

输出耦合的复杂网络自适应脉冲同步

尚磊 郑永爱

(扬州大学信息工程学院,扬州 225009)

摘要 应用自适应脉冲控制策略实现输出耦合复杂网络的同步. 通过构造 Lyapunov 泛函, 设计合适的自适应脉冲控制器, 并利用脉冲微分方程理论, 建立了网络的同步准则. 该准则保证了动态网络渐进同步于任意指定的网络中的单独节点的状态. 数值模拟表明所得控制器的有效性.

关键词 复杂网络, 同步, 自适应控制, 脉冲控制, 输出耦合

引言

近年来, 复杂网络的同步问题引起了许多专家的注意, 并且已经取得了丰硕的研究成果. 复杂网络节点的同步一般分为完全同步, 滞后同步, 投影同步, 广义同步等, 其中完全同步的研究最受关注.

复杂网络节点的耦合方式主要分为两种: 节点状态耦合和节点输出耦合. 现有的文献大部分是针对节点状态耦合进行研究的, 例如在文献[1-3]中, 作者对节点状态耦合的复杂网络给出一些同步控制准则, 但很少有文献涉及节点输出耦合的情况. 另一方面, 在实现网络同步的各种各样的控制方法中, 自适应方法^[4-6]和脉冲方法^[7-9]已经成为研究网络同步的重要方法. 脉冲控制方案相对于连续控制方案而言, 由于其控制器结构简单, 只需在离散的时刻加入同步脉冲就能使网络同步, 因此得到广泛应用.

结合自适应方法和脉冲方法两者的优点, 本文对输出耦合的复杂网络提出了新的控制方法 - 自适应脉冲控制方法. 该方法利用 Lyapunov 稳定性理论和脉冲微分方程理论, 针对节点输出耦合的复杂网络给出了一种新的同步准则. 数值模拟表明所提方法的有效性.

1 问题描述

考虑包含个相同节点的复杂动态网络状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i) + \sum_{j=1}^N c_{ij} Ly_j \\ y_i &= Hx_i \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $1 \leq i \leq N$, 第 i 个节点的状态向量为 $x_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$, 非线性光滑函数 $f: R^n \rightarrow R^n$, 每个节点的输出矩阵 $H \in R^{n \times m}$, 内部耦合矩阵 $L \in R^{n \times m}$. 外部耦合矩阵为 $C = (c_{ij})_{N \times N}$, 若从节点 i 到 $j(i \neq j)$ 有连接, 则 $c_{ij} > 0$; 否则 $c_{ij} = 0$. 假设矩阵 C 满足耗散耦合条件: $\sum_{j=1, i \neq j}^N c_{ij} = \sum_{j=1, i \neq j}^N c_{ji} = -c_{ii}$. 若复杂网络(1)达到同步, 则有.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \dots = \lim_{t \rightarrow \infty} x_N(t)$$

设网络(1)的同步流形为:

$$s(t) = f(s(t)) \quad y = Hs(t) \quad (2)$$

式中, $s \in R^n$ 为状态向量, $y \in R^m$ 为输出变量. 当复杂网络(1)达到同步时, 网络节点的状态向量与同步流形的状态向量满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

式中, $\|\cdot\|$ 表示向量的 Euclidean 范数. 这里 $s(t)$ 可以是孤立节点的平衡点、周期轨道, 甚至是混沌轨道.

假设 1 $LH \neq 0$ 且 $\|LH\|_2 > 0$, ρ_{\max} 表示矩阵 $\frac{LH + H^T L^T}{2}$ 的最大特征值.

假设 2 外部耦合矩阵 c_{ij} 的每个元素都是有界的, 即满足 $|c_{ij}| \leq C, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$, 其中 C 为正常数. 根据范数的性质, 容易推导出 $\|\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}\| \leq NC, N$ 为网络中节点的数目.

