基于拓扑马蹄的混沌动力学研究进展*

李清都[1]　杨晓松[2†]

(1. 重庆邮电大学非线性电路与系统研究所,重庆　400065)(2. 华中科技大学数学与统计学院,武汉　430074)

摘要　拓扑马蹄理论是混沌研究的重要分支,是迄今为止能够达到数学严格性的核心混沌研究方法之一. 基于简明的空间几何化思想,拓扑马蹄为非线性系统复杂行为的数值与理论研究搭建了一座桥梁,从而人们可以进行混沌行为的不变集刻画、存在性证明、拓扑熵估计、以及内在机制揭示等一系列研究. 本文希望通过综述当今基于拓扑马蹄的混沌研究最新进展,使研究者深入了解这套功能强大的方法体系,并能加以应用. 本文首先从人们所熟知的 Smale 马蹄开始介绍现代拓扑马蹄理论的发展历程;然后介绍了当今的拓扑马蹄引理,讨论了拓扑马蹄存在条件和相应的搜寻方法;最后,利用拓扑马蹄研究的工具箱 HsTool,以经典离的散 Hénon 映射和著名的 Saito 电路为例,展示其拓扑马蹄的研究过程.

关键词　混沌,　拓扑马蹄,　符号动力学,　拓扑熵,　庞加莱映射

引 言

混沌动力学一般是指在动力学系统中表现出来的复杂的、貌似无规则的长期的随机行为,它遵循简单的,确定性的规则. 在动力学系统中这种行为是随处可见的,例如电路,震荡化学反应,流体动力学,行星主体的运动等.

混沌的特点是对初始条件的敏感依赖性,也就是说一个动力系统若从两个初始状态开始演化,不管两者初值有 $f{:}D\to f(D)\subset R^2$ 多接近,但经过一段时间后,两者之间表现出明显不同. 这种性质在自然界、工程学中是普遍存在的. 著名的蝴蝶效应就是个例子,这正好解释了为什么提前几天的天气预测不能准确.

从几何方面来看,在混沌的一系列的数值特征中,由 S. Smale 发现的马蹄是最重要的特征[1]. 现在的马蹄和它的相关理论已发展成非线性学科的一个重要分支,并且在很多学科中都有广泛的应用,包括机械系统、非线性电路、神经网络、化学感应动力学系统等. 因此,本文总结和论述了马蹄理论的发展历程、重要结论以及应用方法.

1　从 Smale 马蹄到拓扑马蹄

本节中,我们先回顾一下 Smale 马蹄,然后分析其本质,进而引出现代拓扑马蹄理论.

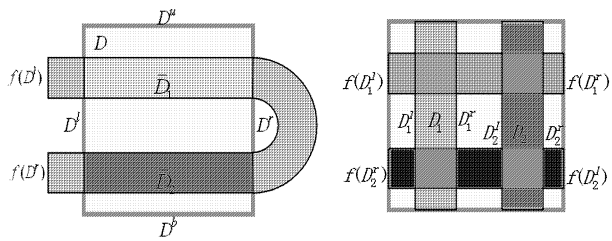

图 1　Smale 马蹄以及其中的横条和竖条

Fig. 1　The smale horseshoe and its vertical and horizontal strips

我们知道,一个同胚映射,如果存在 Smale 马蹄,那么该映射必然混沌. 考虑一个正方形 $D\subset R^2$,以及微分同胚. 如果 f 将 D 映射成图 1 所示的图形,即,首先 D 沿竖直方向以小于 1/2 的比例收缩,然后水平方向以大于 2 的比例拉伸,最后折叠成马蹄形状覆盖到 D 上,那么我们称 f 在 D 上有 Smale 马蹄. 在处理实际问题时,D 的形状并不要求一定是正方形,$f(D)$ 也不一定像图 1 那样规则,只要 D 和 $f(D)$ 能保持像图 1 那样的相对位置关系(也就是同胚)即可. 具体来说:$f(D)$ 在单连通闭合区域 D 的上边界 D^u 和下边界 D^b 之间,经过其左边界 D^l 和右边界 D^r 穿过 D;这里 $f(D^l)$ 和 $f(D^r)$ 必须位于同一侧,而对于另一侧,$f(D^u)$ 和 $f(D^b)$ 正好穿过两次.

