

# 基于胞参考点映射法对转子/定子碰摩响应的全局分析\*

高文辉 郭旭 江俊

(西安交通大学强度与振动教育部重点实验室,西安 710049)

**摘要** 利用胞参考点映射法对两自由度(四维)分段光滑的转子/定子碰摩模型的全局响应特性进行了计算,着重对解析分析得到的碰摩系统典型的吸引子共存现象进行了验证,确定了相应吸引子的吸引域.此外,通过计算转子/定子碰摩系统全局特性随系统参数变化的演化特点,考察了吸引子与其吸引域边界对参数变化的敏感性,讨论了其对实际转子/定子碰摩系统响应的含义.

**关键词** 胞参考点映射法, 转子/定子碰摩, 全局分析, 吸引域, 吸引子共存

## 引言

减小转子与定子之间的间隙是提高旋转机械运行效率和经济性的一项重要手段.但是,由此却大大增加了旋转机械动静件碰摩的故障率.发生碰摩会导致碰摩局部发热和严重磨损,诱发机械的剧烈振动,严重时会出现碰摩反向涡动失稳而造成整个机器破坏<sup>[1]</sup>.因此,研究转子系统的碰摩复杂非线性动力学行为以及确定其与系统参数间的关系,对优化转子设计、避免发生碰摩造成严重损失有积极的指导意义.鉴于转子失稳造成巨大的损失,人们对转子运动进行了广泛的研究,发现造成转子失稳的种类很多,如碰摩失稳、油膜失稳、内耗失稳、干摩失稳等<sup>[2]</sup>,其中转子与定子碰摩是造成转子失稳的重要原因之一.深入研究转子与定子间的全局碰摩响应,对于控制和防止碰摩事故的发生及其造成的破坏,提高转子的设计、制造水平具有非常重要的现实意义,也是旋转机械制造发展的迫切需要.

## 1 全局计算方法

胞映射法是 Hsu 在上世纪 80 年代提出的进行全局分析的有力工具,可大大的提高了计算的效率,受到研究工作者的重视,经过 20 多年的发展,胞映射法先后有多种版本,如简单胞映射(SCM)法和广义胞映射(GCM)法<sup>[3]</sup>,胞参考点映射

法<sup>[4]</sup>,图胞映射法<sup>[5]</sup>,以及一些改进的胞映射法<sup>[6]</sup>等.然而随着研究问题的复杂化,系统的维数也越来越高,所需处理的数据急剧增加,由于计算机硬件的限制,需要对以往的全局分析方法加以改进.

其中,胞参考点映射法(PMUCR法)是一种分析非线性动力系统全局特性的数值方法,它结合了胞映射方法的高效性和点映射法的精确性,并且易于推广到高维空间.与其它胞映射法相比,它不需要在相空间每个胞中选取初始点,可以采用动态存储方法,只需记录轨迹经过的胞,减少对内存的消耗.其不仅可以精确得到系统的吸引子和吸引域,也可以基于胞参考系中每个胞收集到的轨迹演化信息确定出与系统不稳定不变集对应的自循环胞集,结合运用 PIM-simplex<sup>[7]</sup>等方法,可以计算吸引域中和其边界上的常规型和混沌型鞍型不变集.

本文应用胞参考点映射法对两自由度(四维)分段光滑的转子/定子模型的全局响应特性进行了分析,以验证文献[8]中理论分析的正确性和发现的一些新的现象.

## 2 模型与运动方程

本文采用改进的 Jeffcott 转子模型,它由一个支撑在无质量转轴中间的质量为  $m$  的转盘构成.转子的质心与其几何中心的距离为  $e$ .转轴的刚度为  $k_s$ ,转子和定子之间的间隙为  $r_0$ .定子被看作是刚性支撑的径向环形弹簧,其刚度为  $k_b$ (见图 1).