假设3 非线性函数 $f(x)$ 是 Lipschitz 连续的, 即对于 $x \in R^n, y \in R^n$, 存在一个正常数 α , 满足不等式

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \alpha \|x - y\|_2$$

引理^[12] 对于任意 $x \in R^n$, 若 $P \in R^{n \times n}$ 是正定矩阵, $Q \in R^{n \times n}$ 是对称矩阵, 则有以下不等式成立:

$$\lambda_{\min}(P^{-1}Q)x^T Px \leq x^T Qx \leq \lambda_{\max}(P^{-1}Q)x^T Px,$$

式中 $\lambda_{\min}(P^{-1}Q)$ 和 $\lambda_{\max}(P^{-1}Q)$ 是矩阵 $P^{-1}Q$ 的最小特征值和最大特征值.

2 自适应脉冲同步

设 $e_i = x_i - s$ ($1 \leq i \leq N$), 在自适应脉冲控制下, 系统可表示为:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^N c_{ij} Ly_j + u_i, \quad t \neq t_k$$

$$\Delta x_i = x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-) = U_{ik} = B_{ik}(x_i - s), \quad t = t_k$$

$$y_i = Hx_i$$

$$x_i(t_0^+) = x_{i0} \quad (4)$$

式中, $i = 1, 2, \dots, N$, $x_i(t_k^+)$ 和 $x_i(t_k^-)$ 分别是 $x_i(t_k)$ 在 $t = t_k$ 的左、右极限, 其中 $\{t_k\}$ 满足 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq \dots$, 本文对网络(1)设计了两个控制器, u_i 是自适应控制器, U_{ik} 是脉冲控制器. 在网络实现完全同步时, 耦合项消失:

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} Ly_j + u_i.$$

其中自适应控制器和自适应律设计如下:

$$u_i = -d_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\dot{d} = k_i e_i^T e = k_i \|e_i\|^2, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

其中 k_i 是大于零的任意常数.

下面我们利用网络(1)中各个节点的输出变量及同步流形的输出变量 y_i ($i = 1, 2, \dots, N$)来设计网络(4)的控制器, 而现有大多数文献利用节点的状态变量来设计同步控制器, 导致大量信息在网络间传输而占用了大量的信道资源.

网络(1)在自适应脉冲控制器作用下的同步误差为

$$\dot{e}_i = f(x_i) - f(s) + \sum_{j=1}^N c_{ij} L e_{y_j} + u_i, \quad t \neq t_k$$

$$\Delta e_i = B_{ik} e_i, \quad t = t_k$$

$$e_{y_i} = H e_i$$

$$e(t_0^+) = e_{i0} \quad (5)$$

式中, u_i 是需要设计的自适应控制器, 若控制系统(5)在原点渐近稳定, 就能得到网络(1)与同步流形(2)渐近同步.

定理1: 在假设1, 2, 3成立的前提下, 若 $\delta_k = (CN\rho_{\max} + \lambda(\text{diag}\{\alpha - d_{10}, \alpha - d_{20}, \dots, \alpha - d_{n0}\})) \geq 0$ 成立, 并且满足以下条件:

$$1) \lambda_{\max}((I + B_{ik})^T(I + B_{ik})) = \rho_k < 1$$

$$2) \delta_k(\tau_{k+1} - \tau_k) \leq -\frac{1}{2} \ln(\xi \rho_k)$$

则网络(1)与其同步流形(2)渐近同步.

