

# 基于两种齿轮碰撞振动的实验和数值分析\*

苏林玉 温建明

(同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092)

**摘要** 基于两种齿轮碰撞模型进行数值和实验的研究比较: (1) 含啮合间隙的刚性碰撞齿轮系统, 假设轮齿间的碰撞在瞬间完成, 边界为刚性; (2) 含弹性约束和啮合间隙的弹性碰撞齿轮系统, 空隙范围内部齿轮自由运动, 边界为弹性, 用无质量弹簧-阻尼器描述. 文中主要通过实验研究对两种齿轮接触模型的动力学响应进行分析比较: 首先用实验结果验证数值仿真的正确性, 之后对两种不同的齿轮传动系统在不同参数下的实验数据和仿真结果分别进行比较, 并对两种不同的齿轮传动系统所展现的复杂动力学现象进行分析.

**关键词** 齿轮传动, 碰撞, 实验, 频谱

## 引言

齿轮传动由于其高效率和工作可靠等优点广泛的应用于各类机械系统中, 传动过程中所产生的噪声和振动主要来自于两个方面. 一是在轻载或者空载的情况下, 齿侧间隙所引发的振动, 称之为“拍击”(Rattling); 二是在重载下, 考虑轮齿变形而导致的时变刚度和动载荷称之为“锤击”(Hammering)<sup>[1,2]</sup>. Rattling 振动是产生齿轮箱噪声的主要来源之一, 因此特别引人注意. F. Pfeiffer<sup>[3]</sup> 教授在 Fermi 实验的启发下建立了离散的 Rattling 振动模型, 指出齿轮的拍击可以用碰撞理论解释; 冯奇<sup>[4,5]</sup> 和温建明<sup>[5,6]</sup> 对 F. Pfeiffer 建立的确定性模型进行摄动, 建立了齿轮拍击振动的随机模型, 并很好的揭示了齿轮拍击振动的随机混沌特性. 实验方面, F. Pfeiffer 和 K. Karagiannis<sup>[7]</sup> 设计了单级齿轮传动实验装置, 孙宜强对实验装置进行改进, 实现了随机阻尼<sup>[2]</sup> 的加载. 本文考虑齿式弹性联轴器工作原理, 在 Rattling 实验的基础上, 根据弹性联轴器原理, 在两轮齿之间插入弹性材料. 根据实验模型建立带弹性边界的齿轮传动模型: 假设两个轮齿的碰撞过程需要一定时间完成, 用无质量弹簧-阻尼器来描述两轮齿之间的变形和能量的耗散, 也就是接触-变形-恢复-自由这样一个往复的过程, 从力学模型和实验两方面上对齿轮啮合的刚性碰撞和弹性碰撞<sup>[8]</sup> 进行研究比较.

## 1 力学模型

### 1.1 刚性碰撞

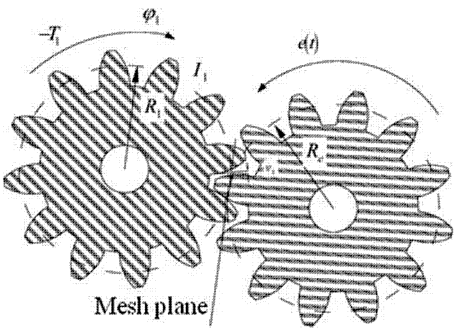


图1 齿轮刚性碰撞力学模型

Fig. 1 Mechanical model for rigid impact of gear

齿轮 Rattling 振动模型由 Pfeiffer 于 1988 年建立, 其中  $e(t)$  为主动轮的角位移,  $v_1$  为齿侧间隙,  $\varphi_1$  为从动轮的角位移, 随角位移变化而变化,  $R_{be}$  和分别主动轮和从动轮的半径,  $T_1$  为从动轮所受常阻力矩,  $I_1$  为从动轮的转动惯量. 根据图 1 齿轮 Rattling 振动的离散模型可以看出, 由于间隙的存在可以将整个运动过程分为自由相和接触相: 自由相即从动轮在间隙中自由运动, 接触相即从动轮与主动轮发生碰撞, 用碰撞恢复系数  $\varepsilon$  描述, 描述方程如下:

自由相:

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + d_1 \dot{\varphi}_1 + T_1 = 0 \tag{1}$$

接触相:

$$\dot{\varphi}_1^+ = -\varepsilon\dot{\varphi}_1^- + (1+\varepsilon)\frac{R_{be}}{R_{b1}}\dot{e}(t) \quad (2)$$

式中(+)和(-)上标分别表示碰撞前和碰撞后的状态,为了研究上述各参数对 Rattling 系统性质的影响,对方程进行无量纲化,令  $s = R_{be}e(t) - R_{b1}\varphi_1$ , 无量纲相对距离  $x = s/v_1$ , 无量纲时间  $\tau = \omega t$ , 正则化齿侧间隙  $-1/2 < x < 1/2$ , 无量纲化后的方程为:

$$\text{自由相: } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{映射方程}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\beta y + \gamma + \ddot{f} + \dot{f}\beta \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{接触相: } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{碰撞方程}$$

$$y^+ = -\varepsilon y^- \quad (4)$$

式中各参数分别为:碰撞恢复系数  $\varepsilon$ , 激励与齿间间隙比值  $\alpha = \frac{R_{be}a}{v_1}$ ; 阻尼  $\beta_1 = \frac{d_1}{I_1\omega}$ ; 定常阻力矩  $\gamma = \frac{T_1 R_{b1}}{I_1 v_1 \omega^2}$ ; 假定激励为简谐激励  $f(\tau) = \alpha \sin \tau$ .

考虑每次碰撞前状态的映射  $H: X_n^- \rightarrow X_{n+1}^-$  ( $X = [x, y]^T$  为状态矢量), 得到如下迭代式<sup>[1,2]</sup>:

$$\begin{cases} x_{n+1}^- = x_n^- + \alpha(\sin \tau_{n+1} - \sin \tau_n) + \gamma \beta_1^{-1} \Delta \tau_n + \\ \beta_1^{-1}(1 - \exp(-\beta_1 \Delta \tau_n))(-\varepsilon y_n^- - \\ \alpha \cos \tau_n - \gamma \beta_1^{-1}) \\ y_{n+1} = (-\varepsilon y_n - \alpha \cos \tau_n - \\ \gamma \beta_1^{-1}) \exp(-\beta_1 \Delta \tau_n) + \alpha \cos \tau_{n+1} + \gamma \beta_1^{-1} \\ \tau_{n+1} = \tau_n + \Delta \tau_n \end{cases} \quad (5)$$

对于相继两次碰撞发生在同一齿面上时, 必须满足  $x_{n+1} = x_n$  的啮合条件, 其中  $n$  代表碰撞次数; 而发生逆向碰撞时, 必须满足  $x_{n+1} = -x_n$  的条件. 解这两个超越方程之一, 得到相继两次碰撞的时间差  $\Delta \tau_n$ .

## 1.2 弹性碰撞

由于实验模型中涉及到橡胶元件, 因此, 对橡胶建立合理的数学模型是必要的, 参考前人研究的基础<sup>[9,10]</sup>, 将橡胶片简化成弹簧-阻尼器. 齿轮传动弹性碰撞的力学模型如图2所示.

其中,  $c_2$  和  $k(\varphi_1)$  为弹性边界的阻尼和刚度, 对应实验中的橡胶,  $c_1$  为自由相阻尼, 其它参数同刚性碰撞. 同理, 根据从动轮的运动状态将整个运动分为自由相和接触相: 自由相指从动轮在间隙中只有运动, 接触相指从动轮和主动轮发生弹性碰

撞. 描述方程如下:

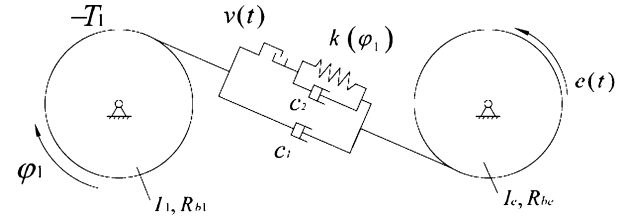


图2 齿轮弹性碰撞力学模型

Fig. 2 Mechanical model for elastic impact of gear

自由相:

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + d_1 \dot{\varphi}_1 + T_1 = 0 \quad (6)$$

接触相:

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + d_2 \dot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1) \varphi_1 + T_1 = 0 \quad (7)$$

$v(t)$  代表的是时变间隙,  $d_1$  为自由相阻尼,  $d_2$  为接触相阻尼,  $k_1(\varphi_1)$  为刚度系数.

$$k(\varphi_1) = \begin{cases} 0 & \varphi_1 R_{b1} + e(t) R_{be} \geq 0 \\ k_1 & \varphi_1 R_{b1} + e(t) R_{be} < 0 \end{cases} \quad (8)$$

无量纲化的方法同刚性碰撞, 得到:

自由相:

$$\ddot{x} + \beta_1 \dot{\varphi} = \ddot{f} + \beta_1 \dot{f} + \gamma \quad (9)$$

接触相:

$$\ddot{x} + \beta_2 \dot{\varphi} + \eta x = \ddot{f} + \beta_2 \dot{f} + \eta f + \gamma \quad (10)$$

式中各参数分别为: 激励与齿间间隙比值  $\alpha = \frac{R_{be}a}{v_1}$ ;

自由相阻尼  $\beta_1 = \frac{d_1}{I_1\omega}$ ; 接触相阻尼  $\beta_2 = \frac{d_2}{I_1\omega}$ ; 定常阻

力矩  $\gamma = \frac{T_1 R_{b1}}{I_1 v_1 \omega^2}$ ; 刚度  $\eta = \frac{k_1}{I_1 \omega^2}$ ; 假定激励为简谐激

励  $f(\tau) = \alpha \sin \tau$ ; 接触相无阻尼系统的固有频率  $\omega_0$

$= \sqrt{\eta}$ ; 阻尼系数  $\delta = \beta_2/2$ ; 阻尼振动的固有角频率

$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - (\delta/\omega_0)^2}$ . 解方程得到如下迭代式:

$$\begin{cases} x_{n1+1} = x_{n1} + \alpha(\sin \tau_{n1+1} - \sin \tau_{n1}) + \gamma \beta_1^{-1} \Delta \tau_{n1} + \\ \beta_1^{-1}(1 - \exp(-\beta_1 \Delta \tau_{n1}))(y_{n1} - \alpha \cos \tau_{n1} - \gamma \beta_1^{-1}) \\ y_{n1+1} = (y_{n1} - \alpha \cos \tau_{n1} - \gamma \beta_1^{-1}) \\ \exp(-\beta_1 \Delta \tau_{n1}) + \alpha \cos \tau_{n1} + \gamma \beta_1^{-1} \\ x_{n2+1} = \alpha \sin(\tau_{n1} + \Delta \tau_{n2}) + \gamma \eta^{-1} + \exp(-\delta \Delta \tau_{n2}) \\ (- (a_1 \cos \omega_d \Delta \tau_{n2} + a_2 \sin \omega_d \Delta \tau_{n2})) \\ y_{n2+1} = \alpha \cos(\Delta \tau_{n2} + \tau_{n1}) + \\ \exp(-\delta \Delta \tau_{n2}) (- (a_1 \omega_d + a_2) \sin \omega_d \Delta \tau) + \\ \exp(-\delta \Delta \tau_{n2}) ((a_2 \omega_d - a_1) \cos \omega_d \Delta \tau_{n2}) \\ \tau_{n1+1} = \tau_{n1} + \Delta \tau_{n1} + \Delta \tau_{n2} \end{cases} \quad (11)$$

式中下标  $n1$  和  $n2$  分别代表自由相和接触相,  $n$  为碰撞的次数,对于同一齿面上的弹性接触,必须满足  $y_{n2} = y_{n1}$ ,  $x_{n2} = x_{n1}$  的条件,解这两个超越方程,可以分别得到自由相和接触相的时间差  $\Delta\tau_{n1}$ ,  $\Delta\tau_{n2}$ .  $a_1, a_2$  为待定常数,由每次接触前的初始速度和位移决定.