Smale 马蹄的本质可以利用 Bernoulli 移位映

2012-03-26 收到第 1 稿,2012-06-14 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10972082, 61104150),重庆市科委基金(cstcjjA40044),重庆邮电大学博士启动金(A2009－12)

† 通讯作者 E-mail:yangxs@ mail. hust. edu. cn

射做出解释. 从图 1 中不难发现 $f(D)\cap D$ 是由两部分构成,即上横条 $\bar{D}_1$ 和下横条 $\bar{D}_2$. 由于 f 是微分同胚,它们的原像分别为左竖条 $D_1=f^{-1}(\bar{D}_1)$ 和右竖条 $D_2=f^{-1}(\bar{D}_2)$. 于是可以证明 f 存在着一个有着分形结构的不变集

$\Lambda\ \{x|f^n(x)\in(D_1\cup D_2)\cap(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2)$, n 取所有整数$\}$,并且 f 与 Bernoulli 移位映射拓扑共轭,具体过程可参考文献[2－3].

尽管 Smale 马蹄很好的解释了混沌的本质,但实际应用时却并不容易. 首先,许多混沌系统不存 Smale 马蹄;然后,f 为微分同胚的要求过强. 此外,Smale 马蹄研究中还会涉及紧致不变集中双曲性的证明,这时需要满足映射的光滑性和雅克比矩阵的条件,从而导致应用时的计算困难,甚至从根本上不可行. 为此,人们以符号动力学为工具[4],从不同的方向对上述理论进行改进,如覆盖关系理论[5],Conley 指标理论[6],计算同调论[7],模版分析法[8－9],以及基于度量空间的拓扑马蹄理论[10－12]. 其中拓扑马蹄理论是对 Smale 马蹄的直接推广,应用范围较广. 拓扑马蹄的定义如下:

定义 1.1:　设 $f:R^n\to R^n$ 是一连续映射,若存在 f 的一个紧致的不变子集 $\Lambda\subset R^n$,使得 f 限制在 Λ 上与 m 移位映射 σ(半)拓扑共轭,即存在从集合 Λ 上到空间 Σ_m 的(满射)同胚 $h:\Lambda\to\Sigma_m$,使得 $h\circ f/_{\Lambda}=\sigma\circ h$,那么称 f 具有拓扑马蹄.

这里的 Σ_m 是一个 Cantor 集. σ 在 Σ_m 上有无穷可数个周期轨,无穷不可数个非周期轨,以及一个稠密轨道. σ 的拓扑熵为正,对初值具有敏感依赖性,因此混沌. 根据拓扑共轭的定义,Σ_m 代表着混沌不变集的复杂分形结构.

该拓扑马蹄理论涉及的内容是度量空间中含有紧不变集的连续映射的行为. 只要交叉数 m 不少于 2,就可以和 Smale 马蹄一样证明两个互不相交的子集满足相互穿过关系. 受到文章[10－13]所做工作的启发,文献[11－14]提出了关于分段连续映射的拓扑马蹄引理. 该理论更加实用,具体如下.

设 X 是度量空间,D 是 X 的紧子集,在 D 中存在互不相交的紧致子集 $D_1,\cdots,D_{m-1},D_m$,$f:D\to X$ 为连续映射,显然 $f|D_i$ 都连续.

定义 1.1 令 γ 是 D 的紧子集,对于任意 $1\leqslant i\leqslant m$,$\gamma_i=\gamma\cap D_i$ 非空且紧致,则称 γ 为对应于 $D_1,\cdots,D_{m-1},D_m$ 的连接. γ 为一簇对应于 $D_1,\cdots,D_{m-1},D_m$ 的连接,若

$$\gamma\in F\Rightarrow f(\gamma_i)\in F$$

则 F 称为对应于 $D_1,\cdots,D_{m-1},D_m$ 的 f_- 连接簇.

