

# 非完整约束动力系统的离散积分方法<sup>\*</sup>

高强<sup>†</sup> 钟万勰

(大连理工大学运载工程与力学学部工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

**摘要** 采用了微分-代数方程求解的雷同策略, 只在离散区段内满足无约束的积分, 而在离散节点处则用约束冲量(Lagrange 乘子向量)让轨道发生转折, 给出了非完整约束动力系统的离散积分格式. 数值例题的效果表明, 本文给出的积分算法严格满足节点的非完整约束, 具有良好的长时间积分性能.

**关键词** 数值积分, 非完整约束, 参变量变分原理, 非线性

## 引言

对于有约束的动力学系统, 有完整系统和非完整系统的划分<sup>[1-3]</sup>. 关于广义位移的代数等式约束是完整系统(holonomic system), 因为运用隐函数定理, 可将代数约束方程预先满足并加以消元, 成为减维的无约束系统. 如果不能将约束通过消元的方法变换到独立广义位移的系统, 则为非完整(non-holonomic)系统, 此时又可分为微分等式约束和不等式约束两类. 不能用分析法积分的微分等式约束对于数值积分提出了很多问题, 本文讨论此类问题的数值积分算法.

Koon 和 Marsden<sup>[4]</sup>给出了非完整系统的哈密顿和拉格朗日描述方法. 该文只论述连续时间的理论, 无数值求解. 刘世兴和郭永新等<sup>[5]</sup>利用保辛算法对一类特殊的非完整力学系统的动力学性质进行数值研究, 表明辛算法在这类特殊的非完整力学系统的数值计算中的优越性. Cortés<sup>[6]</sup>基于离散形式的 Lagrange-d'Alembert 原理给出了求解非完整约束系统的数值积分方法, 此方法可保证数值积分结果的能量守恒. Betsch<sup>[7]</sup>提出了求解含完整和非完整约束混合约束机械系统的一种能量保持积分方法. McLachlan 等<sup>[8]</sup>基于 Lagrange-d'Alembert 原理, 讨论了非完整约束系统的线性隐式、半隐式或隐式积分方法, 并讨论了算法的可逆性. Ferraro 等<sup>[9]</sup>给出了非完整约束系统的一种几何积分方法, 此方法可以保持系统的动量, 可以近似平均满足非完整约束.

由于非完整约束含有微分等式方程, 数值求解时要求处处严格满足非完整约束一般很困难, 表明只能离散时间求解. 文献[6-8]提出的数值积分方法都将非完整约束中出现的速度用差分近似, 文献[9]中的数值方法虽可以保持系统的动量, 但也只能近似平均满足非完整约束.

本文以离散时间求解出发予以数值积分求解. 采用了微分-代数方程求解的雷同策略<sup>[10]</sup>, 只在离散区段内满足无约束的积分, 约束条件成为区段差分约束也能满足; 而在离散节点处则用约束冲量(Lagrange 乘子向量)让轨道发生转折, 给出了非完整约束动力系统的离散积分格式. 数值例题的效果表明, 本文给出的积分算法在节点处以及在区段的差分近似, 均能严格满足非完整约束, 并具有良好的长时间积分性能.

## 1 连续非完整约束动力系统的分析表述

假设系统的广义坐标为  $\mathbf{q} = \{q^1 \ q^2 \ \cdots \ q^n\}^T$ , 并受到  $m$  个非完整约束, 假设不包含约束的动力系统的拉格朗日函数为  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , 而非完整约束为

$$\mathbf{G}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (1)$$

其中  $\mathbf{G}$  为  $m \times n$  维满秩矩阵. 则连续约束系统的动力学方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (2)$$

以上的约束(1)是在位移空间表达的, 其中  $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_m\}^T$  为拉格朗日乘子向量, 即参变量

向量,  $\lambda^T G(q)$  的意义是约束外力.