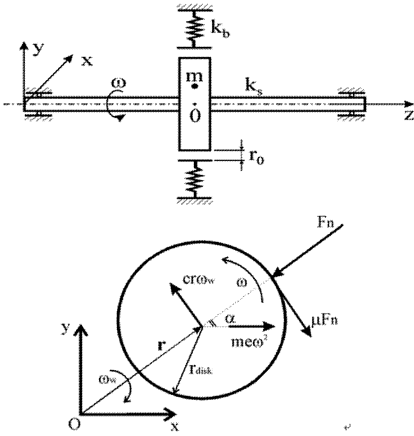


图1 上:含定子间隙的 Jeffcott 转子模型示意图  
下:反向涡动时转子的受力图

Fig.1 Schematic diagram of Jeffcott rotor with the stator clearance (upper). The section of the rotor at the position of disk to show the forces applied on the rotor during the backward whirl of the rotor (lower)

若忽略定子的惯性,且不考虑陀螺效应,转子/定子系统的无量纲运动方程可表示为:

$$X'' + 2\zeta X' + \beta X + \Theta(1 - \frac{R_0}{R})(X - \mu \text{sign}(V_{rel})Y) = \Omega^2 \cos \Omega \tau$$

$$Y'' + 2\zeta Y' + \beta Y + \Theta(1 - \frac{R_0}{R})(\mu \text{sign}(V_{rel})X + Y) = \Omega^2 \sin \Omega \tau$$

$$V_{rel} = R_{disk} \Omega + R \omega_b$$

其中: $X, Y$ 为圆盘中心的位移, $\zeta$ 为阻尼比, $\beta$ 为转子刚度系数, $R_0$ 为间隙, $R_{disk}$ 为圆盘半径, $\Omega$ 为转子转速, $\omega_b$ 为转子涡动转速, $V_{rel}$ 为转子/定子接触时接触点的相对速度.无量纲化时间为 $\tau = \omega_2 t$ ,其中: $\omega_2 = \sqrt{k_b/m}$ . Heaviside 函数

$$\Theta = \begin{cases} 0 & R - R_0 < 0 \\ 1 & R - R_0 \geq 0 \end{cases} \quad \text{with } R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

在文献[8]中对上述方程进行了解析求解,并研究了解的稳定性,得到了无碰摩响应,同频全周碰摩,局部碰摩和反向涡动在参数平面 $\Omega - \mu$ 上的分布区域,并且得到转子/定子碰摩系统(1)的全局响应分析结果,如下图2所示.

其中, $\Omega_l$ 和 $\Omega_u$ 是无摩擦临界转速,SN和HP是同频全周碰摩发生鞍结分岔和Hopf分岔的分岔曲线,DF是出现反向涡动的边界线,DW是局部碰摩消失干摩擦失稳发生的边界线.用数字标出的区域是不同响应的共存区域,其中“0”是无碰摩和反

向涡动的共存区域;“1”是同频全周碰摩和反向涡动的共存区域;“2”是局部碰摩和反向涡动的共存区域;“3”是无碰摩和同频全周碰摩的共存区域;“4”是无碰摩、同频全周和反向涡动的共存区域.

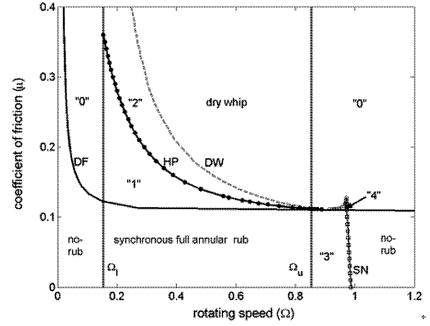


图2 转子/定子系统在 $\Omega - \mu$ 面上的全局响应特性,其中 $\zeta = 0.05, \beta = 0.04, R_0 = 1.05, R_{disk} = 20R_0$

Fig.2 Global response characteristics on  $\Omega - \mu$  plane with  $\zeta = 0.05, \beta = 0.04, R_0 = 1.05, \text{ and } R_{disk} = 20R_0$

在下面的讨论中,主要考察在 $\Omega - \mu$ 参数平面内特定参数下各个共存区域内解的分布及其吸引域情况,以此对理论进行验证.

### 3 碰摩全局响应的计算

在下面的分析中,以状态空间中子空间 $X = [x, y, \dot{x}, \dot{y}]^T \in \{X | x_1 \in (-6, 6), x_2 \in (-6, 6), x_3 \in (-6, 6), x_4 \in (-6, 6)\}$ 为研究区域,在其均匀分布 $60 \times 60 \times 60 \times 60$ 个胞作为胞参考空间.在胞参考点映射法中,初值可以只在研究区域内的一个子区域内取值,本文在四维空间中的研究区域内的一个平面上取 $60 \times 60$ 个初值点.下面计算中,系统固定参数的值为: $\zeta = 0.05, \beta = 0.04, R_0 = 1.05, R_{disk} = 20R_0$ .另外,在下面的吸引子相图中,虚线代表转子/定子之间的间隙,而不同颜色的实线代表转子在不同响应下的中心轨迹.