定理 1.1(拓扑马蹄引理)假设存在一个对应于 $D_1,\cdots,D_{m-1},D_m$ 的 f_- 连接簇 F,那么将存在一个紧致不变集 $K\subset D$,使得 $F|K$ 与一个 m 移位映射半共轭,且 f 拓扑熵 $\mathrm{ent}(f)\geqslant\log m$.

2　拓扑马蹄存在的条件

拓扑马蹄引理由于是基于拓扑学上的描述,所以在应用时有一定难度,下面我们给出定理 2.1 的一些较直观的推论,首先需要引入“穿过”和“截隔”概念.

定义 2.1:　令 D_i^1 和 D_i^2 为 D_i 的两个互不相交的紧子集,对于 D_i 的一个连通子集 l,若 $l\cap D_i^1\neq\emptyset$ 和 $l\cap D_i^2\neq\emptyset$,则称 l 连接 D_i^1 和 D_i^2,表示为 $D_i^1\overset{l}{\leftrightarrow}D_i^2$.

定义 2.2[15]**:**　令 $l\subset D_i$ 为一个连通子集,如果 l 有一个子集 l',使 $f(l')\subset D_j$ 且 $D_i^1\overset{f(l')}{\leftrightarrow}D_i^2$,我们称 $f(l)$ 从 D_j^1 和 D_j^2 上恰当穿过 D_j,记为 $f(l)\mapsto D_j$(如图 2). 如果 D_i 中,对于任意满足 $D_i^1\overset{l}{\leftrightarrow}D_i^2$ 的连通子集 l,$f(l)\mapsto D_j$ 都成立,我们就称对于(D_i^1,D_i^2)和(D_j^1,D_j^2),$f(D_i)$恰当穿过 D_j,记为 $f(D_i)\mapsto D_j$.

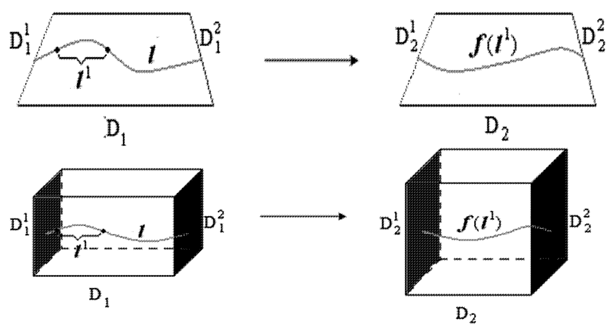

图 2　二维和三维连续映射中的一维恰当穿过

Fig. 2　One dimension of the 2D and 3D continuous mapping are passed through appropriately

根据上述定义,不难看出,这里的“恰当穿过”具有传递性,即,若 $f(D_i)\mapsto D_j$ 且 $f(D_j)\mapsto D_h$,则 $f(D_i)\mapsto D_h$. 该性质不仅有助于拓扑马蹄的寻找,还能得出下面定理和推论,证明见文献[17].

定理 2.1[15]**:**　如果对任意 $1\leqslant i,j\leqslant m$,$f(D_i)\mapsto D_j$ 恒成立,那么必然存在一个紧不变集 $K\subset D$,使

$f|K$ 半共轭于双边 m 移位映射 $\sigma|\Sigma_m$,并且拓扑熵 $\mathrm{ent}(f) \geqslant \log m$.

