

一种新型压电俘能器的振动特性分析及性能研究*

曹东兴[†] 吴鹏 张伟 姚明辉

(北京工业大学机电学院, 北京 100124)

摘要 基于压电效应设计了一种包含屈曲梁、质量块和非线性弹簧的新型压电俘能器结构,并对其进行了振动响应分析.首先基于 Euler-Bernoulli 梁理论,利用 Hamilton 原理建立了压电俘能器结构的非线性动力学方程,通过 Galerkin 离散后数值分析了结构参数对系统一阶固有频率的影响;进一步利用多尺度法对系统进行摄动分析,研究了系统的稳态幅频特性,数值分析了各系数对幅频响应曲线的影响,结果表明该结构在简谐激励作用下会存在多种跳跃现象;最后数值分析了压电俘能器的发电性能,讨论了激励幅值和初始静挠度对发电电压的影响.

关键词 能量采集, 屈曲梁-质量-弹簧系统, 幅频特性, 非线性振动

DOI: 10.6052/1672-6553-2014-083

引言

由于传统电池的替代需求、智能传感网络的开发需要,加之微机电系统的高集成度发展,能量采集技术应运而生.能量采集技术基于热电效应、光伏效应、压电效应、磁电效应,利用电子元器件从工作环境中获取能量,进而转换成电能.机械振动是环境中最常见的能量来源,压电振动能量采集是振动能转换成电能的一种很好的途径.

近年来,压电振动能量采集引起国内外学者的广泛关注.麻省理工学院的 Shenck 等人^[1]研究了脚跟着地时的能量损失,将多层 PVDF 薄窄板安装在鞋底用于提取人在行走时鞋底变形产生的能量. Erturk 和 Inman^[2-3]深入研究了基于 Euler-Bernoulli 梁的悬臂式压电俘能器,推导出了力学响应、电压、电流以及输出功率的简单表达式.杨增涛^[4]指出双压电晶片梁弯曲模式采集器用于吸收低频环境振动能,板或壳体厚度模式采集器用于吸收高频环境振动能,螺旋形俘能器和波纹板俘能器也可用于低频情况. Roudy 等人^[5]设计了可以调节固有频率的结构以提高压电发电效率. Huang 和 Lin^[6]设计了一种新的可调谐俘能器结构,可调频率范围达

到 $\pm 35\%$. 于慧慧和温志渝^[7]对微型压电式振动发电机进行了宽频带设计,提出并实验验证了多悬臂梁-单质量块模型. Triplett 和 Quinn^[8]提出了非线性压电能量采集器模型,考虑非线性刚度和非线性压电本构关系,用 P-L 摄动方法分析系统对外激励的非线性响应,发现如果振幅是变化的,非线性就会体现出来,提高了装置性能.郭抗抗和曹树谦^[9]以单晶悬臂梁压电发电装置为研究对象,考虑非线性压电本构方程,建立了机电耦合模型,通过数值计算分析了压电材料非线性、外激励参数对系统响应的规律,并进行了实验验证.

综上所述,国内外学者提出了大量压电梁、板结构形式的俘能器模型,并通过理论和实验方法对发电性能进行了研究.本文主要以增大采集电压、扩展响应带宽方面入手,设计了一种新的屈曲梁-质量-弹簧压电振动能量采集结构,并且研究各结构参数等对系统响应的影响.

1 系统动力学建模

本文提出的新型压电俘能器结构由屈曲梁、质量块和非线性弹簧组成,如图 1 所示.屈曲梁以金属梁为基层,其上表面贴有单层压电片,截面形状

2014-02-27 收到第 1 稿,2014-04-11 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11272016, 11172009 和 11072008)、北京市自然科学基金(3122009)、高等学校博士学科点专项科研基金(20101103120004)和北京工业大学基础研究基金资助项目(X4001015201101)

[†] 通讯作者 E-mail: caostar@bjut.edu.cn

为矩形截面;屈曲梁下端连接质量块 M 和非线性弹簧,由于初始轴向压力作用使梁处于屈曲状态,具有初始静挠度 w_s .

对于压电层合梁,考虑成细长柔性梁,假设压电层与基体粘合良好,粘结剂层影响忽略不计.动力学建模还基于以下假设:(1)横向弯曲后,截平面仍与中面垂直;(2)有限变形(大挠度,小转动);(3)忽略剪应变,即 $\gamma_{xz}=0$; (4)梁厚度不变,即 $\varepsilon_z=0$.

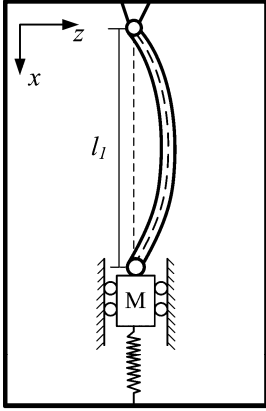


图1 压电层合梁、质量块、非线性弹簧构成的振动俘能器

Fig. 1 Vibration energy harvester composed of a unimorph PZT beam, a mass and a nonlinear spring

则 x 方向位移:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (1)$$

z 方向位移: $w(x, z, t) = w(x, t)$, 基于 Von Karman 非线性应变-位移关系, x 方向的应变为:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (2)$$

选择第二类压电方程得到复合梁上压电层的本构方程:

$$T_1 = c_{11}^E S_1 - e_{31} E_3, \quad (3a)$$

$$D_3 = e_{31} S_1 + \varepsilon_{33}^S E_3, \quad (3b)$$

压电层内的应变和基梁应变相等, 即 $S_1 = \varepsilon_x$, z 方向产生的电压与电场之间的关系 $E_3 = -V/h_3$.