此系统的拉格朗日 - 达朗贝尔原理为

$$\delta S = \delta \int_0^\eta L(q, \dot{q}) dt - \int_0^\eta \lambda^T G(q) \delta q dt = 0 \tag{3}$$

在执行变分时, 外力不变分. 于是

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_0^\eta \left\{ (\delta q)^T \frac{\partial L}{\partial q} + (\delta \dot{q})^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} dt - \\ & \int_0^\eta (\delta q)^T G^T(q) \lambda dt = \int_0^\eta (\delta q)^T \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \right. \\ & \left. G^T(q) \lambda \right\} dt + (\delta q)^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_0^\eta \end{aligned} \tag{4}$$

利用  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  得到

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_0^\eta (\delta q)^T \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - G^T(q) \lambda \right\} dt + \\ & p^T(\eta) \delta q(\eta) - p^T(0) \delta q(0) \end{aligned} \tag{5}$$

因区段内  $\delta q$  的任意性, 则得到方程(2)给出的动力学运动方程.

通过 Legendre 变换到 Hamilton 体系, 可得到非完整约束动力系统的哈密顿方程. 引入广义动量

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{6}$$

通过方程求解, 可以将  $\dot{q}$  表示为

$$\dot{q} = f(q, p) \tag{7}$$

然后并定义哈密顿函数为

$$H(q, p) = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}) \tag{8}$$

则动力学方程为

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - G^T \lambda \tag{9}$$

参变量变分原理不能将约束方程也推出, 应另外表达为

$$G(q) \cdot \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = 0 \tag{10}$$

用调整参变量的方法来满足之. 对应方程的变分原理为

$$\begin{aligned} \delta S = & \delta \int_0^\eta [p^T \dot{q} - H(q, p)] dt - \\ & \int_0^\eta (\delta q)^T G^T(q) \lambda dt = 0 \end{aligned}$$

执行变分得到

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_0^\eta [(\delta \dot{q})^T p - (\delta q)^T \frac{\partial H}{\partial q}] dt + \int_0^\eta (\delta p)^T (\dot{q} - \\ & \frac{\partial H}{\partial p}) dt - \int_0^\eta (\delta q)^T G^T(q) \lambda dt = \\ & \int_0^\eta (\delta q)^T \left[ -\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q} \right] dt + \int_0^\eta (\delta p)^T (\dot{q} - \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p}) dt - \int_0^\eta (\delta q)^T G^T(q) \lambda dt + p^T \delta q \Big|_0^\eta \tag{11}$$

因区域内  $\delta q$  和  $\delta p$  的任意性得到方程给出的动力学运动方程. 应看到, 拉格朗日 - 达朗贝尔原理不是标准的变分原理, 非完整约束项不能全部放在扩展 Lagrange 函数中的.

哈密顿函数对时间做全微商给出

$$\frac{dH}{dt} = (\dot{q})^T \frac{\partial H}{\partial q} + (\dot{p})^T \frac{\partial H}{\partial p} \tag{12}$$

利用方程(9)可得到

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)^T \frac{\partial H}{\partial q} + \left( -\frac{\partial H}{\partial q} - G^T \lambda \right)^T \frac{\partial H}{\partial p} = \\ & -\lambda^T G \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned} \tag{13}$$

然后根据约束条件的方程(10)得到

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{14}$$

因此系统能量守恒.

## 2 非完整约束动力系统的离散

回顾微分 - 代数方程求解<sup>[10]</sup>, 约束只要在离散节点处满足, 而在离散后的区段内部可按无约束系统的规则运动. 将连续时间均匀离散为长度为  $\eta$  的时间段

$$t_0 = 0, t_1 = \eta, \dots, t_k = k\eta, \dots \tag{15}$$

时间区段  $k^\# : (k-1)\eta \sim k\eta$ . 动力学可以逐步积分, 故只要讲明白一个区段  $k^\#$  如何恰当积分就可以了. 因为是初值积分, 要给出  $k^\#$  区段初始时的状态向量  $q_{k-1}, p_{k-1}$ , 根据  $q_{k-1}, p_{k-1}$  积分出  $q_k, p_k$  就可以了.

