu_2 - \sigma_1 \sigma_2) + \gamma_{12} \gamma_{22}]^2 + \\
& \frac{1}{16}(\mu_1 \sigma_2 + \mu_2 \sigma_1)^2
\end{aligned} \quad (7e)$$

根据 Routh-Hurwitz 判据可知, 如果平衡点 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ 是稳定的, 系统必须同时满足如下条件:

$$\begin{aligned}
a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad a_4 > 0 \\
a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 > 0
\end{aligned} \quad (8)$$

条件(8)表明 Jacobian 矩阵(5)的所有特征根实部均为负数. 而当条件(8)中有任何一个条件不满足时, 平衡点即为不稳定解, 系统将会出现分岔现象. 因此, 接下来我们将要对系统(4)进行局部稳定性和分岔分析。

如果 Jacobian 矩阵(5)只有一个零特征根, 对应的特征多项式(6)只有一个零解, 则需要多项式(6)的系数 a_1, a_2, a_3, a_4 满足 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0, a_4 = 0$. 即如下条件:

$$\begin{aligned}
a_4 = & \frac{1}{16}[(\mu_1 \mu_2 - \sigma_1 \sigma_2) + \gamma_{12} \gamma_{22}]^2 + \\
& \frac{1}{16}(\mu_1 \sigma_2 + \mu_2 \sigma_1)^2 = 0
\end{aligned} \quad (9)$$

根据方程(9),继续推导出:

$$\begin{aligned} \mu_1\mu_2-\sigma_1\sigma_2+\gamma_{12}\gamma_{22} &=0, \\ (\mu_1\sigma_2+\mu_2\sigma_1)^2 &=0 \end{aligned} \quad (10)$$

将方程(10)代入(7d)中,得到 $a_3=0$.如果条件 $a_3=0$ 和 $a_4=0$ 同时满足,则会得到Jacobian矩阵(5)将有一对零特征根,这个结果与矩阵(5)有一个零特征根的结论相违背.因此,Jacobian矩阵(5)不可能存在只有一个零解的情况.下面我们分析特征多项式(6)在平衡点处有双零和两个负特征值以及双零和一对纯虚特征值情形下的稳定性.

2.1 双零和两个负特征根

在这一节中,我们主要研究特征多项式(6)在平衡点处有双零和两个负数特征根的情况.为了便于分析,选取方程(4)中的参数如下: $\mu_1=\mu_2=2$, $\gamma_{13}=\gamma_{14}=\gamma_{15}=\gamma_{16}=8$, $\gamma_{12}=2$, $\gamma_{22}=-4$, $\gamma_{23}=\gamma_{24}=\gamma_{25}=\gamma_{26}=8$, $\sigma_2=-2$, $\sigma_1=2$, $\gamma_{18}=\gamma_{28}=0$,其中 $\gamma_{12},\gamma_{13},\gamma_{14},\gamma_{15},\gamma_{16},\gamma_{23},\gamma_{24},\gamma_{25},\gamma_{26}$ 为系统的几何结构参数,因此这些参数值只能取正或者零. $\gamma_{22}=-4$ 为一组可以进行代数运算的几何参数,正直或者负值均可取,取负值时系统在平衡点处有两个负特征根,为稳定状态. σ_1 和 σ_2 为系统的调谐参数,既可取负值又可取正值.参数则方程(6)对应的特征多项式和特征根为:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^4 + 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0, \\ \lambda_{1,2} &= 0, \lambda_{3,4} = -2 \end{aligned} \quad (11)$$

选取 μ_1 和 μ_2 作为摄动参数,引入摄动变换 $\mu_1=2+\varepsilon_1$ 和 $\mu_2=2+\varepsilon_2$.给出如下的稳定性变换:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

将变换(12)代入方程(4),系统被改写成为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\frac{1}{2}\varepsilon_1 y_1 - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_3 + \\ &\quad \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_4 + Ng_1 \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2 y_2 - \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_3 - \\ &\quad \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_4 + Ng_2 \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_2 -$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_1 y_3 - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_4 + Ng_3 \quad (13c)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_4 &= -\frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_1 - \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_2 - \\ &\quad \frac{1}{2}\varepsilon_2 y_4 + \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_3 + Ng_4 \end{aligned} \quad (13d)$$

其中,非线性项 $Ng_i(i=1,2,3,4)$ 的表达式见附录A.