假设压电层合梁屈曲时的静挠度为 $w_s(x) = a \sin(\pi x/l_1)$, 此时梁受到的轴向力记为 F , 则有

$$\frac{F}{F_{cr}} = 1 + \frac{a^2 \pi^2}{8l_1^2}, \quad (4)$$

$$F = k_1 \Delta l + k_2 \Delta l^3 - Mg, \quad (5)$$

(4)式中的 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, 表示梁由直线平衡形态转变为曲线平衡形态的最小轴向力或临界压力, (5)式

中的 Δl 为弹簧的形变量.

下面研究带粘滞阻尼梁的横向弯曲自由振动, 屈曲梁静变形为 w_s , 动变形为 w_d , 梁的横向弯曲挠度: $w(x, t) = w_s(x) + w_d(x, t)$. 压电复合梁单位长度上的质量 $m(m = \rho_p A_p + \rho_s A_s)$, 质量块质量为 M . 则系统动能为:

$$T = \frac{m}{2} \int_0^{l_1} (\dot{W}^2) dx + \frac{M}{2} \dot{u}_0^2(l_1, t), \quad (6)$$

弹簧势能:

$$U_1 = \left(\frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{4} k_2 x^4 \right) \Big|_{\Delta l}^{\Delta l - u_0(l_1)}, \quad (7)$$

结构势能为:

$$U = Mgu_0(l_1) + \frac{1}{2} \iiint_{V_{\text{压电}}} (T_1 S_1 - D_3 E_3) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_{\text{基梁}}} \sigma_x \varepsilon_x dV + U_1, \quad (8)$$

压电层上表面产生的电荷量:

$$Q = \iint D_3(z = h_2 + h_3) dx dy, \quad (9)$$

则电场力做功 $W_1 = -\frac{1}{2} QV$. 考虑梁的外阻尼, 虚功

为 $\delta W_2 = -\int_0^l c w dx \delta w$.

根据 Hamilton 原理 $\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0$, 进行变分并忽略高阶项, 得到:

$$\begin{aligned} & m \ddot{w}_d + c w_d - \frac{M}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{l_1} w_d'^2 dx \right) w_d'' + a_1 w_d'' + \\ & a_2 w_d^{(4)} + a_3 w_d^{(4)} w_d' - \frac{3}{2} a_4 w_d'^2 w_d'' + \\ & a_3 w_d''' w_d'' + 2a_4 w_d' w_d''^2 + a_4 (w_d'^2 w_d''') - \\ & \frac{3a^2 \pi^2 a_4}{4l_1^2} w_d'' \cos \frac{2\pi x}{l_1} - \frac{3a\pi a_4}{l_1} w_d' w_d'' \cos \frac{\pi x}{l_1} - \\ & a_5 w_d'' \sin \frac{\pi x}{l_1} + \frac{a\pi a_4}{l_1} w_d'^2 \cos \frac{\pi x}{l_1} + \frac{2a\pi a_4}{l_1} \cdot \\ & \left(w_d''' w_d' \cos \frac{\pi x}{l_1} \right) - \frac{a\pi a_4}{l_1} \left(w_d'' w_d' \frac{\pi}{l_1} \sin \frac{\pi x}{l_1} \right) - \\ & \frac{a_5 l_1}{\pi} w_d^{(4)} \cos \frac{\pi x}{l_1} + \frac{a\pi a_4}{l_1} (w_d'')^2 \cos \frac{\pi x}{l_1} - \\ & \frac{k_2}{8} \left(\int_0^{l_1} w_d'^2 dx \right)^3 w_d'' + a_6 \left(\int_0^{l_1} w_d'^2 dx \right)^2 w_d'' - \\ & a_7 \left(\int_0^{l_1} w_d'^2 dx \right) w_d'' + \frac{a^2 \pi^2 a_4}{l_1^2} \left(w_d''' \cos^2 \frac{\pi x}{l_1} - \right. \\ & \left. w_d'' \frac{\pi}{l_1} \sin \frac{\pi x}{l_1} \cos \frac{\pi x}{l_1} \right) = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

