

# 带强迫项的变系数 KdV 方程的多孤立波解及其应用\*

韩元春 那仁满都拉 额尔敦仓

(内蒙古民族大学物理与电子信息学院,通辽 028043)

**摘要** 本文利用改进的齐次平衡法,首先得到了带强迫项的变系数 KdV 方程的多孤立波解,然后借助此解得到了强迫 KdV 方程的多孤立波解.最后作为应用例子,利用图形分析方法分析了 Rossby 孤立波的相互作用,指出了影响 Rossby 孤立波相对幅度、相位、传播方向及平衡位置的主要原因.

**关键词** 带强迫项的变系数 KdV 方程, 多孤立波解, Rossby 孤立波, 相互作用

## 引言

Korteweg - de Vries (KdV) 方程是应用科学领域中一类非常重要的非线性演化方程.该方程可用于描述不变深度浅水中表面波的传播、均匀等离子体中离子声波的传播等不同领域的各种现象<sup>[1]</sup>.但变系数 KdV 方程描述的都是比较理想的情况.人们研究发现,描述更一般情况的 KdV 方程应该是变系数 KdV 方程.比如,人们研究缓变深度浅水中表面波的传播问题时得到如下变系数 KdV 方程<sup>[2]</sup>.

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

在研究非均匀等离子体中离子声波传播<sup>[3]</sup>以及其他问题的研究中也得到了该方程.文[4-6]从不同的角度对方程进行了多方面的研究.为了使变系数方程(1)更具有普遍性,人们把它推广成如下带强迫项的变系数 KdV 方程

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} = R(t) \quad (2)$$

这里  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  和  $R(t)$  都是时间  $t$  的函数.方程(2)更具有普遍性,因为当  $R(t) = 0$  时,它变成变系数 KdV 方程(1).当  $\alpha(t) = \alpha, \beta(t) = \beta$  时,它变成如下强迫 KdV 方程

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = R(t) \quad (3)$$

此方程描述缓变地形下 Rossby 孤立波的振幅演变规律<sup>[7]</sup>,因此该方程的研究对 Rossby 孤立波有关的特殊气候现象的理论解释具有重要意义.文[8]中用辅助方程方法及函数变换,给出了方程(3)的类孤立子解、类周期波解及三角函数解;文[9]中

利用 Exp 函数方法,给出了方程(3)的孤立波解和周期波解;文[10]中利用 Jacobi 椭圆函数展开法,得到了方程(3)的类周期波解.但我们注意到在这些文献中没有给出方程(3)的多孤立波解.多孤立波解的求解以及孤立波相互作用性质的分析具有重要意义<sup>[11,12]</sup>.

本文用改进的齐次平衡法,首先给出方程(2)的多孤立波解;然后借助方程(2)的解得到方程(3)的多孤立波解;最后作为应用,分析 Rossby 孤立波的相互作用.

## 1 方程(2)的多孤立波解

我们设方程(2)具有如下形式解<sup>[13,14]</sup>

$$u(x, t) = \lambda(t) (f''(\phi)\phi_x^2 + f'(\phi)\phi_{xx}) + a(t) \quad (4)$$

式中  $f(\phi)$ ,  $\phi(x, t)$ ,  $\lambda(t)$  和  $a(t)$  为待定函数.把式(4)代入方程(2),得

$$\begin{aligned} u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} - R(t) = & \lambda'(t) [f''(\phi)\phi_x^2 + f'(\phi)\phi_{xx}] + \lambda(t) (f'''(\phi)\phi_x^2 + 2f''(\phi)\phi_x\phi_{xx} + \\ & f'(\phi)\phi_{xxx} + f'\phi_{xxx}) + a'(t) + \alpha(t) [\lambda^2(t)f''f''\phi_x^5 + \\ & \lambda^2(t)f'f''\phi_x^3 + a(t)\lambda(t)f''\phi_x^3 + \\ & 3\lambda^2(t)f'^2\phi_x^3\phi_{xx} + 3\lambda^2(t)f'f''\phi_x\phi_{xx}^2 + \\ & 3a(t)\lambda(t)f''\phi_x\phi_{xx} + \lambda^2(t)f'f''\phi_x^2\phi_{xxx} + \\ & \lambda^2(t)f'^2\phi_{xx}\phi_{xxx} + a(t)\lambda(t)f'\phi_{xxx}] + \\ & \beta(t)\lambda(t) [f^{(5)}\phi_x^5 + 10f^{(4)}\phi_x^3\phi_{xx} + \\ & 15f'''\phi_x\phi_{xx}^2 + 10f'''\phi_x^2\phi_{xxx} + 10f''\phi_{xx}\phi_{xxx} + \\ & 5f''\phi_x\phi_{xxxx} + f'\phi_{xxxx}] - R(t) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

