

# 一类金融系统的分岔分析与混沌\*

王晶因<sup>†</sup> 吕静 李想

(哈尔滨理工大学应用数学系, 哈尔滨 150080)

**摘要** 将金融系统中的价格指数前的固定常数系数改进为弹性系数. 利用 Routh-Hurwitz 定理和分岔定理, 讨论了该弹性系数对改进后的金融系统的平衡点稳定性, Pitchfork 分岔, Hopf 分岔及混沌的影响. 运用 Matlab 进行数值模拟, 验证了所得到的理论结果. 并给出参数变化时利率振幅的变化图和对应的相图, 直观地展示了金融系统的稳定状态、周期状态及混沌状态的规律.

**关键词** 金融系统, pitchfork 分岔, Hopf 分岔, 混沌

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-086

## 引言

金融系统是有关资金流动、集中和分配的一个体系, 包括股票、债券和其他证券的市场, 还包括银行和保险公司等金融中介机构. 物价结构、供求关系与利率等因素的相互影响, 使得很多金融问题变得复杂, 如金融市场常会出现停滞、失控、甚至引发金融危机等现象. 面对复杂的金融系统, 深入地研究其内部结构, 揭示金融系统发展规律和控制系统的混沌状态, 这显得尤为重要. 很多学者已经研究了一些非线性金融学模型(如 Goodwins<sup>[1]</sup> 非线性加速模型, 利率与收入动态 IS-LM 模型<sup>[2]</sup>, 混沌金融系统数学模型<sup>[3-11]</sup>), 其中研究较多的金融模型为一类混沌金融系统<sup>[3,4]</sup>, 其数学表达式如下

$$\begin{cases} x' = z + (y - a)x \\ y' = 1 - by - x^2 \\ z' = -x - cz \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x$  代表利率,  $y$  代表投资需求,  $z$  代表价格指数,  $a$  表示储蓄量,  $b$  表示单位投资成本,  $c$  表示商品需求弹性. 影响  $x$  变化的因素主要有两个方面: 一方面来自投资市场的供求矛盾, 即投资和储蓄之差; 另一方面来自物价的结构调整.  $y$  的变化率与投资率成正比, 与投资成本和利率成反比.  $z$  的变化一方面受商品市场供求矛盾的调节, 另一方面又受通货膨胀率的影响.

文献[3,4]研究了混沌金融系统(1)的参数与 Hopf 分岔之间的关系以及分岔混沌拓扑结构与全局复杂性的关系. 文献[5]研究了该系统的控制问题. 文献[6]研究了当储蓄量为  $a = 0.9$ , 投资成本为  $b = 0.2$ , 商品需求弹性为  $c = 1.2$  时的金融系统(1)的线性、加速、双周期函数的反馈控制. 文献[7]研究了系统(1)的分支与拓扑马蹄. Holyst 和 Urbanowicz<sup>[8]</sup> 指出, 通过时滞反馈控制方法可以将模型(1)出现的混沌状态控制成为一个稳定的周期解. 因此, 文献[9]讨论了该时滞反馈系统的 Hopf 分岔的条件. 文献[10]在此基础上, 考虑了时滞反馈项  $K[y(t) - y(t - \tau)]$ , 对于系统(1)中  $y$  的变化率的影响, 并给出时滞系统经历 Hopf-pitchfork 分岔条件.

考虑到利率  $x$  变化与物价价格有可能会出现的弹性正比关系, 并发现调整弹性系数, 也能使金融系统出现的混沌状态消失, 达到稳定状态, 或周期状态. 所以本文对系统(1)中的第一方程中做了改进, 即在利率  $x$  原始变化中, 将价格指数  $z$  前的权值由 1 改为变系数  $\varepsilon$ , 会得到如下模型:

$$\begin{cases} x' = \varepsilon z + (y - a)x \\ y' = 1 - by - x^2 \\ z' = -x - cz \end{cases} \quad (2)$$

以  $a > 0, b > 0$  和  $c > 0$  为前提, 将价格指数前的弹性系数  $\varepsilon$  和商品的需求弹性系数  $c$  作为参数, 来研究价格结构对整个金融系统(2)的影响.