其中各参数分别表示为:

$$a_1 = F_{cr} \left(1 + \frac{a^2 \pi^2}{8l_1^2} \right) - \frac{3a^2 \pi^2 b [c_{11} h_3 + E_s (h_1 + h_2)]}{4l_1^2} + \frac{a^2 \pi^2 (k_1 + 3k_2 \Delta l^2)}{4l_1} + \frac{3a^4 \pi^4 k_2 \Delta l}{16l_1^2} + \frac{a^6 \pi^6 k_2}{64l_1^3} - \frac{3be_{31} V}{2},$$

$$a_2 = \frac{bE_s (h_1^3 + h_2^3)}{3},$$

$$a_3 = \frac{-bc_{11} (h_3^2 + 2h_2 h_3) + bE_s (h_1^2 - h_2^2)}{2},$$

$$a_4 = bc_{11} h_3 + bE_s (h_1 + h_2),$$

$$a_5 = \frac{a\pi^2 bc_{11} (h_3^2 + 2h_2 h_3) - a\pi^2 bE_s (h_1^2 - h_2^2)}{2l_1^2},$$

$$a_6 = \frac{3k_2 \Delta l}{4} + \frac{3a^2 \pi^2 k_2}{16l_1},$$

$$a_7 = \frac{(k_1 + 3k_2 \Delta l^2)}{2} + \frac{3a^2 \pi^2 k_2 \Delta l}{4l_1} + \frac{3a^4 \pi^4 k_2}{32l_1^2}.$$

在上述动力学方程中,第三项含有质量块的质量 M ,系数 a_1, a_7 中含有弹簧刚度系数,系数 a_1 含有电压项.

2 系统固有频率分析

梁的边界条件为简支:

$$x=0 \text{ 时, } w_d=0, \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2}=0, \quad (11a)$$

$$x=l_1 \text{ 时, } w_d=0, \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2}=0. \quad (11b)$$

采用变量分离法 $w_d(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{l_1}\right)$, 取一阶横向振动模态 $w_d(x, t) = W(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l_1}\right)$, 代入动力学方程(10)整理得到:

$$\ddot{W} + 2\xi\omega \dot{W} + \omega^2 W + \frac{b_3}{m} W^2 + \frac{b_4}{m} W^3 + \frac{b_1}{m} (W \dot{W}^2 + W^2 \ddot{W}) = 0, \quad (12)$$

式中相对阻尼系数 $\xi = \frac{c}{2\sqrt{mb_2}}$, 考虑弱阻尼 $\xi < 1$,

$$\text{其余参数: } b_1 = \frac{M\pi^4}{2l_1^3}, b_2 = \frac{a_2 \pi^4}{l_1^4} - \frac{a_1 \pi^2}{l_1^2} + \frac{8a_5 \pi}{3l_1^2},$$

$$b_3 = \frac{3a\pi^4 a_4}{4l_1^4}, b_4 = \frac{3a_4 \pi^4}{8l_1^4} + \frac{a_7 \pi^4}{2l_1^3}.$$

取线性部分来近似系统的一阶固有圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{b_2}{m}}, \text{一阶固有频率 } f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

根据《水声材料手册》^[10] 和相关实验数据,取定参数进行数值模拟. 基体选择 45 号钢, 压电层选择 PZT-5A. 压电层合梁的总长为 $l=0.1\text{m}$, 初始静挠度 a 与 l_1 之间的关系满足 $a = \frac{1}{\pi} \sqrt{0.4l_1 - 4l_1^2}$.

其余参数如下:

$$c_{11} = 12.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, E_s = 2.09 \times 10^{11} \text{ kg/m}^2,$$

$$E_p = 6.3 \times 10^{10} \text{ kg/m}^2, e_{31} = -5.4 \text{ C/m}^2,$$

$$\epsilon_{33} = 830 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}.$$

图 2 和图 3 分别描述了外加电压(逆压电效应)和梁长度对系统固有频率的影响. 从下图中可以看出,外加电压可以使系统的一阶固有频率降低,外加电压会使梁变“柔”. 梁的长度越长,刚度越小,固有频率必然下降.

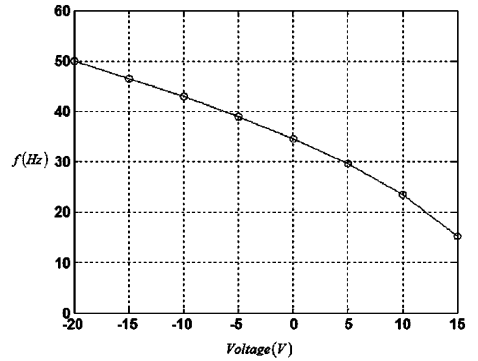


图 2 电压对系统固有频率的影响

Fig. 2 Effect of voltage on the first-order natural frequency

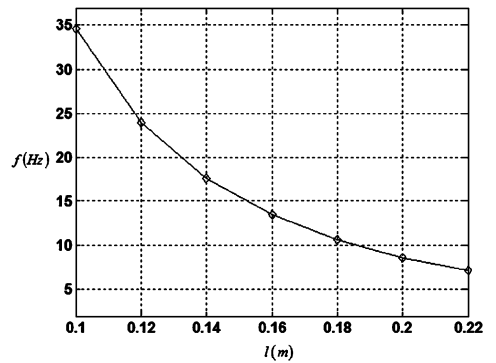


图 3 梁的长度对固有频率的影响

Fig. 3 Influence of the length of the beam on the first-order natural frequency

图 4 表示随着压电层与基层厚度比的增加,固有频率的变化情况. 图示表明,系统固有频率随着厚度比的增加先减小后增大. 在算例中,压电层厚

度从0.01mm变到0.19mm,基梁的厚度一直是0.3mm不变,占厚比大约在43%时系统具有最低固有频率,约为10Hz。

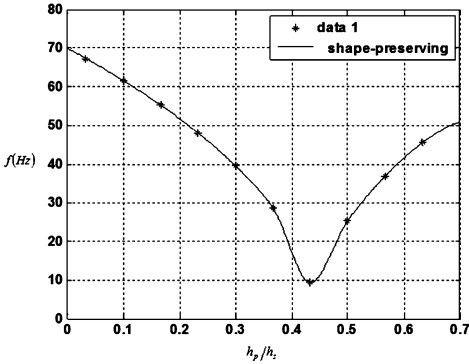


图4 压电层的占厚比对固有频率的影响

Fig. 4 The natural frequency vs. the ratio of thickness of piezoelectric to basic layer