令式(5)中  $\phi_x^5$  项的系数为零,可得

$$\lambda(t)\alpha(t)f''f''' + \beta(t)f^{(5)} = 0 \tag{6}$$

为保证  $f(\phi)$  只是  $\phi$  的函数,必须  $A = \frac{\lambda(t)\alpha(t)}{\beta(t)}$  ( $A$  是任意常数),即  $\lambda(t) = A \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}$ . 此时,方程(6)是

关于  $f(\phi)$  的常微分方程,它显然有特解

$$f = \frac{12}{A} \ln \phi \tag{7}$$

另外,为了得到多孤立波解,把  $\phi(x,t)$  可设为<sup>[1,15]</sup>

$$\begin{aligned} \phi(x,t) = & 1 + \sum_{i=1}^n a_i e^{m_i x + l_i(t)} + \\ & \sum_{i=j+1}^n \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} e^{(m_i+m_j)x + l_i(t) + l_j(t)} + \\ & \sum_{i=k+2j}^n \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-2} c_{ijk} e^{(m_i+m_j+m_k)x + l_i(t) + l_j(t) + l_k(t)} + \dots + \\ & Z(e)^{(m_1+m_2+\dots+m_n)x + l_1(t) + l_2(t) + \dots + l_n(t)} \end{aligned} \tag{8}$$

其中  $m_i, m_j, m_k, m_n, a_i, b_{ij}, c_{ijk}$  和  $Z$  为待定常数,  $l_i(t), l_j(t), l_k(t)$  和  $l_n(t)$  是关于  $t$  的待定函数. 为了更简便地反映孤立波之间的相互作用,这里我们只求双孤立波解,故取  $n=2$ . 此时,(8)式变成

$$\begin{aligned} \phi(x,t) = & 1 + a_1 e^{m_1 x + l_1(t)} + a_2 e^{m_2 x + l_2(t)} + \\ & Z e^{(m_1+m_2)x + l_1(t) + l_2(t)} \end{aligned} \tag{9}$$

把式(9)、(7)和(4)代入方程(2),进行同类项的整理并令  $e^{N[m_1 x + l_1(t)] + K[m_2 x + l_2(t)]}$  ( $N, K=0,1,2,3$ ) 各项的系数为零,可得到一组超定代数方程组(由于此方程组太复杂故忽略). 利用 Maple 求解此方程组得

$$a(t) = \int R(t) dt + C \tag{10}$$

$$\alpha(t) = A\beta(t) \tag{11}$$

$$Z = \frac{(m_1 - m_2)^2 a_1 a_2}{(m_1 + m_2)^2} \tag{12}$$

$$l_1(t) = - \int \beta(t) \{ m_1 A [ \int R(t) dt + C ] + m_1^3 \} dt + L \tag{13}$$

$$l_2(t) = - \int \beta(t) \{ m_2 A [ \int R(t) dt + C ] + m_2^3 \} dt + M \tag{14}$$

这里  $a_1, a_2, m_1, m_2, A, C, L$  和  $M$  为任意常数. 把式(12)一(14)代入(9)式,然后把(9)、(11)式代入式(7),再把(7)、(10)式代入式(4),可得方程(2)的如下双孤立波解

$$u(x,t) = 12 \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \left[ - \frac{(\frac{\partial}{\partial x} \phi(x,t))^2}{\phi(x,t)^2} + \right.$$

$$\left. \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,t)}{\phi(x,t)} \right] + \int R(t) dt + C \tag{15}$$

这是我们得到的带强迫项的变系数 KdV 方程(2)的双孤立波解. 由解(15)可容易得到强迫 KdV 方程(3)的双孤立波解

$$\begin{aligned} u(x,t) = & 12 \frac{\beta}{\alpha} \left[ - \frac{(\frac{\partial}{\partial x} \phi(x,t))^2}{\phi(x,t)^2} + \right. \\ & \left. \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x,t)}{\phi(x,t)} \right] + \int R(t) dt + C \end{aligned} \tag{16}$$

