第 16 卷第 3 期 2018 年 6 月
1672-6553/2018/16(3)/211-6
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.16 No.3
Jun. 2018

含微结构二维固体中非对称孤立波的存在条件*

王德鑫　那仁满都拉†

（内蒙古民族大学物理与电子信息学院，通辽　028043）

摘要　根据 Mindlin 微结构理论重新推导了含微结构的二维固体中孤立波传播的控制方程.利用行波变换,把复杂的非线性偏微分方程组简化为一非线性常微分方程.最后用动力系统定性分析理论,分析了含微结构的二维固体中孤立波的存在条件及其几何特性,证明了当介质中的某些参数满足适当条件时,在含微结构的二维固体中可以存在一种非对称孤立波.

关键词　微结构二维固体，　孤立波，　存在条件

DOI：　10.6052/1672-6553-2017-078

引言

随着科学技术的发展,非线性物理在实际应用中越来越受到重视,孤立波作为非线性物理的一个重要分支也体现出了很高的研究价值.近年来人们研究发现微结构固体中传播的孤立波对微结构固体材料的无损检测具有重要意义.由于受科学技术手段的限制,在高维系统中孤立波的形成与传播问题的研究具有相当的难度,因此大部分研究都集中在一维情况下的控制方程[1-7].文献[8]中通过计算,给出了一维场中的孤立波传播模型,并说明该系统所描述的孤立波具有非对称的结构特点.文献[9]利用平面动力系统定性分析的方法,证明在微结构固体中当介质中的参数和孤立波的速度满足一定条件下,受微尺度非线性效应的影响可以形成非对称和对称的孤立波. 文献[10]推导出了二维 Mindlin 介质中波传播的控制方程,在不同初始条件下,利用数值模拟的方法给出了相应结果.

本文首先依据文献[10]的研究工作,并根据 Mindlin 微结构理论重新推导含微结构的二维固体中波传播的控制方程.然后利用行波变换,把复杂的非线性偏微分方程组简化为一非线性常微分方程.最后利用相图分析方法和数值方法对孤立波的存在条件进行讨论、分析和验证.

1　控制方程

依据文献[10]的研究,对含微结构的二维固体控制方程的建立要基于两个向量场,即宏观位移向量 $\boldsymbol{U}(x,y,t)=u(x,y,t)\boldsymbol{i}+v(x,y,t)\boldsymbol{j}$ 和微观形变向量 $\boldsymbol{\Theta}(x,y,t)=\psi(x,y,t)\boldsymbol{i}+\varphi(x,y,t)\boldsymbol{j}$,其中 x,y 是空间坐标,t 是时间.本文只考虑正应变,忽略微观层面上的剪切应变.因此,微结构固体中纵波传播的二维运动方程为[10]：

$$\rho\boldsymbol{U}_{tt}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}$$
$$I\boldsymbol{\Theta}_{tt}=\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\tau}\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{U}$ 表示宏观位移,$\boldsymbol{\sigma}$ 表示宏观应力,$\boldsymbol{b}$ 表示外部体力,$\boldsymbol{\Theta}$ 表示微形变,$\boldsymbol{\eta}$ 表示微观应力,$\boldsymbol{\tau}$ 表示相互作用力,ρ 和 I 分别表示的宏观质量密度和微惯性,它们可分别表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial W}{\partial u_x} & \dfrac{\partial W}{\partial u_y}\\[2ex] \dfrac{\partial W}{\partial v_x} & \dfrac{\partial W}{\partial v_y}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial W}{\partial u}\\[2ex] -\dfrac{\partial W}{\partial v}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial W}{\partial \psi_x} & \dfrac{\partial W}{\partial \psi_y}\\[2ex] \dfrac{\partial W}{\partial \varphi_x} & \dfrac{\partial W}{\partial \varphi_y}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial W}{\partial \psi}\\[2ex] -\dfrac{\partial W}{\partial \varphi}\end{pmatrix}$$