#### (1) 共存区域“0”

图3(a)为转子做无摩擦的同频正向涡动和反向涡动响应的轨迹.转子反向涡动频率明显高于其自转频率.(b)、(c)分别为在 $(x, y), (x, \dot{y})$ (其余二维取0)平面上的吸引域图.由图可见:无碰摩区域在 $(x, y), (x, \dot{y})$ 平面上关于原点对称,这与方程(1)表现出的较强对称性一致.虽然此时转速很小,但反向涡动已经存在.

#### (2) 共存区域“1”

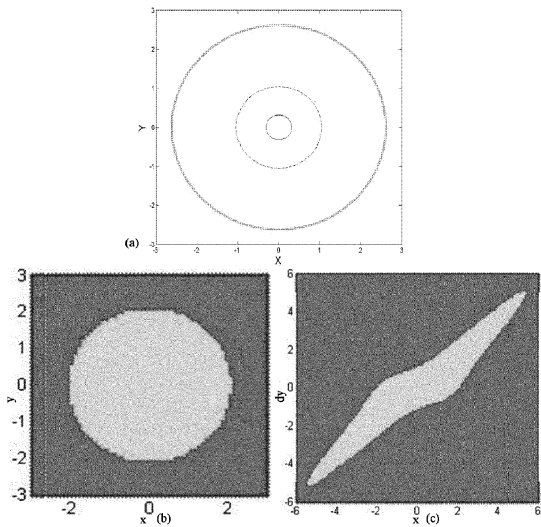


图3  $\mu=0.25, \Omega=0.10$  时的吸引子及吸引域; (a)小圆为无碰摩响应, 大圆为反向涡动响应, 虚线表示间隙; (b)、(c)为不同初值平面内的吸引域图, 其中深色、浅色分别表示反向涡动和无碰摩运动的吸引域

Fig. 3 Attractors and domains of attraction when  $\mu=0.25, \Omega=0.10$   
 (a) The smaller solid circle stands for no-rub motion. The larger for dry friction backward whirl, dashed line for the clearance;  
 (b) - (c) domains of attraction for different initial value planes. The dark and light colors represent the domains of attraction for dry friction backward whirl and no-rub motion

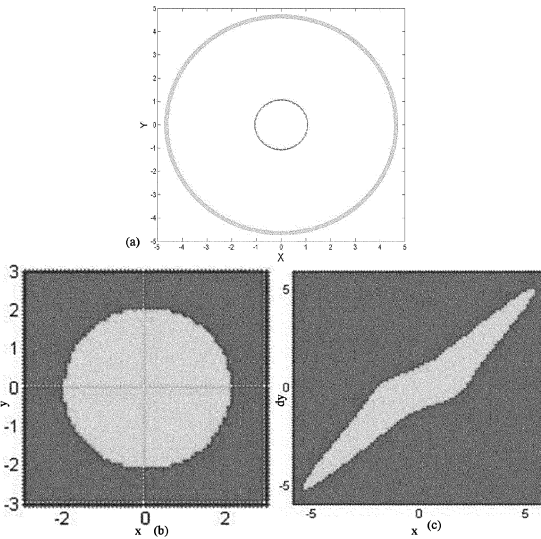


图4  $\mu=0.25, \Omega=0.20$  时的吸引子及吸引域; (a) 小圆为同频全周碰摩, 大圆代表反向涡动, (b)、(c) 为不同参数平面内的吸引域图, 其中深色、浅色分别表示反向涡动、同频全周运动的吸引域

Fig. 4 Attractors and domains of attraction when  $\mu=0.25, \Omega=0.20$   
 (a) The smaller solid circle stands for synchronous full annular rub. The larger for dry friction backward whirl. (b) - (c) Domains of attraction for different initial value planes. The dark and light colors represent the domains of attraction for dry friction backward whirl and synchronous full annular rub

区域“1”内的吸引子及吸引域如图4所示。在

$\mu=0.25, \Omega=0.20$  时, 转子响应为同频全周碰摩和反向涡动4(a)。反向涡动频率仍高于转子自转频率。由吸引域图(b)、(c)看, 与图3中的相比, 吸引域几乎没有变化, 只是图3中的无碰摩响应由图4中的同频全周碰摩取代。