2 实验验证

针对带齿轮传动的弹性碰撞模型,在刚性碰撞 - Rattling 实验装置的基础上,在从动轮的两个齿面上贴上 2mm 厚的橡胶片,来分析带弹性橡胶片和“空隙单元”的齿轮传动系统在外激励的作用下的振动过程,实验装置如下图所示:

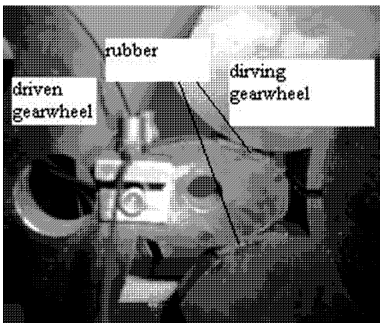


图 3 实验装置  
Fig. 3 Experimental device

由于齿轮系统本身动力学响应复杂,以及实测的数据包含环境噪声等因素,因此本文采用谱分析对所建的力学模型进行实验验证. 比较实测与数值的速度功率谱密度图,可以验证所建的齿轮碰撞振动的两种力学模型符合齿轮传动系统的实验装置. 将实验中采集得到的频谱图 (a)、(b) 和数值模拟的频谱图 (c)、(d) 进行比较. 其中,外激励的频率为都为 16Hz,啮合间隙为 0.6mm.

从实测和仿真的频谱图可以看出,系统的功率谱表现为宽带过程,包含的频率成分很丰富,分布在较宽的频带上,具有混沌性质. 比较两种模型的实测和仿真频谱图,实测得到的一阶主频为 16Hz,刚性碰撞数值仿真得到的是 16.03Hz,弹性碰撞数值仿真得到的是 16.01Hz,几乎无差;而二阶主频实测分别为 48.5Hz 和 32Hz,仿真数值为 48.01Hz,其它各阶频率基本都是 16 的倍数,不过由于建模的误差和环境噪音影响,仿真与实测的频谱图存在差异是可以理解的.

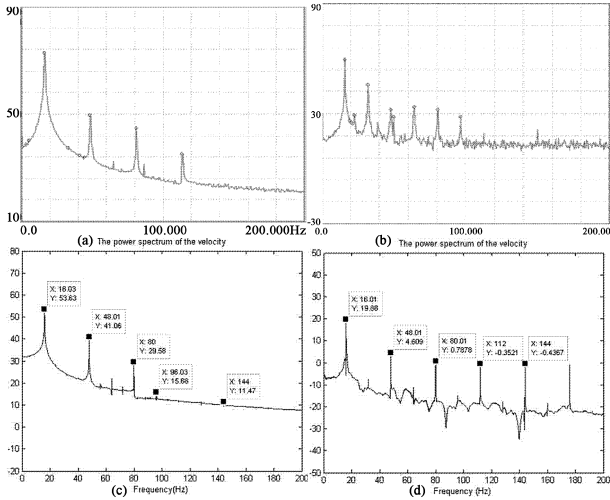


图 4 频谱图  
Fig. 4 The power of frequency

3 动力学性质分析

将方程 (5) 和 (12) 应用 MATLAB 语言进行编程计算,分别得到两种模型的动力学响应,绘制相轨线和对应的碰撞庞加莱点集,从中可以看出齿轮碰撞的两种模型之间的异同点

3.1 刚性碰撞

图 5 为不同  $\alpha$  条件下的刚性碰撞的相图,其它条件参数为阻尼  $\beta = 0.1$ ,定常阻力矩  $\gamma = 0.1$ ,碰撞恢复系数  $\varepsilon = 0.7$ ,图 6 为对应的碰撞庞加莱点集.