考虑  $k^\# : (k-1)\eta \sim k\eta$  的区段积分. 初始的  $q_{k-1}, p_{k-1}$  应满足节点  $k-1$  的约束条件. 将  $k^\#$  区段的约束力集中到两端节点处, 在  $t_{k-1}$  处有约束反力  $\lambda_{k-1}^{k^\#}$ , 在  $t_k$  处有约束反力  $\lambda_k^{k^\#}$ . 于是一个区段的积分可分解为 3 阶段: 第一阶段, 节点  $k-1$  的转折变换, 由于在  $t_{k-1}$  处有约束反力  $\lambda_{k-1}^{k^\#}$ , 将  $p_{k-1}$  变换到  $p'_{k-1}$ ; 第二阶段, 在  $k^\#$  时间区段内按照无约束时的 Lagrange 函数积分, 以得到  $q_k, p'_k$ ; 第三阶段, 转折变换, 由于在  $t_k$  处有约束反力  $\lambda_k^{k^\#}$ , 将  $p'_k$  变换到  $p_k$ . 在上述过程中, 约束反力  $\lambda_{k-1}^{k^\#}$  和  $\lambda_k^{k^\#}$  是两个未知向量, 确定它们可满足非完整约束. 条件是两个约束, 即区段的差分约束和  $t_k$  处的节点约束, 即

$$G\left(\frac{q_k + q_{k-1}}{2}\right) \frac{q_k - q_{k-1}}{\eta} = 0,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}_k) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k) = 0 \quad (16)$$

一定要明确,  $m$  维约束是指有  $m$  个非完整等式约束方程;这是当前起作用的约束,即  $m$  个主动约束. 如果约束完全是不起作用的,则运动等于没有约束,就是无约束运动了. 主动非完整约束的数目就是  $m$ ,是当前起作用的约束数. 在一个时间点处,  $m$  是不变的,除非出现矩阵  $\mathbf{G}$  非满秩的情况. 否则,在一个时间点突然发生约束数目的变化,则就产生碰撞了. 出现碰撞时,恰当数学处理方法是参变量变分原理,不在本文讨论.

让节点和区段约束条件全得到满足是转折变换的任务,应在每个转折变换时各提供  $m$  个参变量待定. 节点  $k-1$  处的约束条件是表达的,约束矩阵  $\mathbf{G}$  是  $m \times n$  的,有  $m$  个约束方程. 表达为

$$\mathbf{G}_H(\mathbf{q}_{k-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_m \end{bmatrix}, \mathbf{g}_i \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0, i = 1, \dots, m \quad (17)$$

其中  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_{k-1})$  是  $n$  维的行向量,代表  $n$  维动量空间的切平面. 矩阵  $\mathbf{G}(\mathbf{q}_{k-1})$  是满秩的,任何向量  $\dot{\mathbf{q}}$  只要与约束切面  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$  全正交,就满足了约束条件.

先讲第一阶段. 因为位移  $\mathbf{q}_{k-1}$  未曾变化,故冲量产生的效果就是动量发生变化. 从  $\mathbf{p}_{k-1}$  变换到  $\mathbf{p}'_{k-1}$  产生了  $\Delta \mathbf{p}_{k-1} = \mathbf{p}'_{k-1} - \mathbf{p}_{k-1}$ ,  $\Delta \mathbf{p}_{k-1}$  就是  $m$  个非完整约束所产生的冲量 (Impulse). 因轨道转折,节点  $k-1$  的  $m$  维约束会产生维的约束冲量  $\lambda_k^{k\#}$ . Lagrange 参数  $\lambda$  是与 (1) 对应的,因此有方程

$$\mathbf{p}'_{k-1} = \mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{G}^T(\mathbf{q}_{k-1}) \lambda_k^{k\#}$$

再讲第二阶段,不在区段内考虑差分约束方程的积分,成为在无约束下的自由运动,区段作用量就是 Lagrange 函数的积分

$$S_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt \quad (18)$$

作用量的变分可表达为其两端的动量的虚功

$$\delta S_k = (\mathbf{p}'_{k-1})^T \delta \mathbf{q}_{k-1} - (\mathbf{p}'_k)^T \delta \mathbf{q}_k \quad (19)$$

因此可以得到

$$\frac{\partial S_k}{\partial \mathbf{q}_{k-1}} = -\mathbf{p}'_{k-1}, \frac{\partial S_k}{\partial \mathbf{q}_k} = \mathbf{p}'_k \quad (20)$$

熟知的无约束动力学积分.