图5表示在压电梁总长度不变的情况下,初始静挠度对一阶固有频率的影响,图示表明随着初始静挠度的增大,系统的一阶固有频率明显增加。

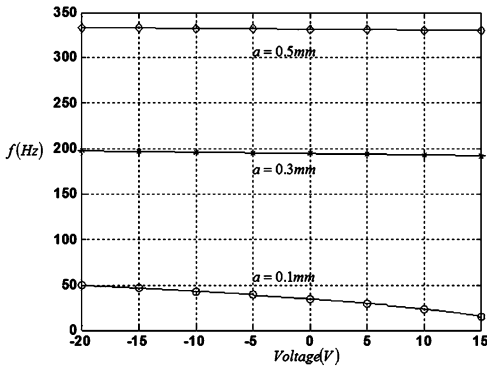


图5 初始静挠度 a 对固有频率的影响

Fig. 5 Impact of the initial curving shape on the natural frequency

将方程(12)整理得:

$$\left(1 + \frac{b_1}{m} W^2\right) \ddot{W} + 2\xi\omega \dot{W} + \omega^2 \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \dot{W}^2\right) W + \frac{b_3}{m} W^2 + \frac{b_4}{m} W^3 = 0 \quad (13)$$

若要进行动力学简化,要求 $\frac{b_1}{m} W^2 \ll 1$, $\frac{b_1}{b_2} \dot{W}^2 \ll 1$ 。按

照上述算例中的参数计算得到 $\frac{b_1}{m} W^2 = 0.0054$, $\frac{b_1}{b_2}$

$\dot{W}^2 = 0.2308$, 所以对于一个阶固有频率的近似还是有一定误差的。

3 简谐激励下的运动稳定性

本节讨论图1整体结构在简谐外激励作用下

压电俘能器的稳态幅频特性。

梁的合速度大小为 $\sqrt{\dot{W}^2 + [A\Omega \cos(\Omega t)]^2}$, 质量块的速度为 $-\dot{u}_0(l_1, t) + A\Omega \cos(\Omega t)$, 则整体结构的动能表示为:

$$T = \frac{m}{2} \int_0^{l_1} \{ \dot{W}^2 + [A\Omega \cos(\Omega t)]^2 \} dx + \frac{M}{2} [-\dot{u}_0(l_1, t) + A\Omega \cos(\Omega t)]^2, \quad (14)$$

结构的势能:

$$U = Mg [u_0(l_1) - A \sin \Omega t] + \frac{1}{2} \iiint_{V_{\text{压电}}} (T_1 S_1 - D_3 E_3) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_{\text{基梁}}} \sigma_x \varepsilon_x dV + U_1. \quad (15)$$

由哈密顿原理可得系统运动方程为:

$$\begin{aligned} m\ddot{w}_d + c\dot{w}_d - \frac{M}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{l_1} w_d^2 dx \right) w_d'' + a_1 w_d'' + \\ a_2 w_d^{(4)} + a_3 w_d^{(4)} w_d' - \frac{3}{2} a_4 w_d^2 w_d'' + a_3 w_d''' w_d'' + \\ 2a_4 w_d' w_d^2 + a_4 (w_d^2 w_d''') - \frac{3a^2 \pi^2 a_4}{4l_1^2} w_d'' \cos \frac{2\pi x}{l_1} - \\ \frac{3a\pi a_4}{l_1} w_d' w_d'' \cos \frac{\pi x}{l_1} - a_5 w_d'' \sin \frac{\pi x}{l_1} + \\ \frac{a\pi a_4}{l_1} w_d^2 \cos \frac{\pi x}{l_1} + \frac{2a\pi a_4}{l_1} (w_d'' w_d' \cos \frac{\pi x}{l_1}) - \\ \frac{a\pi a_4}{l_1} (w_d'' w_d' \frac{\pi}{l_1} \sin \frac{\pi x}{l_1}) - \frac{a_5 l_1}{\pi} w_d^{(4)} \cos \frac{\pi x}{l_1} + \\ \frac{a\pi a_4}{l_1} (w_d'')^2 \cos \frac{\pi x}{l_1} - \frac{k_2}{8} \left(\int_0^{l_1} w_d^2 dx \right)^3 w_d'' + \\ a_6 \left(\int_0^{l_1} w_d^2 dx \right)^2 w_d'' - a_7 \left(\int_0^{l_1} w_d^2 dx \right) w_d'' + \\ \frac{a^2 \pi^2 a_4}{l_1^2} \left(w_d'' \cos^2 \frac{\pi x}{l_1} - w_d'' \frac{\pi}{l_1} \sin \frac{\pi x}{l_1} \cdot \right. \\ \left. \cos \frac{\pi x}{l_1} \right) - M w_d'' [-A\Omega^2 \sin(\Omega t)] = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