方程(1)所描述系统的动能是通过式 $T=\rho/2(u_t^2+v_t^2)+l/2(\psi_t^2+\varphi_t^2)$ 获得,自由能函数 W 的变化取决

2016-08-30 收到第 1 稿,2016-12-27 收到修改稿.
* 国家自然科学基金(11462019)
† 通讯作者 E-mail:nrmdlbf@126.com

于宏观位移 u,v 的局部空间导数,微形变 ψ,φ 以及微形变的一阶导数.因此,设自由能具有以下形式

$$W=\frac{1}{2}(A_1u_x^2+A_2u_y^2+A_3\psi_x^2+A_4\psi_y^2+A_5\psi^2)+\frac{1}{2}(B_1v_x^2+B_2v_y^2+B_3\varphi_x^2+B_4\varphi_y^2+B_5\varphi^2)+\frac{1}{2}(C_1(u_xv_y+v_xu_y)+C_2(\psi_x\varphi_y+\varphi_x\psi_y))+A_6u_x\psi+A_7u_y\varphi+B_6v_x\varphi+B_7v_y\psi+\frac{1}{6}(D_1u_x^3+D_2\psi_x^3) \tag{2}$$

利用自由能函数,计算出 σ,b,η 和 τ,并代入运动方程(1)可得:

$$\begin{cases}\rho u_{tt}=A_1u_{xx}+A_2u_{yy}+C_1v_{xy}+A_6\psi_x+A_7\varphi_y+\frac{D_1}{2}(u_x^2)_x,\\ \rho v_{tt}=B_1v_{xx}+B_2v_{yy}+C_1u_{xy}+B_6\varphi_x+B_7\psi_y,\\ I\psi_{tt}=A_3\psi_{xx}+A_4\psi_{yy}+C_2\varphi_{xy}-A_6u_x-B_7v_y-A_5\psi+\frac{D_2}{2}(\psi_x^2)_x,\\ I\varphi_{tt}=B_3\varphi_{xx}+B_4\varphi_{yy}+C_2\psi_{xy}-B_6v_x-A_7u_y-B_5\varphi,\end{cases} \tag{3}$$

为了把方程组(3)无量纲化,引入无量纲变量:

$$x=LX,y=LY,u=LU,v=LV,t=LT/c_0,\quad \delta=l^2/L^2 \tag{4}$$

这时方程组(3)变为下列无量纲方程:

$$\begin{aligned}&U_{TT}=a_1U_{XX}+b_1U_{YY}+\lambda_0V_{XY}+c_1\psi_X+d_1\varphi_Y+\frac{\mu_0}{2}(U_X^2)_X\\&V_{TT}=a_2V_{XX}+b_2V_{YY}+\lambda_0U_{XY}+c_2\varphi_X+d_2\psi_Y,\\&\delta\psi_{TT}=\delta a_3\psi_{XX}+\delta b_3\psi_{YY}+\delta\lambda_1\varphi_{XY}-c_3U_X-d_3V_Y-e_1\psi+\delta^{\frac{2}{3}}\frac{\mu_1}{2}(\psi_X^2)_X\\&\delta\varphi_{TT}=\delta a_4\varphi_{XX}+\delta b_4\varphi_{YY}+\delta\lambda_1\psi_{XY}-c_4V_X-d_4U_Y-e_2\varphi,\end{aligned} \tag{5}$$

其中的系数通过计算可以得到,部分系数关系如下:

$$a_1=A_1/\rho c_0^2,b_1=A_2/\rho c_0^2,\lambda_0=C_1/\rho c_0^2,\quad e_2=B_5/(I*\rho c_0^2) \tag{6}$$