第三个阶段是将无约束自由运动的节点  $k$  的动量  $\mathbf{p}'_k$  通过转折变换到  $\mathbf{p}_k$ , 由于节点  $k$  处受冲量

$\lambda_k^{k\#}$ , 因此有

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}'_k + \mathbf{G}^T(\mathbf{q}_k) \lambda_k^{k\#} \quad (21)$$

参变量  $\lambda_{k-1}^{k\#}$  和  $\lambda_k^{k\#}$  的选择是使得区段和节点的非完整约束

$$\mathbf{G}\left(\frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k-1}}{2}\right) \frac{\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1}}{\eta} = 0,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}_k) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k) = 0$$

全部满足.

### 3 数值算例

**算例 1:** 考虑冰刀在一斜平面上的运动 (见参考文献 2 第 1.2.5 节), 其拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2) + x \quad (22)$$

非完整约束为

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0 \quad (23)$$

其动力学方程和约束条件为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \lambda \sin \varphi - 1 &= 0 & \ddot{y} - \lambda \cos \varphi &= 0 \\ \ddot{\varphi} &= 0 & \dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

如果取初始条件为

$$\begin{aligned} x(0) = y(0) = \varphi(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) &= 0, \\ \dot{\varphi}(0) &= \omega \end{aligned} \quad (25)$$

则解析为

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin^2 \omega t}{2\omega^2}, y = \frac{1}{2\omega^2}(\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t) \\ \varphi &= \omega t, \quad \lambda = 2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (26)$$

此系统是保守系统, 能量守恒.

如果取  $\omega = 1$ , 采用时间步长 0.1 和 0.01 积分, 积分区间为 0 - 100. 此问题有解析解, 因此定义如下的状态向量相对误差

$$e_v = \frac{\|\mathbf{v}_{\text{numerical}} - \mathbf{v}_{\text{analytical}}\|_2}{\|\mathbf{v}_{\text{analytical}}\|_2} \quad (27)$$

其中  $\mathbf{v} = \{x, y, \varphi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}\}^T$  为系统的状态向量. 由于此系统能量守恒, 因此定义能量的相对误差为

$$e_H = \frac{H_n - H_0}{H_0} \quad (28)$$

其中  $H_n$  为数值积分给出的  $n\eta$  时刻的能量, 而  $H_0$  为系统的真实能量. 为检验数值结果满足非完整约束的精度, 可将数值积分结果代入约束方程, 比较与 0 之间的误差.

图 1-3 分别给出了状态向量的相对误差, 能量的相对误差和约束的误差. 图 1-3 中上面的曲

线是积分步长为 0.1 的结果,而下面的曲线是积分步长为 0.01 的结果. 两种不同时间步长的积分结果比较表明,积分格式是 2 阶精度. 图 2 表明,能量虽然不严格守恒,但呈现出幅度很小的周期变化. 图 3 表明,积分格式对非完整约束都能严格满足.