对方程(16)进行一阶离散,整理得:

$$m \ddot{W} + c \dot{W} + \left(b_2 - \frac{M\pi^2}{l_1^2} A\Omega^2 \sin(\Omega t) \right) W + b_3 W^2 + b_4 W^3 + b_1 (W \dot{W}^2 + W^2 \ddot{W}) = 0. \quad (17)$$

引入无量纲变量: $\bar{W} = \frac{W}{l_1}$, $\bar{A} = \frac{A}{l_1}$, $\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_r}$, $\bar{t} =$

$t\omega_r$, $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_r}$, 其中 ω_r 为无阻尼、不含压电层的简支

梁的一阶固有圆频率,则可以得到系统无量纲动力学方程:

$$\begin{aligned} &\bar{W} + 2\xi\bar{\omega}\bar{W} + \bar{\omega}^2(1 - G_1\bar{A}\bar{\Omega}^2\sin\bar{\Omega}t)\bar{W} + \\ &G_2\bar{W}^2 + G_3\bar{W}^3 + G_4(\bar{W}\bar{W}^2 + \bar{W}^2\bar{W}) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $G_1 = \frac{M}{b_2 l_1^2} \pi^2 l_1 \omega_r^2$, $G_2 = \frac{b_3 l_1}{m \omega_r^2}$, $G_3 = \frac{b_4 l_1^2}{m \omega_r^2}$, $G_4 = \frac{b_1 l_1^2}{m}$ 都是无量纲系数. 为书写简便, 以下分析略去无量纲量符号上面的横线, 得到:

$$\begin{aligned} &\dot{W} + 2\xi\omega\dot{W} + \omega^2(1 - G_1 A \Omega^2 \sin \Omega t) W + G_2 W^2 + \\ &G_3 W^3 + G_4 (W \dot{W}^2 + W^2 \dot{W}) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

引入小扰动参数 ε , $\xi \rightarrow \varepsilon \xi$, $G_1 \rightarrow \varepsilon G_1$, $G_2 \rightarrow \varepsilon G_2$, $G_3 \rightarrow \varepsilon G_3$, $G_4 \rightarrow \varepsilon G_4$, 方程(19)变为

$$\begin{aligned} &\dot{W} + 2\varepsilon\xi\omega\dot{W} + \omega^2(1 - \varepsilon G_1 A \Omega^2 \sin \Omega t) W + \\ &\varepsilon G_2 W^2 + \varepsilon G_3 W^3 + \varepsilon G_4 (W \dot{W}^2 + W^2 \dot{W}) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

考虑 1/2 亚谐共振, 即 $\omega = \frac{\Omega}{2} + \varepsilon\sigma$, 利用多尺度法对方程进行摄动分析.

将方程(19)解的形式展开为

$$W = W_0(T_1, T_2) + \varepsilon W_1(T_1, T_2), \quad (21)$$

其中 $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$.

将上式(21)带入系统方程(20), 得到含 ε^0 和 ε^1 的两个方程:

$$D_0^2 W_0 + \frac{\Omega^2}{4} W_0 = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &D_0^2 W_1 + \frac{\Omega^2}{4} W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \xi \Omega D_0 W_0 - \\ &\Omega \sigma W_0 + \frac{\Omega^2}{4} G_1 A \Omega^2 \sin(\Omega t) W_0 - G_2 W_0^2 - \\ &G_3 W_0^3 - G_4 [(D_0 W_0)^2 W_0 + W_0^2 D_0^2 W_0]. \end{aligned} \quad (23)$$

由方程(22)得到 W_0 的解:

$$W_0(T_0, T_1) = B(T_1) e^{\frac{1}{2}i\Omega T_0} + \bar{B}(T_1) e^{-\frac{1}{2}i\Omega T_0}. \quad (24)$$

将(24)带入方程(23)中等号的右端, 令长期项等于零, 得到复数形式的平均方程:

$$\begin{aligned} &-i\Omega B' - \frac{i}{2}\xi\Omega^2 B - \frac{i}{8}\Omega^2 G_1 A \Omega^2 \bar{B} - \Omega \sigma B + \\ &G_4 \frac{\Omega^2}{4} B^2 \bar{B} - 3G_3 B^2 \bar{B} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

引入极坐标形式 $B(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}$, 其中 $a(T_1)$ 、 $\beta(T_1)$ 都是实函数, 带入上述复数方程(25), 并让实数部分和虚数部分分别等于零, 得到极坐标形式的平均方程:

$$a' = -\frac{1}{2}\xi a \Omega - \frac{1}{8} G_1 A \Omega^3 a \cos(2\beta), \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} &\beta' = \frac{1}{8} G_1 A \Omega^3 \sin(2\beta) + \sigma - \\ &\frac{1}{16} G_4 \Omega a^2 + \frac{3}{4\Omega} G_3 a^2, \end{aligned} \quad (26b)$$

振动方程(17)的 1 次近似解: $W = a \cos(\omega t + \beta) + O(\varepsilon)$, 其中 $a(T_1)$ 、 $\beta(T_1)$ 由上述微分方程确定.