分别把 ψ 和 φ 按照 $\delta^{1/2}$ 的幂级数展开,再利用从属原理[11]可得到:

$$\psi\approx-\frac{1}{e_1}(c_3U_X+d_3V_Y)+\frac{\delta}{e_1}\{\frac{1}{e_1}(c_3U_X+d_3V_Y)_{TT}-\frac{a_3}{e_1}(c_3U_X+d_3V_Y)_{XX}-\frac{b_3}{e_1}(c_3U_X+d_3V_Y)_{YY}-\frac{\lambda_1}{e_2}(c_4V_X+d_4U_Y)_{XY}\}+\frac{\delta^{3/2}\mu_1}{e_1^3}(((c_3U_X+d_3V_Y)_X)^2)_X \tag{7}$$

$$\varphi\approx-\frac{1}{e_2}(c_4V_X+d_4U_Y)+\frac{\delta}{e_2}\{\frac{1}{e_2}(c_4V_X+d_4U_Y)_{TT}-\frac{a_4}{e_2}(c_4V_X+d_4U_Y)_{XX}-\frac{b_4}{e_2}(c_4V_X+d_4U_Y)_{YY}-\frac{\lambda_1}{e_1}(c_3U_X+d_3V_Y)_{XY}\} \tag{8}$$

把(7)和(8)式代入方程(5),并忽略高阶小项,可得到关于位移 U 和 V 的控制方程

$$\begin{aligned}&U_{TT}=(a_1-\frac{c_1c_3}{e_1})U_{XX}+(b_1-\frac{d_1d_4}{e_2})U_{YY}+(\lambda_0-\frac{c_1d_3}{e_1}-\frac{c_4d_1}{e_2})V_{XY}+\frac{\mu_0}{2}(U_X^2)_X+\frac{\delta c_1c_3}{e_1^2}U_{XXTT}-\frac{\delta a_3c_1c_3}{e_1^2}U_{XXXX}+\frac{\delta^{3/2}\mu_1c_1c_3{}^2}{2e_1^3}((U_{XX})^2)_{XX}\\&V_{TT}=(a_2-\frac{c_2c_4}{e_2})V_{XX}+(\lambda_0-\frac{c_3d_2}{e_1}-\frac{c_2d_4}{e_2})U_{XY}\end{aligned} \tag{9}$$

2 行波变换

对控制方程(9)进行如下行波变换:

$$V(x,y,t)=v(k_1x+k_2y-\omega t),$$
$$U(x,y,t)=u(k_1x+k_2y-\omega t),$$
$$\xi=k_1x+k_2y-\omega t$$

则方程(9)变为:

$$Au_{\xi\xi}+Bv_{\xi\xi}+C(u_\xi^2)_\xi+Du_{\xi\xi\xi\xi}+E((u_{\xi\xi})^2)_{\xi\xi}=0,$$
$$v_{\xi\xi}=Fu_{\xi\xi}$$

其中:$A=k_1^2(a_1-\frac{c_1c_3}{e_1})+k_2^2(b_1-\frac{d_1d_4}{e_2})-\omega^2$,

$$B=k_1k_2(\lambda_0-\frac{c_1d_3}{e_1}-\frac{c_4d_1}{e_2}),$$

$$C=k_1^3\frac{\mu_0}{2},$$

$$D=k_1^2\omega^2(\frac{\delta c_1c_3}{e_1^2})-k_1^4(\frac{\delta a_3c_1c_3}{e_1^2}),$$

$$E=k_1^6(\frac{\delta^{3/2}\mu_1c_1c_3{}^2}{2e_1^3}),$$

$$F=k_1k_2(\lambda_0-\frac{c_3d_2}{e_1}-\frac{c_2d_4}{e_2})\Big/\left[\omega^2-k_1^2(a_2-\frac{c_2c_4}{e_2})\right].$$

整理得:

$$\alpha_1u_{\xi\xi}+(u_\xi{}^2)_\xi+\alpha_2(u_{\xi\xi}^2)_{\xi\xi}+\alpha_3u_{\xi\xi\xi\xi}=0 \tag{10}$$

式中 $\alpha_1=(A-BF)/C$, $\alpha_2=E/C$, $\alpha_3=D/C$. 对方程(10)做变换 $u_\xi=\omega$,再对 ξ 积分一次可得:

$$\omega^2+\alpha_1\omega+2\alpha_2\omega_\xi\omega_{\xi\xi}+\alpha_3\omega_{\xi\xi}=0 \tag{11}$$