2015-10-12 收到第 1 稿, 2015-11-6 收到修改稿.

\* 黑龙江省教育厅项目(12541168)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: wangjingnan@hrbust.edu.cn

如果想要研究系统的全局的动态行为,那么先从系统的局部状态开始,即讨论平衡点的存在个数与稳定性问题.令系统(2)右端为零,经计算可得:当  $\varepsilon \geq c/b - ac$  时,系统(2)有唯一平衡点  $E_1$ ;当  $\varepsilon < c/b - ac$  时,系统(2)有三个平衡点,分别为

$$\begin{aligned} E_1(x_1, y_1, z_1) &= (0, 1/b, 0) \\ E_2(x_2, y_2, z_2) &= \left( \sqrt{\frac{c - abc - b\varepsilon}{c}}, a + \frac{\varepsilon}{c}, -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - abc - b\varepsilon}{c}} \right) \\ E_3(x_3, y_3, z_3) &= \left( -\sqrt{\frac{c - abc - b\varepsilon}{c}}, a + \frac{\varepsilon}{c}, \frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - abc - b\varepsilon}{c}} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

金融系统(2)在每个平衡点  $E_i = (x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ )的线性化后,得到相应的特征方程为

$$F_i(\lambda) = (c + \lambda)[a - y_i + \lambda](b + \lambda) + 2x_i^2 + (b + \lambda)\varepsilon = 0 \quad (4)$$

下面根据 Routh-Hurwitz 定理,探讨一下不动点分岔的条件.

### 1 平衡点 $E_1$ 的 pitchfork 分岔与 Hopf 分岔

将平衡点  $E_1 = (0, 1/b, 0)$  代入方程(4),可得

$$F_1(\lambda) = (\lambda + b) \left[ \lambda^2 + \left( c + a - \frac{1}{b} \right) \lambda - \frac{c}{b} + ac + \varepsilon \right] = 0 \quad (5)$$

根据 Routh-Hurwitz 定理,结合用中心流形定理与分岔的判别定理,可以得到如下结论.

**定理 1** 当  $\varepsilon = c/b - ac$  且  $c > 1/b - a$  时,金融系统(2)在平衡点  $E_1$  处经历 pitchfork 分岔.即:当  $\varepsilon \geq c/b - ac$  且  $c > 1/b - a$  时,系统(2)有唯一平衡点  $E_1$ ,且此时平衡点  $E_1$  为局部渐近稳定的;当  $\varepsilon < c/b - ac$  且  $c > 1/b - a$  时,系统(2)增加两个稳定平衡点  $E_2, E_3$ ,即系统(2)有三个平衡点  $E_1, E_2, E_3$ (如式(3)所示),此时平衡点  $E_1$  由稳定变为不稳定.

**定理 2** 当  $c = 1/b - a$  且  $\varepsilon > c/b - ac$  时,系统(2)在平衡点  $E_1$  处经历 Hopf 分岔.

证明:当  $c = 1/b - a$  且  $\varepsilon > c/b - ac$  时,特征方程(5)有一个负实根  $\lambda_1 = -b$  和一对纯虚根

$$\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{-c/b + ac + \varepsilon}.$$

对(5)式两边关于参数  $c$  求导,得

$$\frac{d\lambda}{dc} = \frac{-\lambda^2 + (c - b)\lambda + bc}{3\lambda^2 + 2\lambda b - c/b + ac + \varepsilon} \Rightarrow$$

$$\frac{d\text{Re}\lambda}{dc} \Big|_{\substack{c=1/b-a \\ \lambda=i\sqrt{-c/b+ac+\varepsilon}}} < 0$$

满足 Hopf 分岔发生的横截条件,所以系统(2)在平衡点  $E_1$  处经历 Hopf 分岔,出现周期解.定理得证.