由中心流形降维方法可以知道系统(12)的局部动力学行为由变量 y_1 和 y_2 决定,而非主变量 y_3 和 y_4 的分岔解利用变量 y_1 和 y_2 来表示,可得到 y_3 和 y_4 的表达式如下:

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_1 + \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_2 + 8y_2^3 + \\ &\quad \frac{17}{4}y_1^3 + \frac{25}{2}y_1^2 y_2 + \frac{33}{2}y_1 y_2^2 \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} y_4 &= -\frac{1}{8}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_1 - \frac{1}{8}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_2 + \\ &\quad \frac{13}{2}y_2^3 + 3y_1^3 + \frac{27}{4}y_1^2 y_2 + \frac{25}{2}y_1 y_2^2 \end{aligned} \quad (14b)$$

将方程(14)代入方程(13),在方程(13)的前两个方程中忽略 y_3 和 y_4 两个变量,这种研究方法不影响 (y_1, y_2) 的分岔解和稳定性条件.因此,要研究系统(13)的平衡点处的分岔和稳定性问题,只需分析降维后的二维系统,该系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \left[-\frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{16}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \right] y_1 + \\ &\quad \left[-\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1}{16}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \right] y_2 + \\ &\quad \frac{17}{2}y_1^3 + 16y_2^3 + 33y_2^2 y_1 + 25y_1^2 y_2 \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2 y_2 - 4y_1^3 + \\ &\quad y_2^3 - 7y_2^2 y_1 - \frac{15}{2}y_1^2 y_2 \end{aligned} \quad (15b)$$

根据Routh-Hurwitz判据可知,如果初始平衡解 $(y_1, y_2) = (0, 0)$ 是稳定的,那么必须满足如下条件:

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{16}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 > 0 \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{16}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \right] \left[\frac{1}{16}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] - \frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) > 0 \end{aligned} \quad (16b)$$

根据不等式(16),定义稳定性临界曲线如下:

$$L_1: -\varepsilon_1 + \frac{1}{8}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 = 0 \quad (17a)$$

$$L_2: \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0 \quad (17b)$$

$$L_3: [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - 8\varepsilon_1](\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - 8) - 64 = 0 \quad (17c)$$

根据方程(17),可得平衡点的稳定性区域分布图,如图 5 所示.临界曲线 L_1, L_2 和 L_3 将平面 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 分为稳定区域和不稳定区域,其中多项 I 为稳定区域,II 为不稳定区域.

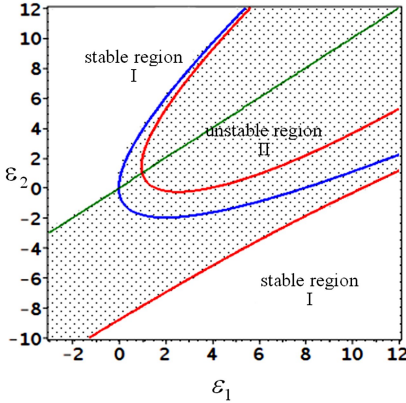


图 5 双零和两个负数特征根的稳定区域以及不稳定区域
Fig.5 Stable region and the unstable region for the case of a double zero and two negative eigenvalues

为了验证理论分析结果的有效性,我们对平均方程(4)进行数值分析.在稳定区域 I 中选取参数值 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0.002, 0.001, 0.003, 0.001)$ 和 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-0.5, 0.1)$, 我们得到图 6.从图 6 中可以观察到相空间中的轨线是周期轨线,因此轨线是稳定的周期轨道.同理,在不稳定区域 II 中选取参数值 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0.003, 0.001, -0.03, 0.001)$ 和 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0.5, -0.2)$, 得到图 7.根据图 7 可以观察到,轨线是从中心向外盘旋运动远离初始点,所以该轨线是不稳定的.