求出方程(11)的精确解比较困难,故先求出微尺度非线性效应为零(即 $\alpha_2=0$)时的精确解. 利用求解非线性方程的函数展开方法,求解可得

$$\omega=A_0-\left(\frac{3}{2}\alpha_1+3A_0\right)\cdot\operatorname{sech}^2(K\cdot\xi) \tag{12}$$

这里 $K=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\alpha_1+2A_0}{\alpha_3}}$, $A_0=0$ 或 $-\alpha_1$. 解(12)表明,不考虑微尺度非线性效应时,在含微结构的二维固体中可存在一种对称钟型孤立波. 若考虑微尺度非线性效应,在含微结构的二维固体中所形成的孤立波的形状特征,可以与孤立波解(12)进行比较分析.

3　含微结构二维固体中非对称孤立波的存在条件及证明

令 $\omega=x$, $x_\xi=y$ 以把上述方程(11)改写为下面的平面系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\xi}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{d\xi}=-\dfrac{x^2+\alpha_1x}{2\alpha_2y+\alpha_3}\end{cases} \tag{13}$$

为了避免该系统中的奇直线 $y=-\alpha_3/2\alpha_2$ 对相图分析带来的困难,做如下变换:

$$d\xi=(2\alpha_2y+\alpha_3)d\tau$$

在此变换下,系统(13)就变成二维 Hamilton 系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=y(2\alpha_2y+\alpha_3)\\[2mm]\dfrac{dy}{d\tau}=-x^2-\alpha_1x\end{cases} \tag{14}$$

对系统(14)进行首次积分,得到相应的 Hamilton 函数:

$$H(x,y)=\frac{1}{2}\alpha_3y^2+\frac{2}{3}\alpha_2y^3+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\alpha_1x^2=h \tag{15}$$

在拓扑意义下,除奇直线外,系统(13)和系统(14)有相同的相图,所以只需要研究系统(14)相图就可以了解系统(13)的相图分布. 可知系统(14)有下列几个平衡点:$(0,0)$, $(-\alpha_1,0)$, $(0,-\alpha_3/2\alpha_2)$和$(-\alpha_1,-\alpha_3/2\alpha_2)$. 设 $E(x,y)$为系统的任一平衡点,$J(x,y)$表示系统(14)在平衡点 $E(x,y)$处的 Jacobi 行列式的取值,该点的系数行列式用 $M(x,y)$表示,则:

$$J(x,y)=\det M(x,y)=(2x+\alpha_1)(4\alpha_2y+\alpha_3)$$

平面动力系统的定性分析理论表明,对于任意平衡点 $E(x,y)$而言,当 $J(x,y)<0$ 时,平衡点 $E(x,y)$是鞍点;当 $J(x,y)>0$ 且迹 $T(M(x,y))=0$ 时,平衡点 $E(x,y)$是中心点;当 $J(x,y)=0$ 且其 Poincare 指数为零时,平衡点 $E(x,y)$是尖点. 下面按 A_0 的不同取值,分两种情况讨论:

情况 1　在 $A_0=0$ 的情况下,当 α_1 与 α_3 异号时平衡点$(-\alpha_1,-\alpha_3/2\alpha_2)$和$(0,0)$是鞍点,$(-\alpha_1,0)$和$(0,-\alpha_3/2\alpha_2)$是中心点. 此时,通过相图分析可以得出以下结论:

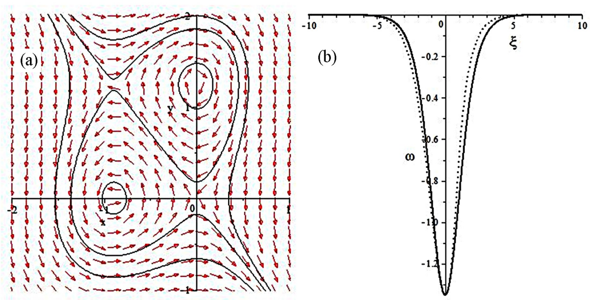

图 1　系统相图与非对称孤立波解

(a)当 $\alpha_1=0.9$、$\alpha_2=0.2$、$\alpha_3=-0.5$ 时系统(13)的相图和(b)存在微尺度非线性效应时的孤立波(实线)与孤立波(12)(点线)的比较