当 $a' = \beta' = 0$ 时, 响应为稳态响应, 消去方程组(26)中的 $\beta(T_1)$, 得到幅频响应方程:

$$16\xi^2 + \left(\frac{8\sigma}{\Omega} + \frac{6}{\Omega^2} G_3 a^2 - \frac{G_4 a^2}{2} \right)^2 = A^2 \Omega^4 G_1^2. \quad (27)$$

取定计算参数, 进行数值模拟, 得到系统受到外激励而产生的幅频响应曲线, 如图 6~8 所示. 这是一种典型的振幅跳跃的非线性现象: 当激励频率接近线性系统固有频率时, 产生共振从而响应幅值变大; 当激励频率远离固有频率时, 同一激励频率对应的振幅有多个不同的值, 运动状态具有不稳定性. 只改变外激励的振幅 A , 保持其他参数不变, 得到图 6. 可见激励振幅增大会导致幅频响应振幅增大. 随着调谐参数 σ 的增大, 频响曲线从低振幅处跳到高振幅处.

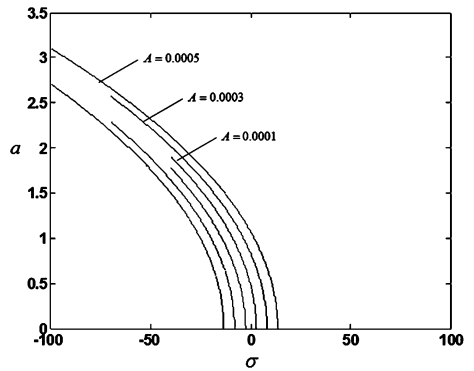


图 6 不同外激励幅值下的频响曲线

Fig. 6 Curves of frequency-response for different A

只改变粘性阻尼系数, 得到图 7. 可见粘性阻尼抑制了响应振幅的增大, 较大的阻尼对应于较小的频响振幅.

图 8 显示了外激励频率 Ω 对幅频响应曲线的影响. 激励频率 Ω 不同, 频响曲线的弯曲方向也不同: 当激励频率小于 12.3 的时候, 系统呈现软弹簧特性, 如图 8(a) 所示; 当激励频率增大之后, 系统开始呈现硬弹簧特性, 如图 8(b) 所示. 由两图可知, 当激励频率变化时, 系统会出现多值现象和跳

跃现象. 随着激励频率 Ω 的增大, 系统软弹簧特性的频响振幅逐渐增大; 系统硬弹簧特性的频响振幅逐渐减小.

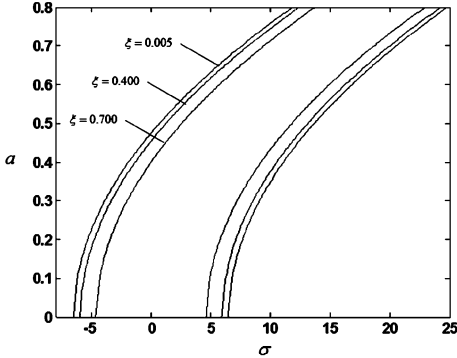


图7 不同阻尼系数下的频响曲线

Fig. 7 Curves of frequency-response for different ζ

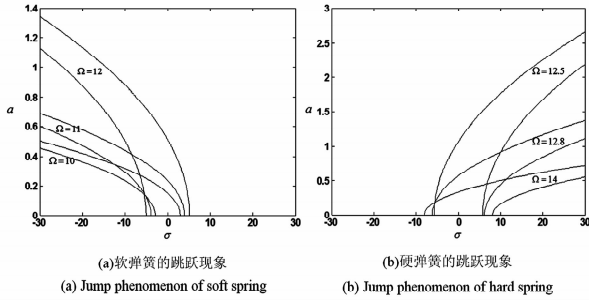


图8 不同外激励频率下的频响曲线

Fig. 8 Curves of frequency-response for different Ω

4 简谐激励下系统输出电压分析

为体现出方程中包含的各项压电参数, 将方程 (17) 改写为如下:

$$\ddot{W} + H_1 \dot{W} + [H_2 + H_3 V - H_4 A \Omega^2 \sin(\Omega t)] W + H_5 (\dot{W}^2 + W \ddot{W}) + H_6 W^2 + H_7 W^3 = 0. \quad (28)$$