为了验证定理 1 和定理 2 的理论结果,现取参数  $a = 100/11, b = 0.1$  时,经计算可得  $1/b - a = 0.9091$ ;当  $c = 1.1 > 0.9091$  时,  $c/b - ac = 1$ ,所以,当  $\varepsilon = 1.120 > 1$  时,满足定理 1 中  $\varepsilon \geq c/b - ac$  且  $c > 1/b - a$  的条件,平衡点  $(0, 1/b, 0) = (0, 10, 0)$  是局部稳定的,当  $\varepsilon = 0.978 < 1$  时,系统有两个稳定的平衡点,分别取初值  $(0.01, 10.01, -0.01)$  和  $(-0.01, 10.01, 0.01)$  可以画出  $(0.0447, 9.98, -0.0406)$  和  $(-0.0447, 9.98, 0.0406)$  这两个平衡点;如果  $a, b$  不变,取  $c = 0.9091 = 1/b - a, \varepsilon = 1.120 > 0.8265$  时,金融系统(2)在平衡点  $(0, 1/b, 0) = (0, 10, 0)$  经历 Hopf 分岔,出现周期轨,以上三种情况的相图如图 1 所示.

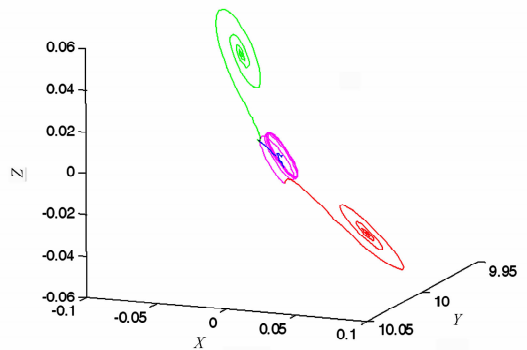


图 1 当  $a = 100/11, b = 0.1$  时平衡点  $E_i$  附近的相图

Fig. 1 Phase plane near equilibrium point  $E_i$  when  $a = 100/11, b = 0.1$

### 2 平衡点 $E_2$ 和 $E_3$ 的 Hopf 分岔

将平衡点  $E_2$  和  $E_3$  代入特征方程(4)中,可得

$$F_{2,3}(\lambda) = \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + k = 0 \quad (6)$$

其中,  $p = \frac{bc - \varepsilon + c^2}{c}$ ;

$$q = \frac{2c - 2abc - 3b\varepsilon + bc^2}{c};$$

$$k = 2c - 2abc - 2b\varepsilon \quad (7)$$

由 Routh-Hurwitz 定理和 Hopf 分岔定理可知:

**定理 3** 当  $\varepsilon < c^2 + bc, \varepsilon < \frac{c - abc}{b}, \varepsilon < \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$  (或  $\varepsilon > \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$ ) 时,系统(2)的平衡点  $E_2$  和  $E_3$  局部渐近稳定.当  $\varepsilon < c^2 + bc, \varepsilon < (2c - abc + bc^2)/3b, \varepsilon = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$  时,

金融系统(2)在平衡点  $E_2$  和  $E_3$  处同时经历 Hopf 分岔. 其中

$$B = \frac{-3b^2c - 2c + 2abc - 2bc^2}{3b},$$

$$C = \frac{2bc^2 - 2ab^2c^2 + b^2c^3 + bc^4}{3b} \quad (8)$$

证明: 当  $pq = k$  时, 可推出

$$3b\varepsilon^2 - (3b^2c + 2c - 2abc + 2bc^2)\varepsilon + 2bc^2 - 2ab^2c^2 + b^2c^3 + bc^4 = 0 \quad (9)$$