Fig.1　Phase diagram of system and asymmetric solitary wave solution

(a) Phase diagram of system (13) when $\alpha_1=0.9$, $\alpha_2=0.2$, $\alpha_3=-0.5$; (b) Comparison of formed solitary wave presence of microscale nonlinear effect (solid line) and solitary wave (12) (dotted line)

1)由相图 1(a)可以看出,当 $A_0=0$, $\alpha_1>0$, $\alpha_3<0$ 时,相平面上存在一条不被奇直线分割的同宿轨道,这就是从鞍点$(0,0)$出发围绕中心点$(0,-\alpha_3/2\alpha_2)$又回到该鞍点的同宿轨道. 它存在于 y 轴的左侧,对 x 轴非对称. 这条同宿轨道可以无限接近于另一个在奇直线上的鞍点$(-\alpha_1,-\alpha_3/2\alpha_2)$,可是不能通过该点. 假设在极限情况下通过该鞍点,将鞍点坐标代入同宿轨道方程可以得出 $\alpha_2=\pm\frac{1}{2}\frac{(-\alpha_1\cdot\alpha_3)^{1/2}\alpha_3}{\alpha_1{}^2}$. 这表明此同宿轨道存在时要满足的条件为:

$$-\frac{1}{2}\frac{(-\alpha_1\cdot\alpha_3)^{1/2}\alpha_3}{\alpha_1{}^2}<\alpha_2<\frac{1}{2}\frac{(-\alpha_1\cdot\alpha_3)^{1/2}\alpha_3}{\alpha_1{}^2}$$

由动力系统的同宿轨道与偏微分方程的孤立波解之间的关系可知，此同宿轨道是满足边界条件 $|\xi|\to\infty$，$\omega,\omega_\xi,\omega_{\xi\xi}\to 0$ 的钟型孤立波解.因此，可得到下面的结论 1.

结论 1 当 $A_0=0,\alpha_1>0,\alpha_3<0$，且 α_2 满足 $-\frac{1}{2}\frac{(-\alpha_1\cdot\alpha_3)^{1/2}\alpha_3}{\alpha_1{}^2}<\alpha_2<\frac{1}{2}\frac{(-\alpha_1\cdot\alpha_3)^{1/2}\alpha_3}{\alpha_1{}^2}$ 时，在含微结构的二维固体中存在一种满足边界条件 $|\xi|\to\infty$，$\omega,\omega_\xi,\omega_{\xi\xi}\to 0$ 的非对称孤立波.这种非对称孤立波是由于二维微结构中微尺度非线性效应的存在而破坏原本的平衡，并重新建立平衡后形成的新孤立波.图 1(b)中给出的数值计算的结果证实了这一结论.从图 1(b)中可以清晰的看出，在微尺度非线性效应的影响下所形成的孤立波是一种反钟型孤立波，具有明显的非对称性.

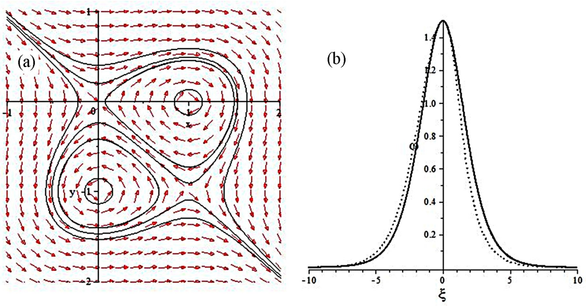

图 2 系统相图与非对称孤立波解

(a)当 $\alpha_1=-1$、$\alpha_2=0.6$、$\alpha_3=1.2$ 时系统(13)的相图和(b)存在微尺度非线性效应时的孤立波(实线)与孤立波(12)(点线)的比较

Fig.2 Phase diagram of system and asymmetric solitary wave solution

(a) Phase diagram of system (13) when $\alpha_1=-1$、$\alpha_2=0.6$、$\alpha_3=1.2$;