(3) 共存区域“2”

此区域内转子可能做局部碰摩运动或反向涡动运动, 相应的吸引子和吸引域如图5所示, (a) 为准周期的局部碰摩响应和高频的反向涡动轨迹图。由吸引域图(b)、(c)得, 吸引域图与上面两种情况相比没有明显变化, 可知无量纲转速不影响吸引域分布。

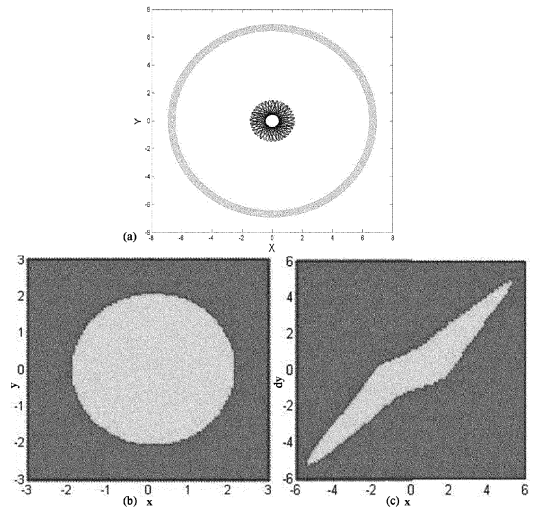


图5  $\mu=0.25, \Omega=0.30$  时的吸引子及吸引域; (a) 深色代表局部碰摩, 浅色为反向涡动, (b)、(c) 不同参数平面内的吸引域图, 其中深色、浅色分别表示反向涡动、局部碰摩的吸引域

Fig. 5 Attractors and domains of attraction when  $\mu=0.25, \Omega=0.30$   
 (a) Partial rub in dark color, dry friction backward whirl in light color  
 (b) - (c) Domains of attraction on different initial value planes. The dark and light colors represent the domains of attraction for dry friction backward whirl and partial rub

(4) 共存区域“3”

在此区域内有无碰摩响应和同频全周碰摩响应共存, 且会有突跳现象发生。如:  $\mu=0.08$  时, 当转速由  $\Omega=0.854$  增加到  $\Omega=0.993$  之前, 转子做同频全周碰摩(图6(a)外圆)。但当转速由  $\Omega=1.0$  递减至  $0.854$  之前, 转子一直做无碰摩涡动, 但是涡动的幅值较大, 此时转子几乎与定子接触(图6(a)小圆)。此时无碰摩运动的吸引域很小, 图6(b)、(c)为参数  $\mu=0.08, \Omega=0.95$  时,  $(\dot{x}, \dot{y}) = (0.11, -1.1)$ ,  $x-y$  平面上的吸引域和  $(y, \dot{x}) = (-0.12, 0.11)$ ,  $x-\dot{y}$  平面上的吸引域分布情况。经数值计算发现: 无碰摩运

动受到较小的扰动就有可能转向做同频全周运动,说明此区域内的无碰摩运动是不稳定的.

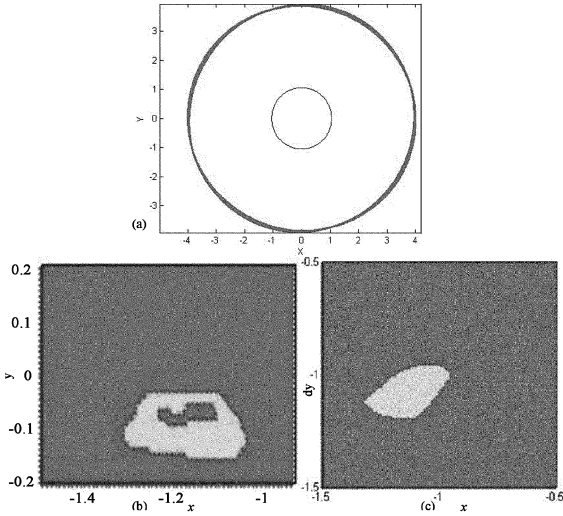


图6  $\mu=0.08, \Omega=0.95$  时吸引子及吸引域; (a) 小圆为无碰摩响应, 大圆为同频全周碰摩, (b)、(c) 为不同参数平面内的吸引域图, 其中深色、浅色分别表示同频全周碰摩、无碰摩响应的吸引域

Fig. 6 Attractors and domains of attraction when  $\mu=0.08, \Omega=0.95$

(a) The smaller solid circle stands for synchronous full annular rub.