压电层上表面产生的电荷量: $Q = \iint D_3(z = h_2 + h_3) dx dy$, 电流 $I = \dot{Q}$, 电压 $V = IR$, 其中 R 是外电阻, 这样得到电压方程:

$$\dot{V} + H_8 V - H_9 (W \dot{W}) - H_{10} \dot{W} = 0, \quad (29)$$

方程 (28)、(29) 的参数分别为:

$$H_1 = \frac{c}{m}, H_3 = \frac{3\pi^2 b e_{31}}{2ml_1^2}, H_4 = \frac{M\pi^2}{ml_1^2}, H_5 = \frac{M\pi^4}{2ml_1^3}$$

$$H_2 = -\frac{\pi^2}{ml_1^2} F_{cr} \left(1 + \frac{a^2 \pi^2}{8l_1^2} \right) + \frac{3a^2 \pi^4 b [c_{11} h_3 + E_s (h_1 + h_2)]}{4ml_1^4} -$$

$$\frac{a^2 \pi^4 (k_1 + 3k_2 \Delta l^2)}{4ml_1^3} - \frac{3a^4 \pi^6 k_2 \Delta l}{16ml_1^4} - \frac{a^6 \pi^8 k_2}{64ml_1^5} + \frac{4a\pi^3 bc_{11} (h_3^2 + 2h_2 h_3) - 4a\pi^3 b E_s (h_1^2 - h_2^2)}{3ml_1^4} +$$

$$\frac{b\pi^4 E_s (h_1^3 + h_2^3)}{3ml_1^4},$$

$$H_6 = \frac{3a\pi^4}{4ml_1^4} (bc_{11} h_3 + bE_s (h_1 + h_2)),$$

$$H_8 = \frac{h_3}{\varepsilon_{33} b l_1 R},$$

$$H_7 = \left[\frac{3(bc_{11} h_3 + bE_s (h_1 + h_2))}{8ml_1^4} + \frac{(k_1 + 3k_2 \Delta l^2)}{4ml_1^3} \right] \pi^4 +$$

$$\left[\frac{3a^2 \pi^2 k_2 \Delta l}{8ml_1^4} + \frac{3a^4 \pi^4 k_2}{64ml_1^5} \right] \pi^4,$$

$$H_9 = \frac{h_3 \pi^2 e_{31}}{\varepsilon_{33} 2l_1^2},$$

$$H_{10} = \frac{h_3 4\pi e_{31} (h_2 + h_3) + h_3 a \pi^2 e_{31}}{\varepsilon_{33} 2l_1^2}.$$

下面进行算例讨论. 联立方程 (28)、(29), 并取定梁宽 $b = 0.015\text{m}$, 基层厚度 $h_s = 0.3 \times 10^{-3}\text{m}$, 压电层厚度 $h_p = 0.1 \times 10^{-3}\text{m}$, 阻块质量 $M = 0.02\text{kg}$, 外电阻 $R = 8000\Omega$.

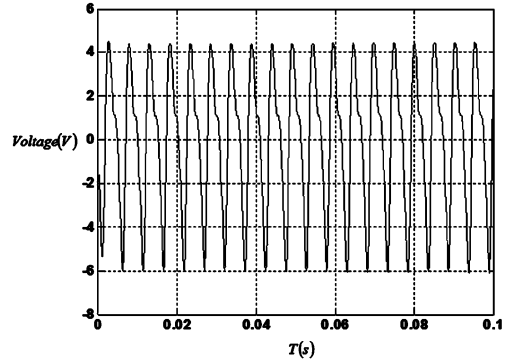


图9 电压的时间历程图

Fig. 9 Output voltage on the time course

图9显示了压电层合梁在简谐激励下产生的交变电压. 在屈曲梁总长 $l = 0.1\text{m}$ 不变的情况下, 宽度 b 从 0.005m 增加到 0.022m , 随着长宽比的增大, 得到电压幅值的变化情况如图10所示, 从图中可以看出最优长宽比 $b/l \approx 17\%$.

令外激励 $A\Omega^2 = 2\text{m/s}^2$ 的情况下, 改变初始静挠度, 得到的电压的时间历程图如图11(a)~(d)所示. 在图(a)中, 没有初始静挠度即 $a = 0$ 时, 得到的交流电压的幅值为 0.4V ; 增加轴向力使得 F

=9N,但由于未达到屈曲极限值,梁的初始静挠度仍为零,得到的电压幅值约为0.8V,如图(b)所示;(c)、(d)两图分别是层合梁具有初始静挠度 $a=0.1\text{mm}$ 、 $a=0.3\text{mm}$ 时产生的电压,可以看出交变电压的幅值约为8V、16V. 综上可以看出,给压电层合梁施加轴向力预紧力,或者在极限范围内增加屈曲静挠度,都可以增大产生的交变电压的幅值.