(b) Comparison of formed solitary wave presence of microscale nonlinear effect (solid line) and solitary wave(12) (dotted line)

2)由相图 2(a)可以看出，当 $A_0=0,\alpha_1<0,\alpha_3>0$ 时，在相平面上同样存在一条不被奇直线分割的同宿轨道.它是从鞍点(0,0)出发，绕中心点$(0,-\alpha_3/2\alpha_2)$又回到鞍点的同宿轨道.它位于 y 轴的右侧，相对 x 轴也是非对称的.同理可得这一同宿轨道存在时需要满足的条件：

$$-\frac{1}{2}\frac{(-\alpha_1\cdot\alpha_3)^{1/2}\alpha_3}{\alpha_1{}^2}<\alpha_2<\frac{1}{2}\frac{(-\alpha_1\cdot\alpha_3)^{1/2}\alpha_3}{\alpha_1{}^2}.$$

同样，根据平面动力系统同宿轨道与偏微分方程的解之间的对应关系可得到结论 2.

结论 2 当 $A_0=0,\alpha_1<0,\alpha_3>0$，且 α_2 满足：$-\frac{1}{2}\frac{(-\alpha_1\cdot\alpha_3)^{1/2}\alpha_3}{\alpha_1{}^2}<\alpha_2<\frac{1}{2}\frac{(-\alpha_1\cdot\alpha_3)^{1/2}\alpha_3}{\alpha_1{}^2}$ 时，在含微结构的二维固体中存在一种满足边界条件 $|\xi|\to\infty$，$\omega,\omega_\xi,\omega_{\xi\xi}\to 0$ 的非对称钟型称孤立波.从图 2(b)中给出的数值计算的结果同样可以看出这一结论.

3)由平面动力系统的定性分析理论可知，在其他条件下，在含微结构的二维固体中不可能存在满足边界条件 $|\xi|\to\infty$，$\omega,\omega_\xi,\omega_{\xi\xi}\to 0$ 的孤立波.

情况 2 在 $A_0=-\alpha_1$ 的情况下，当 α_1 与 α_3 同号时平衡点$(0,-\alpha_3/2\alpha_2)$和$(-\alpha_1,0)$是鞍点，$(-\alpha_1,-\alpha_3/2\alpha_2)$和(0,0)是中心点. 此时，通过分析相图结构可得出以下结论：

1)由相图 3(a)可以看出，当 $\alpha_1>0,\alpha_3>0$ 时，相平面上存在一条从鞍点$(0,-\alpha_3/2\alpha_2)$出发绕中心点(0,0)又回到该鞍点且不被奇直线分割的同宿轨道，它存在于原点周围，与 x 轴非对称.此同宿轨道存在时所要满足的条件是：

$$-\frac{1}{2}(\alpha_3/\alpha_1)^{3/2}<\alpha_2<\frac{1}{2}(\alpha_3/\alpha_1)^{3/2}.$$

因此，可得到如下结论：

结论 3 当 $A_0=-\alpha_1,\alpha_1>0,\alpha_3>0$，且 α_2 满足 $-\frac{1}{2}(\alpha_3/\alpha_1)^{3/2}<\alpha_2<\frac{1}{2}(\alpha_3/\alpha_1)^{3/2}$ 时，在含微结构的二维固体中存在一种满足边界条件 $|\xi|\to\infty$，$\omega\to A_0,\omega_\xi,\omega_{\xi\xi}\to 0$ 的非对称孤立波.同样从图 3(b)中的数值计算结果得到验证.