记  $B$  和  $C$  如(8) 式所示, 则(9)式化为  $\varepsilon^2 + B\varepsilon + C = 0$ , 即  $\varepsilon = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$ , 那么特征方程(6)可变为

$$(\lambda + p)(\lambda^2 + q) = 0 \quad (10)$$

由 Routh-Hurwitz 定理可知, 当  $p > 0, k > 0, pq - k > 0$

( $\varepsilon < \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$  或  $\varepsilon > \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$ ) 时, 特征方程(6)的所有根均具有负实部, 那么系统(2)的平衡点  $E_2$  和  $E_3$  是渐近稳定的. 当  $pq = k, p > 0, q > 0$  时, 特征方程(10)有纯虚根  $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{q}$ . 再对(6)式两边关于系数  $\varepsilon$  求导, 得:

$$\frac{d\lambda}{d\varepsilon} = \frac{\lambda^2/c + 3b\lambda/c + 2b}{3\lambda^2 + 2\lambda p + q} \Rightarrow$$

$$\frac{d\text{Re}\lambda}{d\varepsilon} \Big|_{\substack{c = -B \pm \sqrt{B^2 - 4C}/2 \\ \lambda = i\sqrt{q}}} = \frac{2c - 2acb - 2b\varepsilon + 2bc^2 + 3b^2c}{4q^2 + 4p^2q} < 0$$

可知此时系统(2)满足 Hopf 分岔发生的横截条件, 所以系统(2)在平衡点  $E_2$  和  $E_3$  处同时经历 Hopf 分岔, 同时出现周期解, 定理得证.

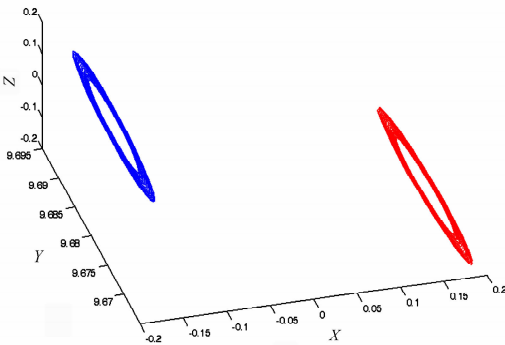


图2 当  $\varepsilon = 0.93682$  时平衡点  $E_2$  和  $E_3$  附近的周期解相图  
Fig. 2 Phase plane of periodic solution near equilibrium points  $E_2$  and  $E_3$  when  $\varepsilon = 0.93682$

为了验证定理3 的理论结果, 现选取参数为  $a = 100/11, b = 0.1, c = 1.1, \varepsilon = 0.93682$  (或  $\varepsilon = 0.64651$ ) 时, 金融系统(2)在平衡点  $E_2$  和  $E_3$  处, 经历 Hopf 分岔, 同时出现两个周期轨, 得到的相图

如图2 和图3 所示.

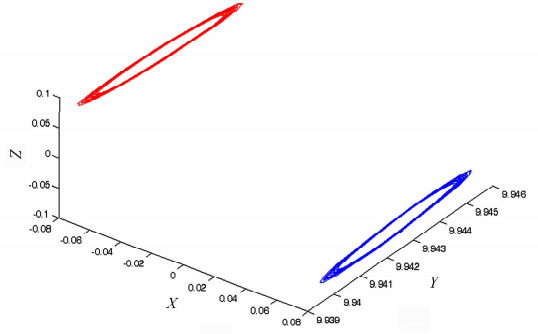


图3 当  $\varepsilon = 0.64651$  时平衡点  $E_2$  和  $E_3$  附近的周期解相图  
Fig. 3 Phase plane of periodic solution near equilibrium points  $E_2$  and  $E_3$  when  $\varepsilon = 0.64651$

### 3 弹性系数对混沌的影响

文献[6] 选取参数为  $a = 2, b = 0.2, c = 1.6062, \varepsilon = 1$  时, 得到了此时系统(2)会出现混沌状态, 如图4 所示. 经计算可得

$$1/b - a = 3, c/b - ac = 4.8186,$$

不满足本文定理1 ~ 定理3 的条件. 所以用数值模拟来研究系统在  $a = 2, b = 0.2, c = 1.60618358$  这组参数条件下的动力学性质, 以弹性系数  $\varepsilon$  为参数, 用 Matlab 数值模拟利率  $x$  振幅随  $\varepsilon$  从 0.001 到 5 的变化规律, 得到结果如图5 所示. 可得当  $\varepsilon = 0.001$  时,