推论 2.1[12]：　如果 D 存在两个完全不相交的紧子集 D_1 和 D_2,$f^m|D_1$ 和 $f^n|D_2$ 是微分同胚,这里 m 和 n 是正整数,并且 $f^m(D_1) \mapsto D_1$,$f^m(D_1) \mapsto D_2$ 且 $f^n(D_2) \mapsto D_1$,那么存在一个紧不变子集 $K \subset D$ 使 $f^{2m+n}|K$ 半共轭于 2 位移映射,并且拓扑熵为

$$ent(f) \geqslant \frac{1}{2m+n}\log 2$$

如果我们把上面的“穿过”改用一个新术语“截隔”或“余维穿过”,也就是将上面映射的“拉伸”变为“收缩”、“收缩”变为“拉伸”,那么关于“穿过”的几乎所有结论,都可类比到存在多维拉伸的超混沌映射. 下面,假设 D 中存在 m 个完全不相交的连通子集 $B_1,\cdots,B_m$,对于任意 B_i,f 连续,且在边界 ∂B_i 上都有 B_i^1 和 B_i^2 两个互不相交的非空紧子集.

定义 2.3[15-16]：　如果 $S \subset B_i$,且对于任意连接 B_i^1 和 B_i^2 的 l,都满足 $l \cap S \neq \varphi$,则我们称 S 是 B_i^1 和 B_i^2 的截隔(见图 3). 假设 f:$B_i \to B_j$ 对于每个 B_i^1 和 B_i^1 的间隔 S,使 $f(S) \cap B_j$ 为 (B_j^1,B_j^2) 的截隔,我们就称对于 (B_i^1,B_i^2) 和 (B_j^1,B_j^2),$f(B_i)$ 截隔或余维穿过 B_j,记为 $f(B_i) \mapsto B_j$.

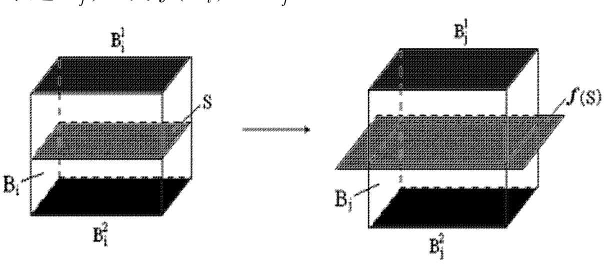

图 3　截隔 s 和 $f(S) \cap B_j$

Fig. 3　Separattion S and $f(S) \cap B_j$

定理 2.2[16-17]：　对任意 $1 \leqslant i,j \leqslant m$,$f(B_i) \mapsto B_j$ 恒成立,那么必然存在一个紧不变集 $K \subset D$,使 $f|K$ 半共轭于 m 移位映射,且 $\mathrm{ent}(f) \geqslant \log m$.

上述定理也有与推论 2.1 类似的推论,这里由于篇幅关系就不再赘述了. 在拓扑马蹄在使用时,定理 2.1 和 2.2 条件较强,但估计出的拓扑熵较接近真实值,而推论 2.1 的判定条件最弱,但其拓扑熵偏小,通常用在混沌判定上.

为了找出一个混沌系统的拓扑马蹄,如果是连续时间系统,我们首先需要选取一个合适的 Poincaré 截面,将其转化为 Poincaré 映射. 在选取 Poincaré 截面时,要避免轨线与截面的相切,这会造成映射的不连续性. 由于拓扑马蹄中蕴含了大量的双曲周期轨道,因此寻找映射的拓扑马蹄的第一步就是搜索出双曲的短周期轨道. 对于这些周期轨道,我们需要知道它们的稳定和不稳定流形的方向,因为其分别对应于拓扑马蹄的收缩和拉伸. 接着可以通过尝试的方法,分别围绕每个周期点,取上述的紧子集 D_i 或 B_i,并通过调节其边界和 f 的迭代次数,使其满足定理或推论中的判定条件.

3　混沌系统的计算机辅助分析与验证

拓扑马蹄寻找常常需要依靠大量的尝试,为了解决二维映射的拓扑马蹄寻找问题,我们设计编写了一个 *MATLAB* 工具箱 sTool,使寻找马蹄的工作变得简单高效,其界面如下图 4 所示. 采用这种方式,已经成功找出三维 Glass 网络[18]、分数阶统一混沌系统[19]、飞船电力系统[20]的拓扑马蹄. 下面先以 Hénon 映射为例,简要介绍利用 HsTool 工具箱寻找拓扑马蹄的过程[12],然后类比到 Saito 超混沌电路的拓扑马蹄寻找中.