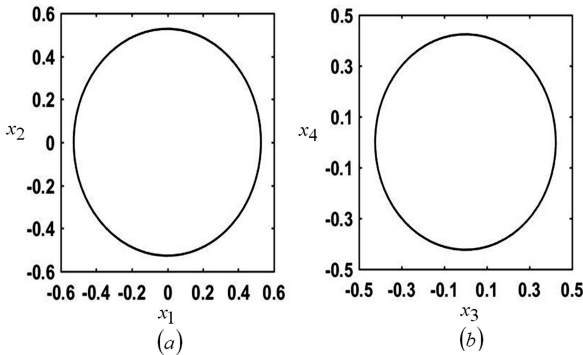


图 6 稳定区域内的轨迹
Fig.6 Trajectory of the stable region

2.2 双零和一对纯虚复数特征根

在本小节,我们研究特征多项式(6)在平衡点

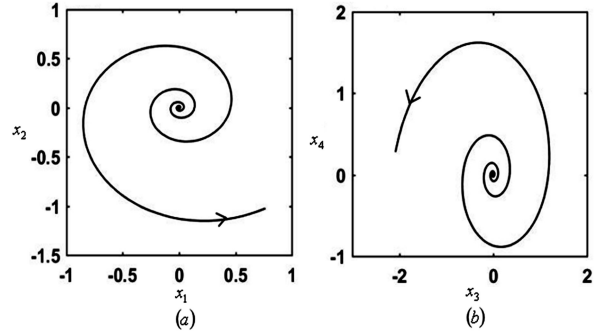


图 7 不稳定区域内的轨迹
Fig.7 Trajectory of the unstable region

处有双零和一对纯虚复数特征根的情况.为了便于分析,我们选取方程(4)中的参数如下: $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \gamma_{12} = \gamma_{22} = 1$.则方程(6)对应的特征多项式和特征根为:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2, \lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm i \quad (18)$$

选取 μ_1 和 μ_2 作为摄动参数,引入摄动变换 $\mu_1 = \varepsilon_1$ 和 $\mu_2 = \varepsilon_2$.将摄动变换代入 Jacobian 矩阵(5),则 Jacobian 矩阵(5)对应的特征多项式可以写成如下形式:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 \quad (19)$$

其中,

$$c_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (20a)$$

$$c_2 = \frac{1}{4}[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 4] \quad (20b)$$

$$c_3 = \frac{1}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2) \quad (20c)$$

$$c_4 = \frac{1}{16}[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2] \quad (20d)$$

根据 Routh-Hurwitz 判据可知,如果平衡点是稳定的,则需要满足如下条件:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0 \quad (21a)$$

$$\frac{1}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 3\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2) > 0 \quad (21b)$$

$$\frac{1}{16}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1)[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 4] > 0 \quad (21c)$$

从不等式(21)中可以观察到:当不等式(21c)成立时,不等式(21b)也一定成立.则根据不等式(21),我们可以定义稳定区域的临界曲线如下:

$$L_4: \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0 \quad (22a)$$

$$L_5: (\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1)[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 4] = 0 \quad (22b)$$

根据方程(22)可以得到平衡点的稳定性区域分布图,如图 8 所示.临界曲线 L_4 和 L_5 将平面 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 分成稳定区域和不稳定区域,其中 I 代表

稳定区域, II 代表不稳定区域.

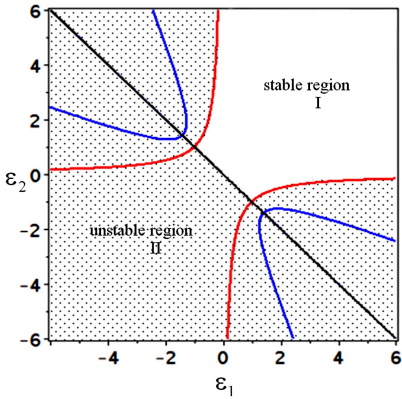


图 8 双零和一对纯虚复数特征根的稳定区域以及不稳定区域
Fig.8 Stable region and the unstable region for the case of a double zero and a pair of purely imaginary eigenvalues

同上,在不同的区域内选取不同的参数值验证理论分析.首先我们在稳定性区域 I 中选取参数值 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0.002, 0.001, 0.003, 0.001)$ 和 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-0.5, 0.1)$, 我们得到图 9. 从图 9 中可以明显观察到,相空间轨线从初始点逐渐盘旋趋于平衡点达到稳定状态.在不稳定区域 II 中选取参数值 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0.003, 0.001, -0.03, 0.001)$ 和 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0.5, -0.2)$, 得到图 10. 如图 10 所示,轨线从初始点起呈螺旋状向外运动,偏离初始点,轨线是不稳定的.