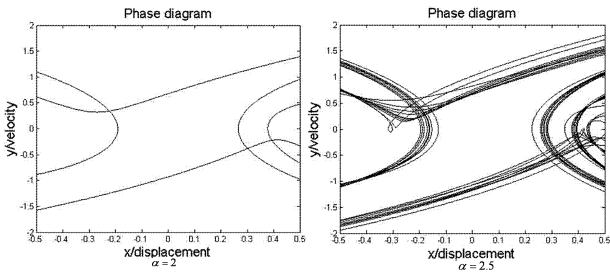


图 5 不同幅值条件下的相轨线  
Fig. 5 Phase diagram under different amplitude

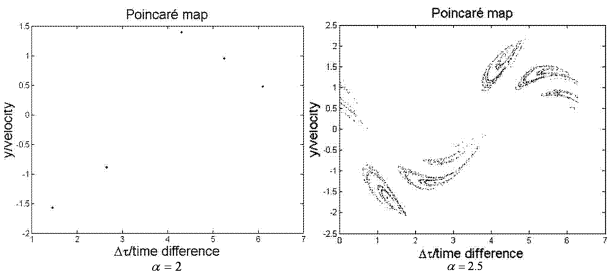


图 6 不同幅值条件下的碰撞庞加莱点集  
Fig. 6 Poincaré map of different amplitude

从图 5 中可以看出,齿轮刚性碰撞的相图是不连续

的,速度存在突变.而且随着外激励幅值的变化,系统的相图也会发生变化,说明外激励的变化对系统影响较大.从庞加莱点集可以看出,随着无量纲幅值的变化,碰撞点的区域也会发生变化,甚至出现奇怪吸引子.

### 3.2 弹性碰撞

图7为不同 $\alpha$ 条件下的弹性碰撞的相轨线,其它条件参数为阻尼 $\beta=0.1$ , $\beta=0.3$ 定常阻力矩 $\gamma=0.1$ ,图8为对应的碰撞庞加莱点集.

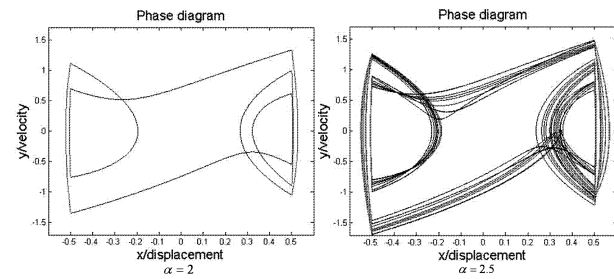


图7 不同幅值条件下的相轨线

Fig. 7 Phase diagram under different amplitude

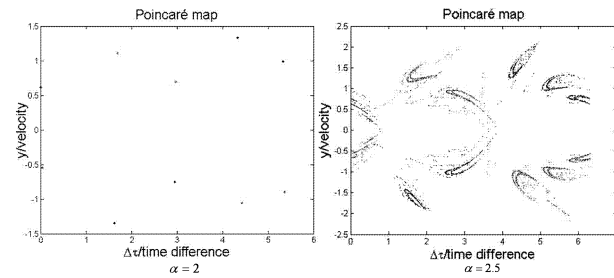


图8 不同幅值条件下的碰撞庞加莱点集

Fig. 8 Poincaré map of different amplitude

从弹性碰撞的相轨线可以看出与刚性碰撞之间的明显差异,弹性碰撞的相轨线虽然是连续的,但是也存在着速度的突变,也是一个典型的非光滑问题.图7中的红色线为接触相,黑色线为自由相.自由相部分与刚性碰撞没有明显差异,而接触相部分不再是瞬间完成,而是表现为边界的弹性形变.图8的碰撞庞加莱点集所打的黑点和红点分别代表从动轮与主动轮开始啮合的时刻和脱离啮合的时刻的速度情况,与刚性碰撞用一个碰撞恢复系数来表示碰撞过程存在明显的差异.当 $\alpha=2$ 时,庞加莱点集只表现为几个不规则的点,而当 $\alpha=2.5$ 时,庞加莱点集则出现了奇怪吸引子.通过庞加莱点集可以看出 $\alpha$ 的改变对系统的影响较大.