Hénon 映射的方程如下

$$(x_{k+1},y_{k+1}) = H(x_k,y_k) = (1 - ax_k^2 + by_k,x_k)$$

当参数选择 $a = 1.4$、$b = 0.3$ 时,系统吸引子如图 4 所示[21].

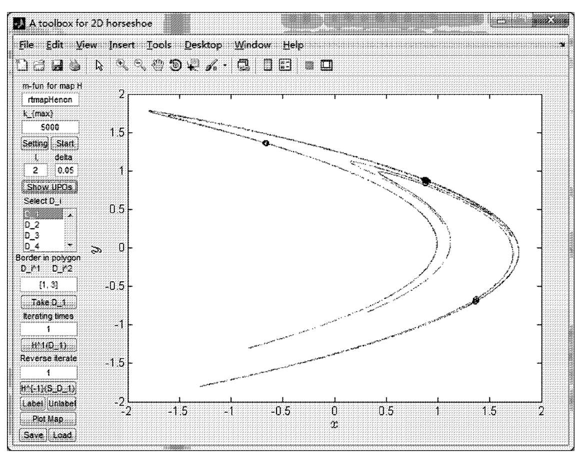

图 4　工具箱界面截图、吸引子序列 S 和短不稳定周期轨位置

Fig. 4　The screenshot of hstool interface, attractor series S and the place of unstable periodic orbit

步骤 1. 首先找到不稳定周期轨. 我们取 $k_{max} = 5000$,点击“*start*” 算出吸引子序列 S. 接着,令周期 $l = 2$,周期轨精度 $\delta = 0.1$,点击“show UPOs”,确

定存在 2 周期的不稳定周期轨的大致位置.

步骤 2. 为了选取一个合适的子集 D_1，点击"Take D_1"，围绕一个周期点，选取又长(对应于拉伸方向)又窄(对应于收缩方向)的多边形. 操作时，用鼠标左键选取多边形定点位置，点击鼠标右键结束. 在"Border in polygon"中输入"[1,4]"，表示多边形的第 1 条边为 D_1^1，第 4 条边为 D_1^2. 我们沿这个曲线(也就是扩张最快的方向)围绕这条不稳定周期轨选取一个又长又窄的多边形作为 D_1 接着设置"Iterating times"为. . ，点击"H^2(D_1)"进行映像计算，点击"*label*"会自动标注原像和影像的对应关系，如图 5 所示. 为了确保 $f^m(D_1)\mapsto D_1$，这里可做多次尝试.