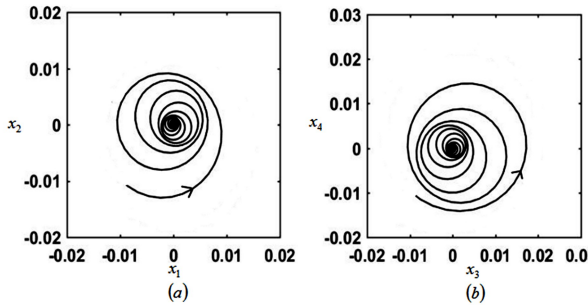


图 9 稳定区域内的轨迹
Fig.9 Trajectory of the stable region

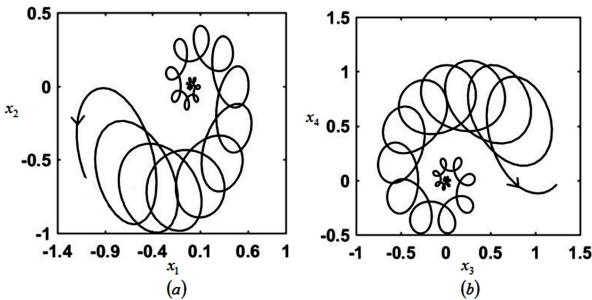


图 10 不稳定区域内的轨迹
Fig.10 Trajectory of the unstable region

3 结论

本文研究了 1:1 内共振情形下环形桁架天线的局部分岔问题,即平衡点附近的 1*.稳定性和非线性动力学行为.通过理论分析,我们得到了两种不同形式下平衡点的稳定区域以及不稳定区域,分别是平衡点为双零和两个负数特征根情形以及平衡点为双零和一对纯虚复数特征根情形.根据四维平均方程进行数值分析,选取不同的参数研究环形桁架天线系统的稳定性.在不同的区域内选取参数值,得到相应的相空间轨线图,轨线图进一步验证了数值计算和理论分析的一致性.通过所得到的数值计算和理论分析研究结果,可以优化环形桁架天线系统的结构设计以及调控系统参数,从而预防和避免环形桁架天线在运行中产生大幅振动.

参 考 文 献

- 1 Makarov A L, Khoroshilov V S, Zakrzhevskii A E. Spacecraft dynamics due to elastic ring antenna deployment. *Acta Astronautica*, 2011, 69(7): 691~702
- 2 Zhang W, Chen J, Sun Y. Nonlinear breathing vibrations and chaos of a circular truss antenna with 1:2 internal resonance. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, 26(5): 1650077
- 3 Sun Y, Zhang W, Yao M H. Multi-pulse chaotic dynamics of circular mesh antenna with 1:2 internal resonance. *International Journal of Applied Mechanics*, 2017, 9(4): 1750060
- 4 胡海岩,田强,张伟等.大型网架式可展开空间结构的非线性动力学与控制.力学进展,2013,43(4):390~414 (Hu H Y, Tian Q, Zhang W, et al. Nonlinear dynamics and control of large deployable space structures composed of trusses and meshes. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(4): 390~414 (in Chinese))
- 5 Gao X M, Jin D P, Hu H Y. Internal resonances and their bifurcations of a rigid-flexible space antenna. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, 94: 160~173
- 6 范震,郭翔鹰,张伟.大型空间环型天线结构动力学分析.动力学与控制学报,2016,14(1):41~47 (Fan Z, Guo X Y, Zhang W. Dynamics analysis of large deployable mesh antenna structure. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(1): 41~47 (in Chinese))
- 7 Yu P, Bi Q. Analysis of non-linear dynamics and bifurca-

- tions of a double pebdulum. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 217(4): 691~736
- 8 Zhang D M, Chen F Q. Stability and bifurcation of a cantilever functionally graded material plate subjected to transversal excitation. *Meccanica*, 2015, 50(6): 1403~1418
 - 9 Yu W Q, Chen F Q, Li N, et al. Stability and bifurcation dynamics for a nonlinear controlled system subjected to parametric excitation. *Archive Applied Mechanics*, 2016, 87(3): 479~487
 - 10 Zhang L, Chen F C. Stability and bifurcation for limit cycle oscillations of an airfoil with external store. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 10(1): 1403~1418
 - 11 Wei Z C, Pham V T, Kapitaniak T, et al. Bifurcation analysis and circuit realization for multiple-delayed Wang-Chen system with hidden chaotic attractors. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(3): 1635~1650
 - 12 Wei Z C, Yang Q G. Dynamical analysis of a new autonomous 3-D chaotic system only with stable equilibria. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, 12(1): 106~118
 - 13 Wei Z C, Zhang W. Hidden hyperchaotic attractors in a modified Lorenz-Stenflo system with only one stable equilibrium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, 24(10): 1450127
 - 14 Xu X, Hu H Y, Wang H L. Stability, bifurcation and chaos of a delayed oscillator with negative damping and delayed feedback control. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 49(49): 117~129