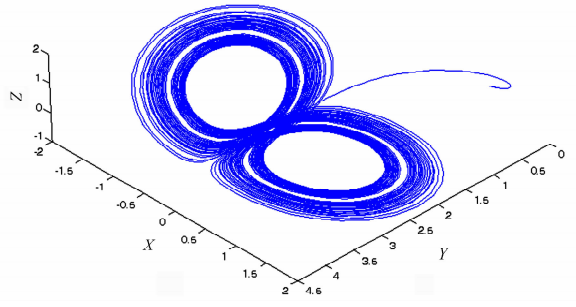


图4 当  $\varepsilon = 1$  时混沌吸引子的相图  
Fig. 4 Phase plane of chaotic attractors with  $\varepsilon = 1$

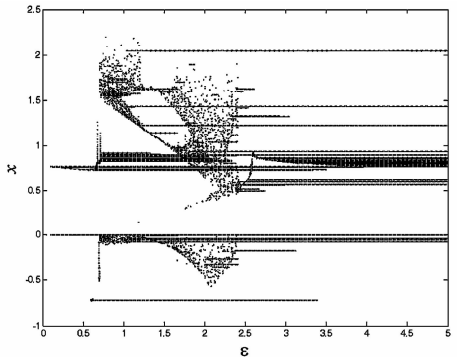


图5  $\varepsilon$  从 0.001 到 5 时的利率振幅  
Fig. 5 The amplitude of interest rate with  $\varepsilon$  from 0.001 to 5

系统(2)处于稳定状态如图6所示.当参数为 $\varepsilon = 4$ 时,系统(2)处于周期状态如图7所示.当参数为 $\varepsilon = 101$ 时,系统(2)处于如图8所示的从平衡状态转成周期状态的情形.可见,物价的弹性调整对金融系统的整体的发展会呈现一定的规律性.

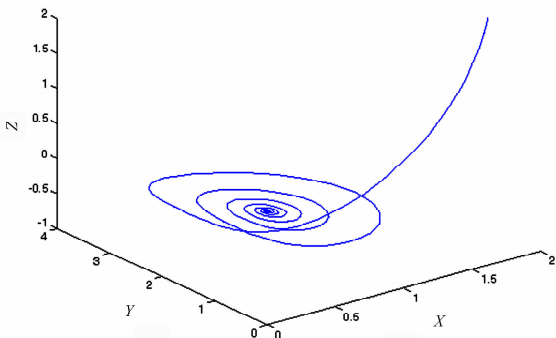


图6 当 $\varepsilon = 0.001$ 时平衡点 $(0, 5, 0)$ 附近的相图

Fig. 6 Phase plane near equilibrium point  $(0, 5, 0)$  when  $\varepsilon = 0.001$