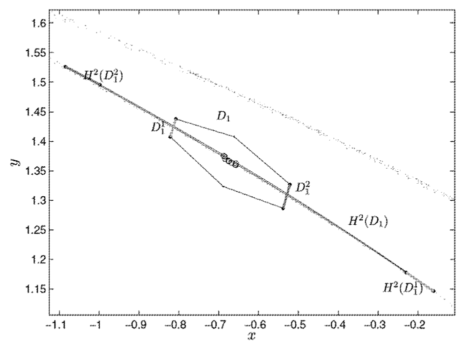

图 5 选择 D_1，使满足 $f^2(D_1)\mapsto D_1$

Fig. 5 Select D_1 with $f^2(D_1)\mapsto D_1$

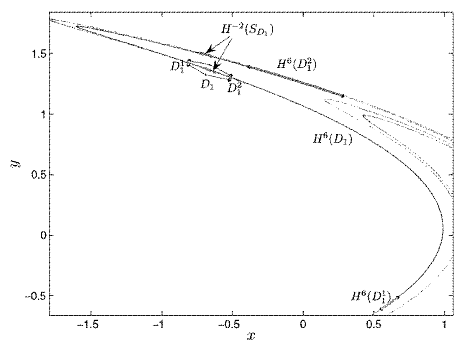

图 6 $f^6(D_1)$穿过 $H^{-2}(S_{D_1})$的上部分的邻域

Fig. 6 $f^6(D_1)$ across the neighborhood $H^{-2}(S_{D_1})$

步骤 3. 选取一个多边形 D_2. 为了同时满足 $f^m(D_1)\mapsto D_2$ 且 $f^n(D_2)\mapsto D_1$. 我们一方面以 l 的整数倍增加 m 的取值，另一方面，观测多边形 D_1 所围的点 S_{D_1}的 n 次原像 $H^{-n}(S_{D_1})$的位置，通过合理的选择 m 和 n，即可使 $f^m(D_1)$穿过 $H^{-n}(S_{D_1})$的某部分的邻域. 为此，我们在"Select D_i"列表中选择 D_1，设置"Reverse iterate"次数为 $n=2$，点击"$H^{-2}(S_{D_1})$"，结果如图 6 所示.

这时，我们围绕这个领域选择 D_2，使 $f^n(D_2)\mapsto D_1$ 成立. 接着，微调 D_1 和 D_2 的位置，使推论 2. 1 的条件全满足，并预留一定的误差容忍范围. 结果找到的马蹄如图 7 所示，不难发现同时满足条件 $H^6(D_1)\to D_1$、$H^6(D_1)\to D_2$ 和 $H^2(D_2)\mapsto D_1$，因此对应的拓扑熵为不小于$\frac{1}{14}\log2$.

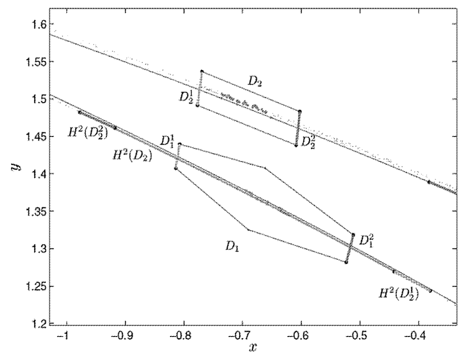

图 7 所选择的 D_2 在 H^2 恰当穿过 D_1

Fig. 7 Selected D_2 whith D_1 propely across H^2

接下来，我们研究 Saito 超混沌电路，其无量纲动力学方程为：

$$\dot{x}=-z-w,\quad \dot{y}=\gamma(2\delta y+z)$$
$$\dot{z}=\rho(x-y),\quad \varepsilon\dot{w}=x-h(w)$$

这里 $h(w)=w-(|w+1|-|w-1|)$为分段线性函数. 当参数 $\gamma=1,\delta=1,\rho=14,\varepsilon=0.01$ 时，系统有个吸引子如图 8 所示[22]. 由于该系统是连续时间系统，我们以 $P:x_4=-1$ 为 Poincaré 截面，定义 Poincaré 映射为 $p:P\to P$，对于任意 $x\in P$，$\pi(x)$表示由初始条件 x 出发的轨道首次负向穿过 P 的回归点.