证明: 因为 $\dot{d}_i = k_i e_i^T e_i, i = 1, 2, \dots, N$, 有 $d_i \geq d_{i0}$. d_{i0} 是 d 的初始值. 构造以下 Lyapunov 泛函: $V =$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^2$$

当 $t \neq t_k$ 时,

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{e}_i^T e_i + e_i^T \dot{e}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(f(x_i) - f(s) +$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} L e_{y_j} + u_i)^T e_i + e_i^T (f(x_i) - f(s) +$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} L e_{y_j} + u_i)] \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\alpha \|e_i\|_2^T \|e_i\|_2 +$$

$$\|e_i\|_2^T \alpha \|e_i\|_2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} (e_i^T H^T L^T e_j +$$

$$e_j^T L H e_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (2d_i e_i^T e_i) = \sum_{i=1}^N \alpha \|e_i\|_2^2 +$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} e_i^T \frac{H^T L^T + L H}{2} e_j - \sum_{i=1}^N (d_i e_i^T e_i) \leq$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha \|e_i\|_2^2 + CN \sum_{i=1}^N \rho_{\max} e_i^T e_i - \sum_{i=1}^N (d_i e_i^T e_i) =$$

$$\sum_{i=1}^N (CN\rho_{\max} + \alpha - d_i) e_i^T e_i \leq 2(CN\rho_{\max} +$$

$$\lambda_{\max}(\text{diag}\{\alpha - d_{10}, \alpha - d_{20}, \dots, \alpha - d_{n0}\})) V = 2\delta_k V$$

当 $t = t_k$ 时, 有

$$V(e(t_k)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T (I + B_{ik})^T (I + B_{ik}) e_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N$$

$$\lambda_{\max}((I + B_{ik})^T (I + B_{ik})) e_i^T e_i = \rho_k V(e(t_k^-))$$

因此, 我们可以得到下面的比较系统:

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = 2\delta_k \omega(t), & t \neq t_k \\ \omega(t_k^+) = \rho_k \omega(t_k), \\ \omega(t_0^+) = \omega(0) \geq 0 \end{cases}$$

因为 $\delta_k \geq 0, 2\delta_k(t_{k+1} - t_k) \leq -\ln(\xi \rho_k)$, 比较定理^[13]稳定的条件已经满足, 我们得出误差系统是渐近稳定的, 网络(1)和(2)在自适应脉冲控制器作用下达到同步.

3 数值仿真

下面以 Lorenz 系统作为复杂网络的节点进行数值仿真. Lorenz 系统的动力学方程为:

$$\dot{x}_i = Ax_i + \varphi(x_i) \quad (6)$$

其中

$$x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}, \varphi(x_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \end{bmatrix}$$

此时, Lorenz 系统有一个混沌的吸引子, 呈现混沌现象. 为了方便起见, 系统的同步流形也取了一个 Lorenz 系统.

对于原系统

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^N c_{ij} Ly_j,$$

$$y_i = Hx_i$$

在仿真中, 取 $f(x_i) = Ax_i + \varphi(x_i)$, 由于混沌吸引子在一定范围内是有界的, 因此 Lorenz 混沌的状态满足 $\|x_{ij}\| \leq M (j=1, 2, 3, \text{常数 } M > 0)$, 从而使非线性函数 $f(x_i) = Ax_i + \varphi(x_i)$ 满足假设 3, 即

$$\begin{aligned} \|f(x_i) - f(x_j)\|_2 &= \|Ax_i - Ax_j + \varphi(x_i) - \varphi(x_j)\|_2 \leq \|Ax_i - Ax_j\|_2 + \|\varphi(x_i) - \varphi(x_j)\|_2 \\ &\leq \|A\|_2 \|x_i - x_j\|_2 + \sqrt{(x_{j1}x_{j3} - x_{i1}x_{i3})^2 + (x_{i1}x_{i2} - x_{j1}x_{j2})^2} \\ &\leq (\|A\|_2 + 2M) \|x_i - x_j\|_2 \end{aligned}$$