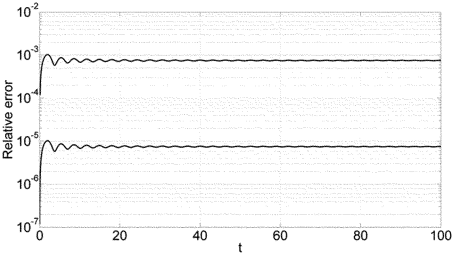


图 1 状态向量的相对误差

Fig. 1 The relative error of the state vector

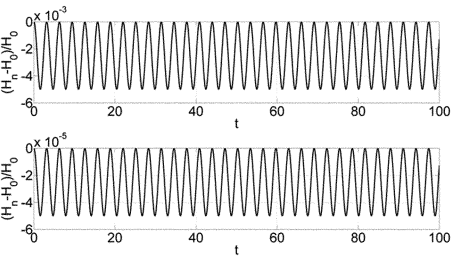


图 2 能量相对误差

Fig. 2 The relative error of the energy

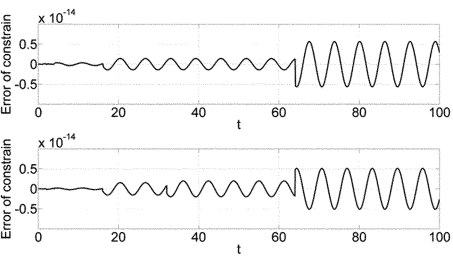


图 3 约束误差

Fig. 3 The error of the nonholonomic constrain

如果改变以上问题的势能函数,即将拉格朗日函数改变为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2) - \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2\right)$$

非完整约束不变. 分别取如下两组初始条件

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = 0, \varphi(0) = 1, \\ \dot{x}(0) &= \cos(1), \\ \dot{y}(0) &= \sin(1), \dot{\varphi}(0) = 1 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, y(0) = \varphi(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, \\ \dot{\varphi}(0) &= 1 \end{aligned} \tag{30}$$

采用梯形格式积分,积分步长为 0.1,积分到 400,则两组初始条件对应的轨迹分别如图 4(a)和(b).

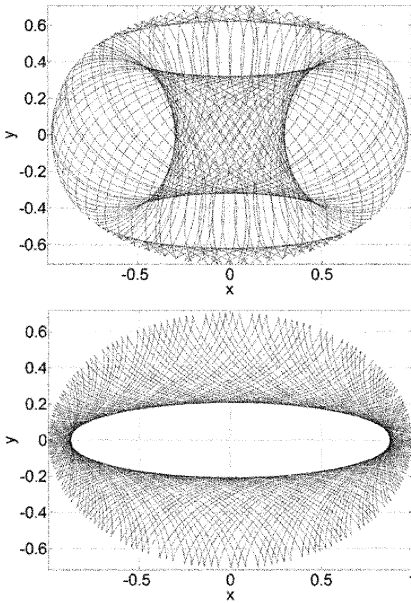


图 4 两种初始条件对应的轨迹

Fig. 4 The orbit for two different initial conditions

**算例 2:** 考虑薄圆盘在粗糙平面上的无滑动滚动问题<sup>[3]</sup>,见示意图 5,其拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L = & \frac{M}{2} \{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2 [ \dot{\theta}^2 + \cos^2(\theta) \dot{\psi}^2 ] - \\ & 2a \sin(\theta) \dot{\theta} [ \dot{x} \cos(\psi) + \dot{y} \sin(\psi) ] + \\ & 2a \cos(\theta) \dot{\psi} [ -\dot{x} \sin(\psi) + \dot{y} \cos(\psi) ] \} + \\ & \frac{A}{2} [ \dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\psi}^2 ] + \frac{C}{2} [ \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi} \cos(\theta) ]^2 - \\ & M g a \sin(\theta) \end{aligned} \tag{31}$$

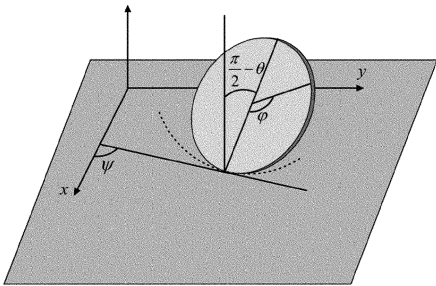


图 5 粗糙平面上的圆盘

Fig. 5 The rolling disk on rough plane

非完整约束为

$$\dot{x} + a\dot{\varphi}\sin(\psi) = 0, \dot{y} - a\dot{\varphi}\cos(\psi) = 0 \tag{32}$$

其中  $M$  为圆盘的质量,  $A$  和  $C$  为圆盘的转动惯量,  $a$  为圆盘的半径,  $g$  为重力加速度. 取  $M = 1, a = 1, A = 0.25, C = 0.5$  和  $g = 10$ ,初始条件为

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = 0, \theta = 1, \psi = 2, \varphi = 0 \\ \dot{x}(0) &= -\dot{\varphi}\sin(\psi), \dot{y}(0) = \dot{\varphi}\cos(\psi), \\ \dot{\theta} &= 0.2, \dot{\psi} = 0.1, \dot{\varphi} = 0.8 \end{aligned} \tag{33}$$

此问题同样是保守系统,能量守恒.