The larger for no-rub motion; (b)-(c) Domains of attraction on different initial value planes. The dark and light colors represent the domains of attraction for synchronous full annular rub and no-rub motion

### (5) 共存区域“4”

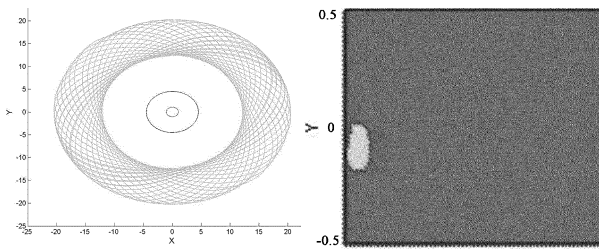


图7  $\mu=0.106, \Omega=0.95$  时的吸引子吸引域; (a) 吸引子图, 从里到外依次为无碰摩响应, 同频全周碰摩和反向涡动运动, (b)  $x-y$  平面上的吸引域图, 其中深色、浅色分别表示同频全周碰摩和无碰摩响应的吸引域

Fig. 7 Attractors and domains of attraction when  $\mu=0.106, \Omega=0.95$  (a) Attractors, no-rub motion, synchronous full annular rub, dry friction backward whirl from inner to outer. (b) Domains of attraction on  $x-y$  plane. The dark and light colors represent the domains of attraction for synchronous full annular rub and no-rub motion

此时有三个响应共存: 无碰摩响应, 同频全周碰摩响应和反向涡动响应(如图7(a)). 由于转速较大, 响应的幅值也很大. 此时同频全周运动的吸引域很大, 相对来说, 无碰摩响应和反向涡动响应的吸引域很小, 在所取的初值平面内不一定同时含

有三个响应的吸引域. 在有的初值平面内也有可能只含有一个响应的吸引域; 图7(b)为  $\mu=0.106, \Omega=0.95, (x, y)=(0.11, -0.99)$  时,  $x-y$  平面上同频全周碰摩和无碰摩响应的吸引域分布情况.

### (6) 鞍结分叉线后的区域

该区域内理论仅预测无碰摩运动的存在, 但通过全局分析计算发现: 在该区域内还存在两个局部碰摩运动, 一个振幅较小, 一个振幅较大, 如图8所示. 振幅较大的响应在  $\Omega \approx 1.35$  时消失, 而振幅较小的局部碰摩响应继续存在.

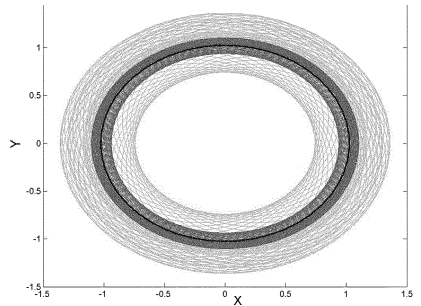


图8  $\mu=0.08, \Omega=1.20$  时的吸引子图, 黑色圆代表无碰摩运动, 红色圆环代表小振幅局部碰摩, 绿色圆环代表大振幅局部碰摩

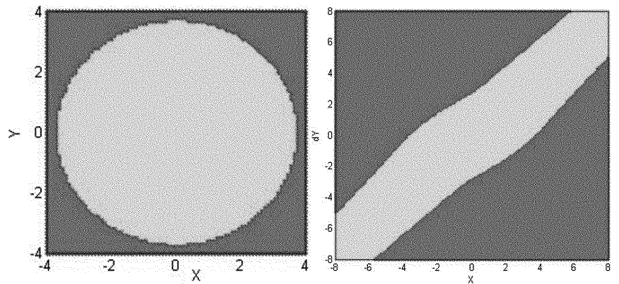


图9  $\mu=0.15, \Omega=0.20$  时的吸引域; (a)-(b) 不同参数平面内的吸引域图, 其中深色、浅色分别表示反向涡动、同频全周碰摩的吸引域

Fig. 9 Domains of attraction when  $\mu=0.15, \Omega=0.20$  (a)-(b) domains of attraction for different initial value planes. The dark and light colors represent the domains of attraction for dry friction backward whirl and synchronous full annular rub

### (7) 吸引域随参数的变化

由以上各图的吸引子相图可以看到, 当固定参数  $\mu=0.25$ , 随着转速  $\Omega$  的增大, 响应的幅值也增大, 但转速对吸引域几乎没有影响; 但当固定参数  $\Omega$  时, 随着摩擦系数  $\mu$  的增大, 吸引域有明显变化. 如:  $\Omega=0.20$  时,  $\mu$  由 0.15 变化到 0.25 (由图9到图4), 同频全周碰摩的吸引域明显变小. 可见较大的摩擦系数更易引起反向涡动的发生.