取节点数目 N 为 10, 外部耦合矩阵 $C = (c_{ij})_{10 \times 10}$ 要满足耗散耦合条件, 内部耦合矩阵 L 和输出矩阵 H 都是三阶的对角阵, $L = \text{diag}(5, 6, 7)$, $H = \text{diag}(4, 3, 2)$. $\|LH\|_2 = 20 > 0$ 满足假设 1, 计算得 $\rho_{\max} = \lambda_{\max}(\frac{LH + H^T L^T}{2}) = 20$. 设计脉冲控制器, 选取,

$$B_{ik} = \text{diag}\{-0.99, -0.99, -0.99\},$$

使得

$$\rho_{\max} = \lambda_{\max}((I + B_{ik})^T (I + B_{ik})) = 0.009 < 1.$$

$$\begin{aligned} \delta_k &= (CN\rho_{\max} + \lambda_{\max}(\text{diag}\{\alpha - d_{10}, \alpha - d_{20}, \dots, \alpha - d_{n0}\})) = 227, \text{取 } \xi = 1, \text{由于 } \delta_k \geq 0, 2\delta_k(t_{k+1} - t_k) \\ &\leq -\ln(\xi\rho_k), \text{根据定理 1 得 } t_{k+1} - t_k \leq -\frac{\ln(\xi\rho_k)}{2\delta_k} = 0.0203, \end{aligned}$$

所以 $0 \leq t_{k+1} - t_k \leq 0.0203$, 选取 $t_{k+1} - t_k = 0.01$, 自适应律中的设计常数 k_i 为大于零的任意数, 简单起见, 取 $k_i = 1$. 系统状态 x 和自适应律 d_i (保证 $d_i \geq d_{i0}$) 的初值都是随机选取的. 仿真结果如下所示: 图 1 中, 结果很明显, 误差很快收敛到零. 图 2 中, 自适应律是当误差为零后, 趋于一个稳定的常数值.

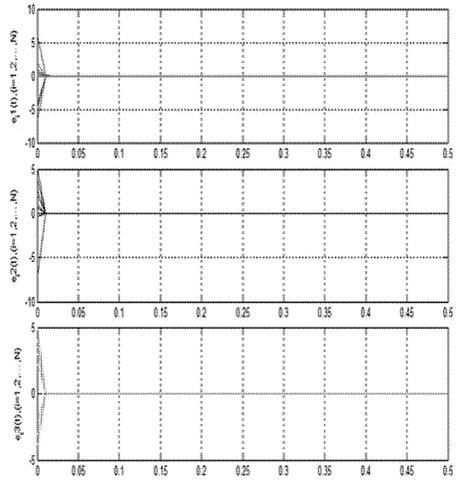


图 1 自适应脉冲控制的同步误差

Fig. 1 the synchronization errors of Adaptive - impulsive control

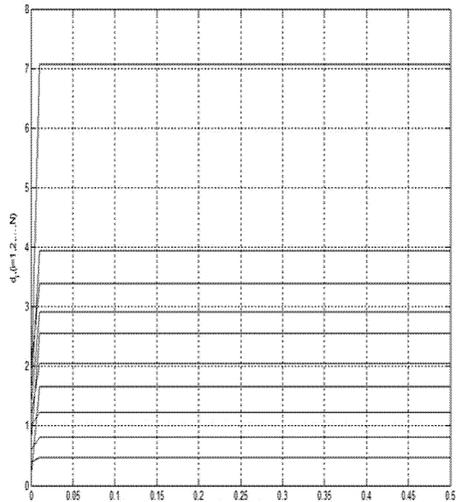


图 2 自适应律

Fig. 2 Adaptive law

4 结语

本文针对节点输出耦合的复杂网络, 利用自适应脉冲控制方法提出了一种新的同步控制方案. 利用脉冲微分方程理论、Lyapunov 泛函, 设计出合理的自适应和脉冲控制器使网络的各个节点达到同步. 以 10 个节点的复杂网络为例进行数值仿真, 仿真结果表明所设计的同步控制器能够快速使得网络渐近同步.