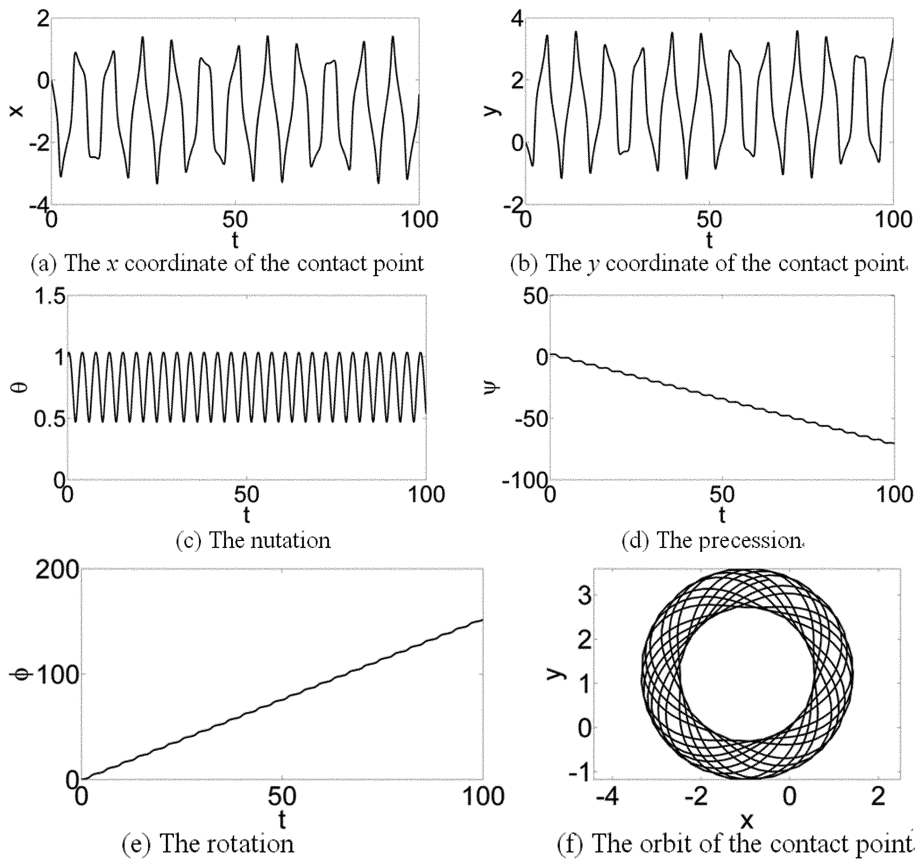


图 6 圆盘滚动问题的数值积分结果

Fig. 6 The numerical results for the rolling disk problem

积分区间和步长为 0 - 100 和 0.1,能量的相对误差和约束误差定义与算例 1 相同. 图 6 给出了此问题的数值积分结果,其中(a) - (e)分别给出了圆盘与地面接触点  $x$  方向坐标、 $y$  方向坐标、章动角、进动角和自转角,(f)给出了圆盘与地面接触点的轨迹,图 7 和 8 给出了能量的相对误差和约束误差. 图 7 表明能量虽然不严格守恒,但呈现出幅度很小的周期变化,这是再次体现了算法的良好性质. 图 8 表明两个非完整约束均能严格满足. 对于本算例,如果采用不同的时间步长积分,并观察能量的相对误差,同样可得算法具有 2 阶精度的结论.