ANALYSIS ON STABILITY OF CIRCULAR MESH ANTENNA WITH 1:1 INTERNAL RESONANCE *

Sun Ying[†] Zhang Wei

(Beijing Key Laboratory of Nonlinear Vibrations and Strength of Mechanical Structures,
College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract The antenna is subjected to the complicated space environment, which results in nonlinear large amplitude vibration. These nonlinear vibrations severely affect the stability and performance of the structure. Due to the energy exchange between different modes, the circular mesh antenna is easier to produce complex internal resonance. The internal resonance plays a dominant role in large amplitude nonlinear vibrations of the circular mesh antenna. The circular mesh antenna is simplified as the equivalent circular cylindrical shell in this paper. According to the finite element analysis, it is possible that the 1:1 internal resonance between the fourth order mode and the fifth order mode of the circular mesh antenna occurs. Therefore, the local dynamics of the structure with 1:1 internal resonances are investigated by using theoretical analysis and numerical simulations. In this paper, the stability of the equilibrium point under small perturbations is studied. Two types of critical equilibrium points are considered, such as a double zero and two negative eigenvalues, as well as a double zero and a pair of purely imaginary eigenvalues. The stable regions and the unstable regions of the initial equilibrium point and the critical bifurcation curves are obtained by the center manifold theorem, nonlinear-transform and Routh-Hurwitz criterion. Base on the averaged equation of the circular mesh antenna, the trajectories of the initial equilibrium point are examined in order to verify theoretical results.

Key words circular mesh antenna, nonlinear vibration, dynamics behaviour, stability, local dynamic analysis

附录 A

方程(12)中的非线性项表达式如下:

$$\begin{aligned} Ng_1 = & -38y_1y_2y_4 + 2y_2y_3y_4 + 2y_1y_2y_3 + 4y_1y_3y_4 + \\ & 16y_2^3 + 2y_4^3 + \frac{17}{2}y_1^3 + \frac{13}{2}y_3^3 + 25y_1^2y_2 - \\ & 10y_1^2y_4 + 33y_1y_2^2 + 19y_1y_4^2 + 5y_2^2y_3 + \\ & y_2y_3^2 + 32y_2y_4^2 + 14y_3^2y_4 + 15y_3y_4^2 - \\ & 14y_2^2y_4 + \frac{23}{2}y_1^2y_3 + \frac{19}{2}y_1y_3^2 \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} Ng_2 = & -8y_1y_2y_4 + 32y_2y_3y_4 - 3y_1y_2y_3 - y_1y_3y_4 + \\ & y_2^3 - 13y_4^3 - 4y_1^3 - 6y_3^3 - \frac{15}{2}y_1^2y_2 - \\ & 7y_1y_2^2 - y_1y_4^2 - 15y_2^2y_3 - 29y_2^2y_4 - \\ & \frac{5}{2}y_1^2y_4 + \frac{17}{2}y_2y_3^2 + 17y_2y_4^2 - \frac{37}{2}y_3^2y_4 - \\ & 25y_3y_4^2 - 6y_1^2y_3 - 8y_1y_3^2 \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} Ng_3 = & -2y_1y_2y_4 + 38y_2y_3y_4 - 4y_1y_2y_3 - 2y_1y_3y_4 - \\ & 2y_2^3 - 16y_4^3 - \frac{13}{2}y_1^3 - 14y_1^2y_2 - y_1^2y_4 - \\ & 5y_1y_4^2 - 19y_2^2y_3 - 32y_2^2y_4 - \frac{17}{2}y_3^3 + \\ & 10y_2y_3^2 + 14y_2y_4^2 - 25y_3^2y_4 - 33y_3y_4^2 - \\ & \frac{19}{2}y_1^2y_3 - \frac{23}{2}y_1y_3^2 - 15y_1y_2^2 \end{aligned} \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} Ng_4 = & -32y_1y_2y_4 + 8y_2y_3y_4 + y_1y_2y_3 + 3y_1y_3y_4 + \\ & 13y_2^3 - y_4^3 + 6y_1^3 + 4y_3^3 + \frac{27}{2}y_1^2y_2 + \\ & 15y_1y_4^2 - 17y_2^2y_4 - \frac{77}{2}y_1^2y_4 + 25y_1y_2^2 + \\ & \frac{5}{2}y_2y_3^2 + 29y_2y_4^2 + \frac{15}{2}y_3^2y_4 + 7y_3y_4^2 + \\ & 8y_1^2y_3 + 6y_1y_3^2 + y_2^2y_3 \end{aligned} \quad (A4)$$