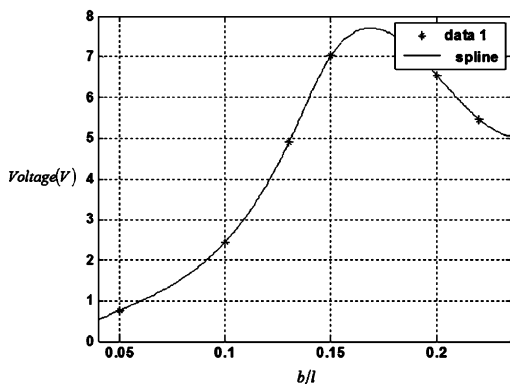


图10 长宽比对产生电压的影响

Fig. 10 Output voltage vs. the ratio of width to length of the beam

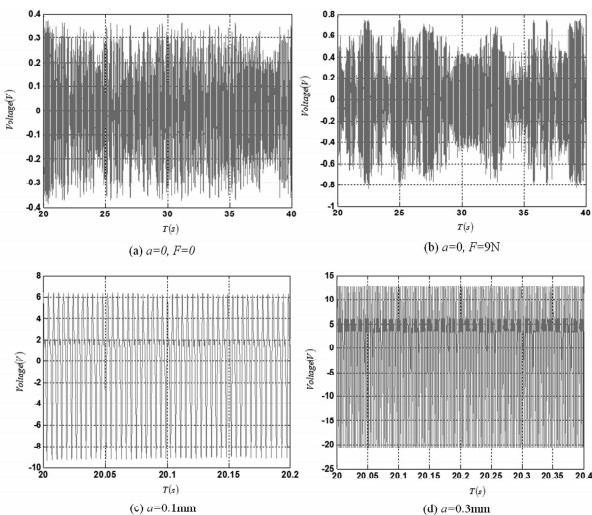


图11 不同条件下的电压输出

Fig. 11 Output voltage under different conditions

5 结论

本文提出了一种屈曲梁-质量-弹簧系统的新型的压电振动俘能器结构. 利用 Hamilton 原理建立了动力学方程,通过 Galerkin 离散和多尺度摄动分析,分别分析了系统固有频率和幅频响应;数值仿真结果发现:(1) 系统固有频率与梁长、压电层厚度以及初始静挠度密切相关:增加梁的长度可降低结构固有频率,压电层存在最优占厚比使得固有频率最低,屈曲梁的初始静挠度能够提高固有频率;

(2) 系统稳态响应存在跳跃现象:激励振幅增大会导致幅频响应振幅增大;随着激励频率的增大,系统软弹簧特性的频响振幅逐渐增大,硬弹簧特性的频响振幅逐渐减小;粘性阻尼抑制了响应振幅的增大.

研究还表明,对于简谐激励下产生的电压,存在最优长宽比使得交变电压幅值最大,给压电层合梁施加轴向力预紧力,或者适当增加屈曲静挠度,都可以增大输出电压的幅值.

参 考 文 献

- Anton S R, Sodano H A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003 ~ 2006). *Smart Materials and Structures*, 2007, 16(3): 1 ~ 21
- Erturk A, Inman D J. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2008, 130: 041002-1-15
- Erturk A, Inman D J. On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2008, 19: 1311 ~ 1325
- 杨增涛. 新型压电器件的机电耦合分析与结构设计[博士学位论文]. 长沙:中南大学,2009 (Yang Z T. Electromechanical coupling analysis and structural design on novel piezoelectric device [PhD Thesis]. Changsha: Central South University, 2009 (in Chinese))
- Roundy S, et al. Improving power output for vibration-based energy scavengers. *IEEE Pervasive Computing*, 2005, 4(1): 28 ~ 36
- Huang S C, Lin K A. A novel design of a map-tuning piezoelectric vibration energy harvester. *Smart Materials and Structures*, 2012, 21: 085014
- 于慧慧,温志渝等. 宽频带微型压电式振动发电机的设计. 传感技术学报, 2010, 23(5): 643 ~ 646 (Yu H H, Wen Z Y, et al. The design of piezoelectric vibration based generator with wide bandwidth. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2010, 23(5): 643 ~ 646 (in Chinese))
- Triplett A, Quinn D D. The effect of non-linear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, 20: 1959 ~ 1967
- 郭抗抗,曹树谦. 压电发电悬臂梁的非线性动力学建模

及响应分析. 动力学与控制学报, 2014, 12(1): 18 ~ 23
(Guo K K, Cao S Q. Nonlinear modeling and analysis of piezoelectric cantilever energy harvester. *Journal of Dynamics and Control*, 2014, 12(1): 18 ~ 23 (in Chinese))

10 王荣津. 水声材料手册. 北京: 科学出版社, 1983
(Wang R J. Handbook of underwater acoustic materials. Beijing: Science Press, 1983 (in Chinese))

NONLINEAR VIBRATION OF A NOVEL PIEZOELECTRIC VIBRATION ENERGY HARVESTER *

Cao Dongxing[†] Wu Peng Zhang Wei Yao Minghui

(College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract A new class of vibration energy harvester was introduced based on piezoelectric effect, which is composed of a buckling unimorph PZT beam, a mass and a nonlinear spring. Based on the Euler-Bernoulli beam model, the nonlinear governing equations were constructed for the energy harvester using Hamilton's principle. First, the natural frequency was computed and discussed with the change of structural parameters. Then, the method of multiple scales was utilized to perturbation analysis. And the amplitude-frequency characteristics were discussed based on numerical simulation. The nonlinear jumping phenomenon is found for the vibration energy harvester. Finally, the voltage effect of the energy harvester was discussed between the output voltage and the external excitations.

Key words energy harvesting, buckled beam-mass-spring system, amplitude-frequency characteristics, nonlinear vibration

Received 27 February 2014, revised 11 April 2014.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11272016, 11172009 and 11072008), the Beijing Municipal Natural Science Foundation (3122009), the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (20101103120004), and the Fundamental Research Fund of BJUT (X4001015201101)

[†] Corresponding author E-mail: caostar@bjut.edu.cn