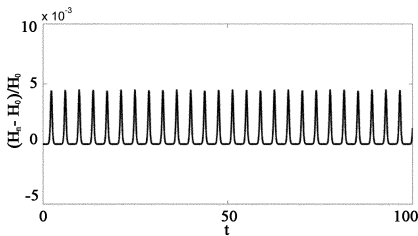


图 7 圆盘滚动问题能量的相对误差

Fig. 7 The relative error of energy for the rolling disk problem

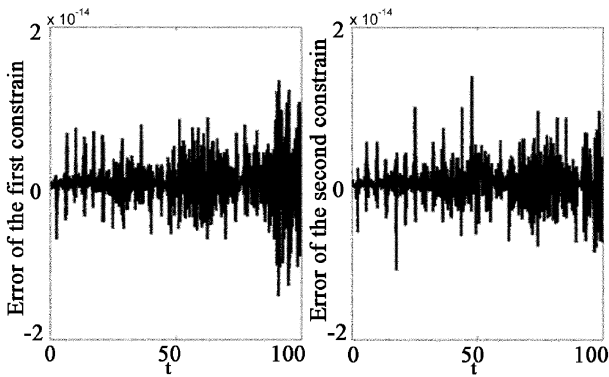


图 8 圆盘滚动问题约束的误差

Fig. 8 The error of the non - holonomic constraints for the rolling disk problem

4 结论

本文给出了一种离散求解非完整约束动力系统的数值方法. 在离散区段内按无约束的动力学积分;而在离散节点处则用约束冲量(Lagrange 乘子向量)让轨道发生转折,给出了非完整约束动力系统的离散积分格式. 积分格式具有 2 阶精度,尤其

是它们都能在积分点处严格满足非完整约束,并且具有良好的长时间积分性能.

## 参 考 文 献

- 1 Goldstein H, Poole C, Safko J. Classical mechanics, third edition. New York: Addison-Wesley, 2002
- 2 Arnold V I, Kozlov V V, Neishtadt A I. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics, third edition. Berlin: Springer-Verlag, 2006
- 3 吴大猷. 理论物理第一册: 古典动力学. 北京: 科学出版社, 2010 (Wu D Y. Theoretical physics, Vol. 1: Classical dynamics. Beijing: Science press, 2010 (in Chinese))
- 4 Koon W S, Marsden J E. The Hamiltonian and Lagrangian approaches to the dynamics of nonholonomic systems. *Reports on mathematical physics*, 1997, 40 (1): 21 ~ 62
- 5 刘世兴, 郭永新, 刘畅. 一类特殊非完整力学系统的辛算法计算. 物理学报, 2008, 57(3): 1311 ~ 1315 (Liu S X, Guo Y X, Liu C. A special nonholonomic mechanical system calculated by symplectic method. *ACTA physica sinica*,

2008, 57(3): 1311 ~ 1315 (in Chinese))

- 6 Cortés J. Energy conserving nonlaminic integrators. Proceedings of the fourth international conference on dynamical systems and differential equations. Wilmington, NC, USA, 2002: 189 ~ 199
- 7 Betsch P. Energy-consistent numerical integration of mechanical systems with mixed holonomic and nonholonomic constraints. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2006, 195: 7020 ~ 7035
- 8 McLachlan R, Perlmutter M. Integrators for nonholonomic mechanical systems. *Journal of nonlinear science*, 2006, 16: 283 ~ 332
- 9 Ferraro S, Iglesias D, Diego M D. Momentum and energy preserving integrators for nonholonomic dynamics. *Nonlinearity*, 2008, 21: 1911 ~ 1928
- 10 钟万勰, 高强. 约束动力系统的分析结构力学积分. 动力学与控制学报, 2006, 4(3): 193 ~ 200 (Zhong W X, Gao Q. Integration of constrained dynamical system via Analytical structural mechanics. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(3): 193 ~ 200 (in Chinese))

# NUMERICAL ALGORITHMS FOR DYNAMIC SYSTEM WITH NON-HOLONOMIC CONSTRAINS\*

Gao Qiang<sup>†</sup> Zhong Wanxie

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Faculty of Vehicle Engineering and Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

**Abstract** In this paper, a numerical method for solving is the non-holonomic system is given. The non-holonomic constrains is satisfied within the time step and the solutions of the system on the discrete time are transformed by using the impulses (Lagrange multiplies). The numerical method is of second order precision and it can satisfy precisely the non-holonomic constraints and gives good performance for long time integration.

**Key words** numerical integration, non-holonomic constrain, parametric variational principle, nonlinear