参 考 文 献

- Jiang G P, Tang K S W, Chen G R. A state-observer-based approach for synchronization in complex dynamical net-

- work. *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I. Regular Papers*, 2006, 52(12):2739 ~ 2745
- 2 Wu Jianshe, Jiao Licheng. Observer-based synchr-onization in complex in dynamical networks with no-nsymmetric coupling. *PhysicaA*, 2007, 386:469 ~ 480
 - 3 樊春霞, 蒋国平. 输出耦合的复杂网络自适应牵制同步. 应用科学学报, 2010:0255 ~ 8297 (Fan C X, Jiang G P. Adaptive pinning synchronization for complex network coupled with the outputs. *Journal of applied sciences*, 2010: 0255 ~ 8297
 - 4 Jin Z, Jun A L, Jin H L. Adaptive synchronization of an uncertain dynamical network. *IEEE Transactions on autom-atrol*, 2006, 51(4):44 ~ 52
 - 5 Yang Y Q. The adaptive control of synchronization of a time-vary coupled complex network. *Software world*, 2010: 1008 ~ 0570
 - 6 罗群, 吴薇, 李丽香, 杨义先, 彭海朋. 节点含时滞的不确定复杂网络的自适应同步研究, 物理学报, 2008, 57(3): 1529 ~ 1534 (Luo Q, Wu W, Li L X, Yang Y X, Peng H P. Adap-tive synchronization research on the uncertain compl-ex networks with time-delay. *Acta physica sinica*, 2008, 57(3):1529 ~ 1534 (in Chinese))
 - 7 K Li, C H Lai. Adaptive-impulsive synchronization of uncertain complex dynamical networks. *Physics Letters A*, 2008, 372: 1601 ~ 1606
 - 8 曾长燕, 孙海, 田立新. 基于自适应-脉冲控制方法实现时变耦合驱动-响应复杂网络的投影同步. 物理学报, 2008, 59(3):5288 ~ 5292 (Zeng C Y, Sun H, Tian L X. Adative-impulsive control for projective synchronization in the drive-response complex network with time-varying coupling. *Acta physica sinica*, 2008, 59(3):5288 ~ 5292 (in Chinese))
 - 9 樊春霞, 蒋国平, 程艳云. 耦合时延复杂网络的无源脉冲同步. 应用科学学报, 2007, 25(6):594 ~ 597 (Fan C X, Jiang G P, Chen Y Y. Passive and impulsive synchroniza-tion of complex networks with coupling delays. *Journal of applied sciences*, 2007, 25(6):594 ~ 597 (in Chinese))
 - 10 Zhao Y, Yang Y. The impulsive control synchronization of the drive-response complex system. *Phys. Lett. A*, 2008, 372:7165 ~ 7171
 - 11 Zhang X H, Li D. Delay-dependent globally exponential stability criteria for static neural networks: an LMI approach. *IEEE Trans. Circuits Syst. II-Express Briefs*, 2009, 56(7):605 ~ 609
 - 12 Huang Lin. Linear algebra in systems and control theory. China: Science press, 1984:211 ~ 214
 - 13 T Yang. Impulsive Control Theory. Springer-Verlag. ber-lin. 2001
 - 14 张伟, 张刚. 复杂网络的同步. 动力学与控制学报, 2009, 7(1):1 ~ 4 (Zhang W, Zhang G. Impulsive syn-chronization of complex network. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(1):1 ~ 4 (in Chinese))

ADAPTIVE-IMPULSIVE SYNCHRONIZATION OF COMPLEX NETWORKS COUPLED WITH THE OUTPUTS

Shang Lei Zheng Yong-ai

(College of Information Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China)

Abstract The adaptive-impulsive control strategy is used to realize the synchronization of a complex network coupled with output. The suitable adaptive-impulsive controller is designed by constructing Lyapunov function. Some generic criteria for synchronization are established based on the theory of impulsive differential equation. The criteria guarantee that the dynamical network asymptotically synchronizes at the individual node state in arbitrary specified network. Numerical simulations show the effectiveness of the proposed controllers.

Key words complex networks, synchronization, adaptive control, impulsive control, the output coupled