## 4 结论

利用胞参考点映射法对分段光滑转子/定子碰摩系统在四维相空间中进行了全局数值计算分析,得到如下结论:(1)验证了文献[8]中理论的正确性,得到了转子/定子系统在参数平面 $\Omega-\mu$ 各共存响应区域内的吸引子及吸引域分布图。(2)发现了该碰摩系统中存在着文献[8]不曾解析得到的响应—两个不同幅值的局部碰摩响应,并得到了此响应存在的大致参数范围。(3)研究发现:摩擦系数和无量纲转速对系统碰摩响应有重要影响,较大的摩擦系数使反向涡动更容易出现,而较大的转速使响应幅值增大;(4)即使在较小的转速下,反向涡动已经存在,并且其吸引域占据了相空间较大的空间;从吸引域图上发现:当给转子以趋于减小挠度或同转子自转方向相同的初始状态时有利于避免反向涡动的出现。

## 参 考 文 献

1 尚志勇,江俊,张小龙. 利用交叉耦合效应抑制转子系统碰摩的控制方法. 动力学与控制学报,2008,6(4): 337 ~ 342 (Shang Z Y, Jiang J, Zhang X L. Control methods using the cross-coupling effects for active suppression of rotor rubbing. *Journal of Dynamics and Control*,

2008,6(4): 337 ~ 342 (in Chinese))  
 2 Black H F. Interaction of a whirling rotor with a vibrating stator across a clearance annulus. *International Journal Mechanical Engineering Science*, 1968, 10: 1 ~ 12  
 3 Hsu C S. Cell-to-Cell mapping: A method of global analysis for nonlinear systems. New York, Berlin, Heidelberg, Vienna, Tokyo: Springer-Verlag, 1987:1 ~ 352  
 4 Jiang J, Xu J X. A method of point mapping under cell reference method for global analysis of nonlinear dynamical systems. *Physics Letters A*, 1994,188: 137 ~ 145  
 5 徐健学,洪灵. 全局分析的广义胞映射图论方法. 力学学报, 1999,31(6): 724 ~ 730 (Xu J X, Hong L. Generalized cell mapping digraph method for global analysis. *Acta Mechanica Sinica*, 1999,31(6): 724 ~ 730 (in Chinese))  
 6 贺群,徐伟,李爽,肖玉柱. 图胞映射的一种改进方法. 物理学报,2008,57(2):743 ~ 748 (He Q, Xu W, Li S, Xiaoyao Y Z. A modified digraph cell mapping method. *Acta Physica Sinica*, 2008,57(2): 743 ~ 748 (in Chinese))  
 7 Pablo Moresco, Silvina Ponce Dawson. The PIM-simplex method: an extension of the PIM-triple method to saddles with an arbitrary number of expanding directions. *Physica D*, 1999,126: 38 ~ 48  
 8 Jun Jiang. Determination of the global responses characteristics of a piecewise smooth dynamical system with contact. *Nonlinear Dynamics*, 2009,57(3): 351 ~ 361

# STUDY ON THE GLOBAL RESPONSE CHARACTERISTICS OF A ROTOR/STATOR CONTACT SYSTEM THROUGH POINT MAPPING UNDER CELL REFERENCE METHOD\*

Gao Wenhui Guo Xu Jiang Jun

(MOE Key Laboratory of Strength and Vibration, School of Aerospace Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract** The method of Point Mapping under Cell Reference was used to compute the global response characteristics of a piecewise-smooth rotor-to-stator contact system in order to verify the theoretical analytical results, particularly computing the coexistence of attractors and their basins of attraction. In addition, the sensitivity of the system parameters on the boundaries of the basins of attraction is examined and its meaning for the responses of actual rotor/stator contact systems is discussed.

**Key words** point mapping under cell reference method, rotor/stator rubbing, global analysis, basins of attraction, coexistence of attractors

Received 22 December 2010, revised 16 April 2011.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10872155)