《动力学与控制学报》第四届编委会第一次会议纪要

2018年4月28日,《动力学与控制学报》第四届编委会在北京裕龙酒店召开了第一次编委会议。出席会议的有主编广西大学赵跃宇教授、副主编北京大学刘才山教授、石家庄铁道大学杨绍普教授,以及清华大学宝音贺西教授等23位编委专家和编辑部主要工作人员等。本次会议由主编赵跃宇教授主持,会议的主要议程包括:赵跃宇教授代表第三届编委会和编辑部向与会的新一届编委专家做学报工作汇报、第四届编委专家自我介绍、新一届编委会研讨《动力学与控制学报》未来发展方向和主要工作计划。

主编赵跃宇教授代表第三届编委会和学报编辑部向与会编委汇报了《动力学与控制学报》近年来的发展概况:首先从学报的创刊、学报被中国科技核心数据库收录,从季刊到双月刊等方面简要介绍了《动力学与控制学报》的发展历程;从胡海岩院士投稿、知名专家(梅凤翔教授和刘延柱教授等)撰稿、到黄志龙教授和刘才山教授组织专刊,以及各编委利用学术会议进行学报宣传等方面简要介绍了第三届编委会的主要工作;其次从近年编辑部工作流程的改进、学报退稿率、语言文字和格式排版质量、开发微信公众平台服务、利用学术会议宣传学报等方面介绍了编辑部狠抓学术质量、出版质量和服务质量的相关工作;从学报在动力学与控制学科外的其它领域认知度有限、论文总被引用频次偏低、优秀稿源数量有待进一步提高等方面深入分析了目前学报的不足;最后,根据新一届编委会的优势(青年编委专家增多),并结合学报的发展不足,从期刊撰稿、审稿、学报宣传等方面对新一届编委会提出了新的要求和希望。

为便于新一届编委会工作的顺利开展,增强学报凝聚力,参会的编委专家对各自研究方向、职务等进行了简要介绍。

会议第三项议程是新一届编委会专家研讨学报的发展规划,为学报发展献计献策:刘才山教授提出学报要根据国家目前重点发展方向、结合重大需求组织专刊;杨绍普教授指出在组织专刊的同时,可从扩刊或增加每期稿件数量等方面进一步扩大期刊的发稿量;郭永新教授提出要多刊综述性论文,建议每期刊发一篇;韩旭教授认为进一步提高稿源质量是关键;张琪昌教授指出尽早进入相关数据库索引(CSCD、北大核心和EI)是扩大期刊影响的捷径;王琪教授指出印刷质量和论文格式、特别是摘要一定要严格按照EI期刊摘要要求修改;江俊教授指出编委专家亲自撰稿是提高论文质量的现实途径;宝音贺西教授指出期刊要发表系统性的工作,提高论文质量的同时可以适当降低论文数量;王青云教授指出编辑部需要加强论文分类和服务编委的相关工作;龚自正教授指出期刊要与学会和相关专家联合办会,以扩大期刊的影响;韩清凯教授建议拓展期刊论文的学科领域以扩大期刊的影响;兰旭光教授和杨晓东教授建议缩短审稿时间,提高期刊论文出版时效;田强教授指出增加一年一度的优秀作者和优秀审稿人的评选;胡伟鹏教授和张舒教授建议以行业发展和科学基金为导向,报道最新科研成果;丁虎教授建议刊发研究简报。针对编委专家提出的有关编辑部工作职责问题,编辑部主任康厚军副教授代表编辑部做了一一回应,并承诺编辑部将积极服务学报发展和新一届编委会。

最后,主编赵跃宇教授对各编委的建议进行了总结,从国家科技战略、动力学与控制学科发展、中文期刊发展方向和本刊的责任,进一步给新一届编委会和编辑部明确了责任和目标。

《动力学与控制学报》编辑部

2018年5月10日