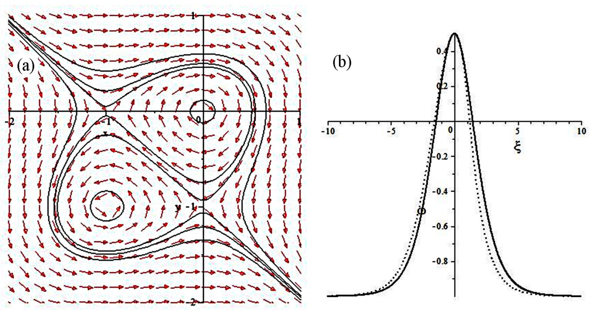

图 3 系统相图与非对称孤立波解

(a)当 $\alpha_1=1$、$\alpha_2=0.6$、$\alpha_3=1.2$ 时系统(13)的相图和(b)存在微尺度非线性效应时的孤立波(实线)与孤立波(12)(点线)的比较

Fig.3 Phase diagram of system and asymmetric solitary wave solution

(a) Phase diagram of system (13) when $\alpha_1=1$、$\alpha_2=0.6$、$\alpha_3=1.2$;

(b) Comparison of formed solitary wave presence of microscale nonlinear effect (solid line) and solitary wave(12) (dotted line)

2)由相图 4(a)可以看出,当 $\alpha_1<0,\alpha_3<0$ 时,相平面上在原点周围同样存在一条不被奇直线分割、与 x 轴非对称的同宿轨道.这就是从鞍点 $(0,-\alpha_3/2\alpha_2)$ 出发绕中心点(0,0)又回到该鞍点的同宿轨道.此同宿轨道存在时要满足的条件是 $-\frac{1}{2}(\alpha_3/\alpha_1)^{3/2}<\alpha_2<\frac{1}{2}(\alpha_3/\alpha_1)^{3/2}$.

于是,可得到结论 4.

结论 4　当 $A_0=-\alpha_1,\alpha_1<0,\alpha_3<0$,且 α_2 满足 $-\frac{1}{2}(\alpha_3/\alpha_1)^{3/2}<\alpha_2<\frac{1}{2}(\alpha_3/\alpha_1)^{3/2}$ 时,在含微结构的二维固体中存在一种满足边界条件 $|\xi|\to\infty$, $\omega\to A_0,\omega_\xi,\omega_{\xi\xi}\to 0$ 的非对称孤立波.从图 4(b)中给出的数值计算的结果进一步证实了这一结论.

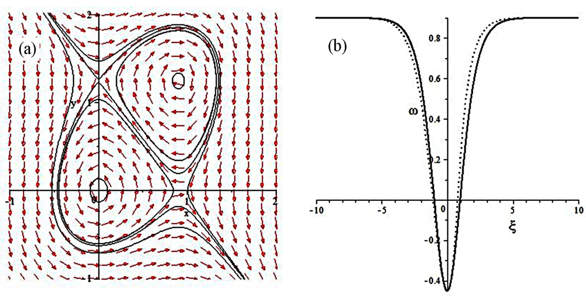

图 4　系统相图与非对称孤立波解

(a)当 $\alpha_1=-0.9$、$\alpha_2=0.2$、$\alpha_3=-0.5$ 时系统(13)的相图和(b)存在微尺度非线性效应时的孤立波(实线)与孤立波(12)(点线)的比较

Fig.4　Phase diagram of system and asymmetric solitary wave solution

(a) Phase diagram of system (13) when $\alpha_1=-0.9$、$\alpha_2=0.2$、$\alpha_3=-0.5$; (b) Comparison of formed solitary wave presence of microscale nonlinear effect (solid line) and solitary wave(12) (dotted line)

3)由平面动力系统的定性分析理论可知,在其他条件下,在含微结构的二维固体中不可能存在满足边界条件:$|\xi|\to\infty$, $\omega\to A_0,\omega_\xi,\omega_{\xi\xi}\to 0$ 的孤立波.

4　结论

本文在文献[10]工作的基础上,根据 Mindlin 微结构理论重新建立了含微结构的二维固体中波传播的控制方程.利用行波变换,把复杂的非线性偏微分方程组简化为一非线性常微分方程,并利用动力系统的定性分析方法和数值方法,分析了含微结构的二维固体中孤立波的存在条件和几何特征,进而证明了在适当条件下含微结构的二维固体中可以形成非对称的钟型孤立波和非对称的反钟型孤立波.含微结构的二维固体中非对称钟型孤立波的存在,对于微结构固体材料的无损检测提供了更具实际的理论依据,进一步增强了孤立波可用于对固体材料进行无损检测的可能性[12,13].