## 4 结论和讨论

1. 通过数值和实验两方面的结果可以得出弹

性碰撞的齿轮传动系统振动也会出现混沌现象,由于弹性边界的作用与刚性碰撞的 Rattling 模型相比能明显降低系统振动的噪声强度.此外,还可以通过参数的调节来改变齿轮传动系统的动力学特性,使系统的频谱成为宽带,以降低齿轮传动过程中的噪声.

2. 齿轮传动的弹性碰撞模型与刚性相比都具有混沌特性,同样对外激励和间隙的变化都很敏感,改变间隙和外激励都有可能引起齿轮传动系统出现混沌现象.

## 参考文献

- 温建明. Rattling 振动随机模型的建立及混沌随机性质研究. 同济大学硕士学位论文, 1998 (Wen J M. Stochastic model and chaotic characteristic of rattling vibration. Master degree dissertation, Tongji University, 1998 (in Chinese))
- 孙宜强. Rattling 振动随机阻尼模型的建立和实验研究. 同济大学硕士学位论文, 2009 (Sun Y Q. Modeling and experiment of rattling vibration with random damping. Master degree dissertation, Tongji University, 2009 (in Chinese))
- Pfeiffer F, Kunert A. Rattling models from deterministic to stochastic process. *Non-linear Dynamics*, 1990, 1: 63 ~ 74
- 冯奇. Rattling 系统的一种随机模型. 同济大学学报, 1998, 26(4): 396 ~ 400 (Feng Q. Stochastic model on a rattling system. *Journal of Tongji University*, 1998, 26(4): 396 ~ 400 (in Chinese))
- 温建明, 冯奇. Rattling 系统的一种二级传动随机模型. 噪音与振动控制. 1998, 5: 2 ~ 7 (Weng J M, Feng Q. Two-stage stochastic model on rattling vibration. *Noise And Vibration Control*, 1998, 5: 2 ~ 7 (in Chinese))
- 温建明, 冯奇. 随机调幅 Rattling 振动的二级传动模型. 振动工程学报, 2000, 13(3): 353 ~ 360 (Wen J M, Feng Q. Two-stage stochastic model on Rattling vibration with amplitude modulation. *Journal of Vibration Engineering*, 2000, 13(3): 353 ~ 360 (in Chinese))
- Pfeiffer F, Karagiannis K. Theoretical and experimental investigations of gear rattling. *Non-linear Dynamics*, 1991, 2: 367 ~ 387
- 金栋平, 胡海岩. 碰撞振动及其典型现象. 力学进展, 1999, 29, (2): 155 ~ 164 (Jin D P, Hu H Y. Vibro-Im-

pacts and their typical behaviors of mechanical systems. *Advances in Mechanics*, 1999,29,(2):155 ~ 164 (in Chinese))

9 贺华,冯奇,汪玉. 带刚性限位的双层隔振系统的离散模型. *动力学与控制学报*,2004,2(2):88 ~ 91 (He H,

Feng Q, Wang Y. The discrete model of a two stage isolation system with rigid limiters. *Journal of Dynamics and Control*,2004,2(2):88 ~ 91 (in Chinese))

10 Pfeiffer F, Prestl W. Hammering in diesel – engine drive-line systems. *Nonlinear Dynamics*, 1994(5): 477 ~ 492

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF  
TWO KINDS OF GEAR VIBRATION \*

Su Linyu   Wen Jianming

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract**   The experimental and numerical results on two kinds of gear impact were compared: (1) Gear rigid impact system within backlash, assuming the teeth of the gearwheels come into contact only for a very short time and the boundary is rigid; (2) Gear elastic impact system containing elastic constraint and backlash, in which the driven gearwheel can move freely between backlashes, and the boundary is elastic and expressed with no – mass – spring – dashpot. The dynamic responses of two kinds of gear impact models were compared by experimental and numerical analysis. Firstly, the correctness of the mechanical models was verified through experimental analysis. Then, the results of the numerical and experimental analysis were compared.

**Key words**   gear transmission,   impact,   experiment,   spectrum

Received 26 December 2010, revised 25 April 2011.  
\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10702051)