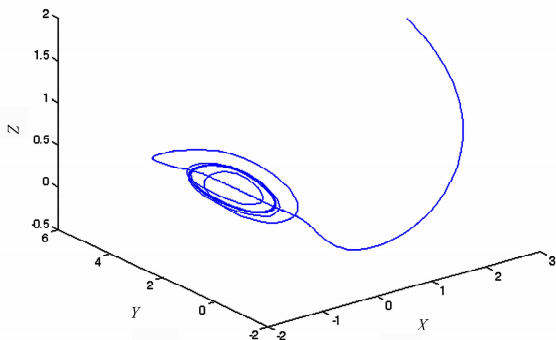


图7 当 $\varepsilon = 4$ 时平衡点 $(0, 5, 0)$ 附近的相图

Fig. 7 Phase plane near equilibrium point  $(0, 5, 0)$  when  $\varepsilon = 4$

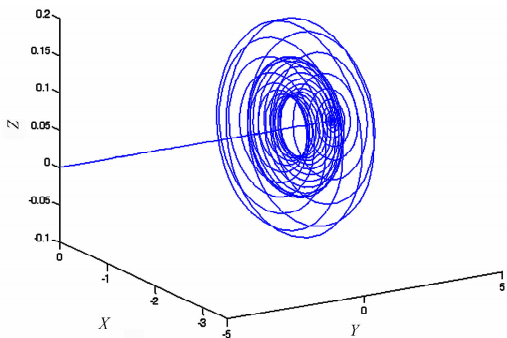


图8 当 $\varepsilon = 101$ 时平衡点 $(0, 5, 0)$ 附近的相图

Fig. 8 Phase plane near equilibrium point  $(0, 5, 0)$  when  $\varepsilon = 101$

## 4 结论

从 Matlab 数值模拟中得到了稳定的平衡点和周期解的相图,进一步验证了改进后的金融系统出

现 pitchfork 分岔和 Hopf 分岔的理论结果.从理论和数值结果中,可以看出对价格指数进行弹性调整时,该金融系统的稳定性、周期性以及混沌状态的变化很大.所以合理调整物价的价格,对控制金融市场的稳定是一种有效的手段之一.

## 参 考 文 献

- 1 Lorenz H W, Nusse H E. Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 13(5): 957 ~ 965
- 2 Cesare L D, Sportelli M. Adynamic IS - LM model with delayed taxation revenues. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 25(1): 233 ~ 244
- 3 马军海, 陈予恕. 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究( I ). *应用数学和力学*, 2001, 22(11): 1119 ~ 1128 (Ma J H, Chen Y S. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system( I ). *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22(11): 1119 ~ 1128 (in Chinese))
- 4 马军海, 陈予恕. 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究( II ). *应用数学和力学*, 2001, 22(12): 1236 ~ 1242 (Ma J H, Chen Y S. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system ( II ). *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22(12): 1236 ~ 1242 (in Chinese))
- 5 Zhao X, Li Z, Li S. Synchronization of a chaotic finance system. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 217: 6031 ~ 6039
- 6 简国明. 金融系统数学模型的机理分析与控制. 数学的实践与认识, 2011, 41(5): 1 ~ 6 (Jian G M. Mechanism analysis and control for a finance model. *Mathematics in Practice and Theory*, 2011, 41(5): 1 ~ 6 (in Chinese))
- 7 Ma C, Wang X. Hopf Bifurcation and topological horseshoe of a novel finance chaotic system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(2): 721 ~ 730
- 8 Holyst J A, Urbanowicz K. Chaos control in economical model by time-delayed feedback method. *Physica A: Statistical Mechanics and its Application*, 2000, 287(3-4): 587 ~ 598
- 9 Gao Q, Ma J. Chaos and Hopf bifurcation of a finance sys-

- tem. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 58(1):209 ~ 216 ~ 1057
- 10 Ding Y T, Jiang W H, Wang H B. Hopf-pitchfork bifurcation and periodic phenomena in nonlinear financial system with delay. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2012, 45(8):1048
- 11 Xin B G, Zhang J Y. Finite-time stabilizing a fractional-order chaotic financial system with market confidence. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(2):1399 ~ 1409

## BIFURCATION AND CHAOS OF A FINANCIAL SYSTEM\*

Wang Jingnan<sup>†</sup> Lv Jing Li Xiang

(Department of Applied Mathematics, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

**Abstract** In this paper, the coefficient of the price index in the financial system is modified from a fixed constant to an elastic coefficient. Based on the Routh-Hurwitz theorem and the bifurcation theorem, the effect of the elastic coefficient on the stability of equilibrium points, pitchfork bifurcation, Hopf bifurcation and the chaos of the modified finance system are discussed. Moreover, numerical simulations by Matlab are used to test the obtained theoretical results. In addition, by means of numerical simulations, a change figure of the interest rate amplitude and the corresponding phase planes with parameter variations for the financial system are obtained and investigated. It visually exhibits the stability state, the periodic state and the chaos state of the financial system.

**Key words** financial system, pitchfork bifurcation, Hopf bifurcation, chaos