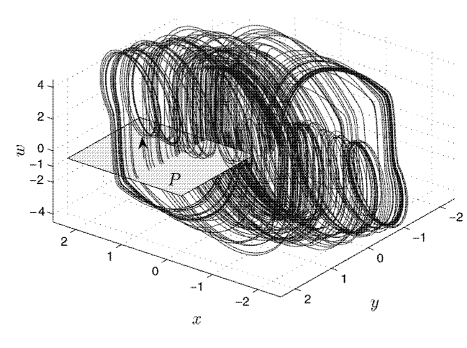

图 8 系统相图

Fig. 8 The phase portrait of the hperchaos Satio circuit

利用截隔(余维穿过)寻找拓扑马蹄的过程与上面类似，不同是 π 的维数为 3 维. 幸运的是，该混

沌系统的双曲性很强,最终的吸引子看起来几乎处在一个平面上,如图 9 所示. 为了便于拓扑马蹄的寻找,可以引入 Householder 变换

$$X=[x_1,x_2,x_3,x_4]^T=Q[x,y,z,w]^T$$

将坐标系旋转,使 p 的拉伸的方向大致与平面 $x_1 0 x_2$ 平行,收缩方向在平面以外. 这时,我们只需要考虑复合映射 $\pi=Q^{-1}\circ p\circ Q$ 的 x_1 和 x_2 坐标,用 HsTool 在 $x_1 o x_2$ 面上选取多边形,寻找二维拉伸的拓扑马蹄. 这个寻找过程与前面 Hénon 映射的过程类似,这里就不赘述了. 找到两个合适的多边形后,沿着 x_3 坐标方向,分别向上向下平移一个小距离作为上下面,得出多面体 a 和 b,如图 10 所示.

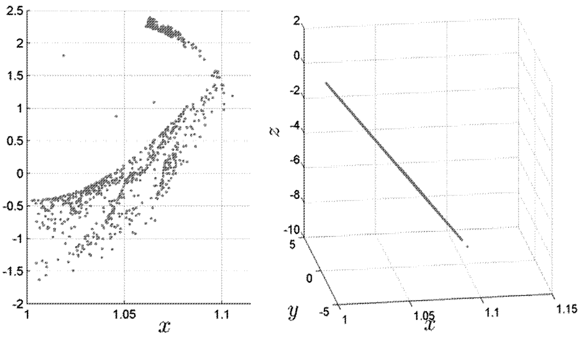

图 9　Poincaré 映射 π 的吸引子

Fig. 9　The attractor of Poincaré map π

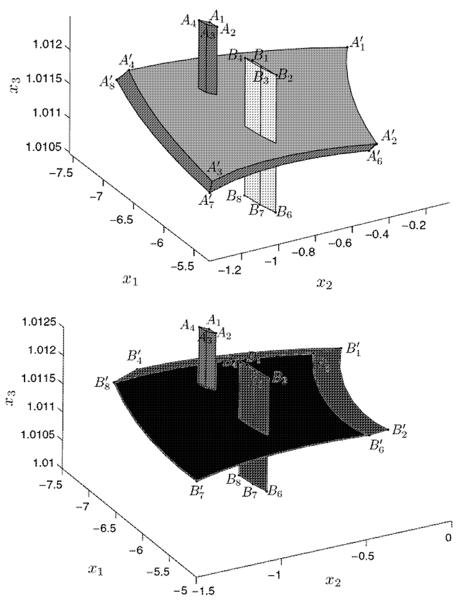

图 10　$\pi^3(a)$截隔 a 和 b,$\pi^3(b)$截隔 a 和 b

Fig. 10　$\pi^3(a)$ and $\pi^3(b)$ saperate a and b

4　结论

本文综述了近年来基于拓扑马蹄的混沌动力学研究进展. 首先,对最早的 Smale 马蹄进行了回顾,分析其本质,引出了现代拓扑马蹄理论给出了拓扑马蹄引理;综述了分别基于“穿过”和“余维穿过”(截隔)关系的拓扑马蹄的判断条件,介绍了它们的应用思路;最后,我们利用拓扑马蹄研究的工具箱 HsTool,以经典离的散 Hénon 映射为例,详细介绍了 HsTool 的使用方法,以及基于“穿过”关系的拓扑马蹄寻找过程;对于著名的 Saito 电路,由于是连续时间超混沌系统,需要先转换成 Poincaré 映射,降维后再利用 HsTool. 本文工作有助于混沌研究者快速了解拓扑马蹄理论,以及研究问题的工具和方法.