参　考　文　献

1　Eringen A C, Suhubi E S. Nonlinear theory of simple microelastic solids I. *International Journal of Engineering Science*, 1964, 2(2): 189~203

2　Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, 16: 51~78

3　程昌钧. 理性力学在中国的传播与发展. 力学与实践, 2008, 30(1): 10~17 (Cheng C J. The dissemination and development of rational mechanics in China. *Mechanics in Engineering*, 2008, 30(1): 17~10 (in Chinese))

4　高翔, 化存才, 胡东坡. 时变系数下耦合 KdV 和 Burgers 方程组的孤波解. 动力学与控制学报, 2014, 12(4): 295~303 (Gao X, Hua C C, Hu D P. Solitary wave solutions for coupled KdV-Burgers equations with variable coefficients. *Journal of Dynamics and Control*, 2014, 12(4): 295~303 (in Chinese))

5　戴天民. 对带有微结构的弹性固体理论的再研究. 应用数学和力学, 2002, 23(8): 771~777 (Dai T M. Restudy of theories for elastic solids with microstructure. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 23(8): 771~777 (in Chinese))

6　Kadomtsev B B, Petviashvili V I. On the stability of solitary waves in weakly dispersive media. *Soviet physics Doklady*, 1970, 192(6): 539~541

7　Rudenko O V. The 40th anniversary of the Khohklov-Zabolotskaya equation. *Acoustical Physics*, 2010, 56 (4): 457~466

8　Randruut M, Braun M. On one-dimensional solitary waves in microstructured solids. *Wave Motion*, 2010, 47: 217~230

9　那仁满都拉. 微结构固体中的孤立波及其存在条件. 物理学报, 2014, 63(19): 154~162 (Naranmandula. Solitary wave and thier existence conditions in microstructured solids. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(19): 154~162 (in Chinese))

10　Sertakov I, Engelbrecht J, Janno J. Modelling 2D wave motion in microstructured solids. *Mechanics Research Communications*, 2014, 56(2): 42~49

11　Janno J, Engelbrecht J. Inverse problems related to a coupled system of microstructure. *Inverse Problems*, 2008, 24(4):5017~5032

12 韩元春,那仁满都拉,额尔敦仓. 带强迫项的变系数KdV方程的多孤立波解及其应用. 动力学与控制学报,2011,9(2):143~146 (Han Y C, Naranmandula, Ereduncang. Multiple solitary waves solution of variable coefficients Kdv equation with forcing term and ITS application. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(2):143~146 (in Chinese))

13 那仁满都拉,额尔敦仓. 立方非线性微结构固体中的对称孤立波及存在条件. 应用数学和力学,2014,35(11):1210~1217 (Naranmandula, Ereduncang. Symmetric solitary waves and their existence conditions in cubic nonlinear microstructured solids. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(11):1210~1217 (in Chinese))

ASYMMETRIC SOLITARY WAVES AND THEIR EXISTENCE CONDITIONS IN 2D SOLIDS WITH MICROSTRUCTURES *

Wang Dexin Naranmandula†

(*College of Physics and Electronics*, *Inner Mongolia University for Nationalities*, *Tongliao* 028043, *China*)

Abstract The governing equations of the propagation of solitary waves are reformulated in two-dimensional microstructures solids through the Mindlin theory. And by using the traveling wave transformation, the complicated nonlinear partial differential equations are then simplified to a nonlinear ordinary differential equation. Finally, using the qualitative analysis theory of the dynamical systems, the existence conditions and geometrical characteristics of the solitary waves in two-dimensional microstructure solids were analyzed. They can form an asymmetric solitary wave in the two-dimensional microstructure solids, when the medium parameters satisfy certain appropriate conditions.

Key words 2D solids with microstructures, solitary wave, existence condition

Received 30 August 2016, revised 27 December 2016.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11462019).

† Corresponding author E-mail: nrmdlbf@126.com