参　考　文　献

1　Smale S. Finding a horseshoe on the beaches of Rio. *The Mathematical Intelligencer*, 1998, 20(1): 39 ~ 44

2　Wiggins S. Global bifurcations and chaos: analytical methods. New York: Springer – Verlag, 1988

3　Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. New York: CRC Press, 1999

4　Morse M, G A Hedlund. Symbolic dynamics. *American Journal of Mathematics*, 1938, 60(4): 815 ~ 866

5　Zgliczyński P, M Gidea. Covering relations for multidimensional dynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 2004, 202(1): 32 ~ 58

6　Szymczak A. The Conley index and symbolic dynamics. *Topology*, 1996, 35(2): 287 ~ 299

7　Kaczyński T, Mischaikow K, Mrozek M. Computational homology. New York: Springer Verlag, 2004

8　Plumecoq J, Lefranc M. From template analysis to generating partitions: I: Periodic orbits, knots and symbolic encodings. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2000, 144(3 – 4): 231 ~ 258

9　Plumecoq J, Lefranc M. From template analysis to generating partitions II: Characterization of the symbolic encodings. Arxiv Preprint Chao – Dyn/9907030, 1999

10　Kennedy J, Yorke J A. Topological horseshoes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2001, 353(6): 2513 ~ 2530

11　Yang X S, Tang Y. Horseshoes in piecewise continuous maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 19(4): 841 ~ 845

12　Li Q, Yang X S. A simple method for finding topological horseshoes. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, 20(2): 467~478

13 Kennedy J, Kocak J S, Yorke J A. A chaos lemma. *The American Mathematical Monthly*, 2001, 108(5): 411~423

14 Yang X S. Metric horseshoes. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 20(5): 1149~1156

15 Yang X S, Li H, Huang Y. A planar topological horseshoe theory with applications to computer verifications of chaos. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2005, 38: 4175

16 Li Q. A topological horseshoe in the hyperchaotic Rossler attractor. *Physics Letters A*, 2008, 372(17): 2989~2994

17 Yang X S. Computer assisted verification of chaotic dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2009, 19(4): 1127~1145

18 Li Q D, Yang X S. Chaotic dynamics in a class of three dimensional Glass networks. *Chaos*, 2006, 16(3): 033101

19 Li Q D, Chen S, Zhou P. Horseshoe and entropy in a fractional-order unified system. *Chinese Physics B*, 2011, 20(1): 010502

20 Li Q D, Yang X S, Chen S. Hyperchaos in a Spacecraft Power System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2011, 21(6): 1719~1726

21 Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 1976, 50(1): 69~77

22 Saito T. An approach toward higher dimensional hysteresis chaos generators. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 1990. 37(3): 399~409

23 Li Q D, Yang X S. A computer-assisted verification of hyperchaos in the Saito hysteresis chaos generator. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 2006, 39(29): 9139~9150

PROGRESSES ON CHAOTIC DYNAMICS STUDY WITH TOPOLOGICAL HORSESHOES*

Li Qingdu[1] Yang Xiaosong[2†]

(1. *Institute for Nonlinear Circuits & Systems, Chongqing University Posts and Telecommunications, Chongqing* 400065, *China*)

(2. *Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074, *China*)

Abstract The topological horseshoe theory is one of the most important ways to study chaos rigorously. With striking geometric clarity, the method bridges the gap between chaotic theory and numerical computation, and has been extensively used in the study of chaotic invariant sets, computer assisted proofs, topological entropy estimation, etc. In order to make more researchers understand this powerful method, we presents a brief review of topological horseshoe this paper. We first introduce the history from Smale's horseshoe to topological horseshoes, showing their essential feature; and then present some useful theorems, the corresponding conditions and numerical methods, as well as a toolbox called HsTool; then give two examples, the Hénon map and the hyperchaotic Saito circuit, to show how to find horseshoes in practical systems.

Key words chaos, topological horseshoe, symbolic dynamics, topological entropy, Poincaré

Received 26 March 2012, revised 14 June 2012.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10972082, 61104150), Natural Science Foundation Project of Chongqing (cstcjjA40044) and Doctoral Fund of CQUPT (A2009-12)

† Corresponding author E-mail: yangxs@mail.hust.edu.cn