这里  $\phi(x,t) = 1 + a_1 e^{m_1 x - \int \{ m_1 \alpha [ \int R(t) dt + C ] + m_1^3 \beta \} dt + L} + a_2 e^{m_2 x - \int \{ m_2 \alpha [ \int R(t) dt + C ] + m_2^3 \beta \} dt + M} + a_1 a_2 (m_1 - m_2)^2 / (m_1 + m_2)^2 e^{(m_1+m_2)x - \int \{ m_1 \alpha [ \int R(t) dt + C ] + m_1^3 \beta \} dt + L - \int \{ m_2 \alpha [ \int R(t) dt + C ] + m_2^3 \beta \} dt + M}$ ,  $m_1, m_2, a_1, a_2, \alpha, \beta, C, L$  和  $M$  均为任意常数. 对此解的分析可知,孤立波的平衡位置(相对幅度为零的位置)取决于外强迫  $R(t)$  和常数  $C$ , 相对幅度取决于常数  $m_1, m_2, \beta, \alpha$ , 相位取决于外强迫  $R(t)$  和常数  $m_1, m_2, \alpha, \beta, C, L, M$ , 而传播速度与相位变化有关. 下面的例举分析将进一步证实上述结论.

## 2 应用例子

本文结果具有很多重要的应用背景,在这里作为例子分析 Rossby 孤立波的相互作用. 在文[7]中研究地形随时间缓慢变化情况下 Rossby 孤立波的振幅演变问题,得到了带强迫项的 KdV 方程(3), 而此方程有双孤立波解(16). 这里我们根据解(16)分析两个 Rossby 孤立波的相互作用.

图1显示了在  $a_1 = a_2 = 1, m_1 = 1.1, m_2 = 0.7, C = 0, L = 0, M = 0, \alpha = \beta = 1$  和外强迫  $R(t) = 0.2 \sin(t)$  作用下,两个 Rossby 孤立波的相互作用. 从图可以看出,平衡位置随时间周期性变化的两个孤立波相互作用之后,它们的相对幅度和传播方向保持不变,且传播速度和平衡位置的周期性变化规律也保持不变. 图2显示了在  $a_1 = a_2 = 1, m_1 = 1.8, m_2 = 1.2, C = 0, L = 0, M = 0, \alpha = \beta = 1$  和外强迫  $R(t) = t^2$  作用下,两个 Rossby 波的相互作用. 由图可看出,平衡位置、传播速度和传播方向都随时间变化的两个孤立波相互作用之后,它们的相对幅度保持不变,平衡位置、传播速度和传播方向等还继续随时间变化. 图3显示了在  $a_1 = a_2 = 1, m_1 = 1.4,$

$m_2 = 0.8, C = 0, L = 0, M = 0, \alpha = -\beta = 1$  和外强迫  $R(t) = -0.5t$  作用下,两个 Rossby 孤立波的相互作用. 可看出,平衡位置、传播速度和传播方向都随时间变化的两个孤立波相互作用之后,只保持相对幅度不变,平衡位置、传播速度和传播方向等还继续随时间变化.

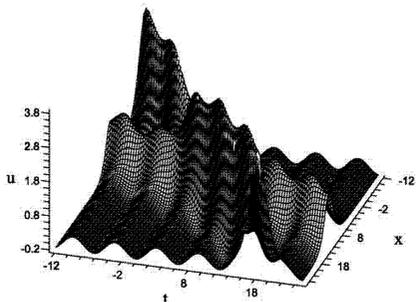


图1 在外强迫  $R(t) = 0.2\sin(t)$  作用下两个 Rossby 孤立波的相互作用

Fig. 1 Interaction of two Rossby solitary waves under forcing  $R(t) = 0.2\sin(t)$

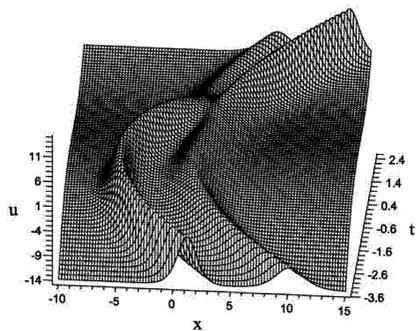


图2 在外强迫  $R(t) = t^2$  作用下两个 Rossby 孤立波的相互作用

Fig. 2 Interaction of two Rossby solitary waves under forcing  $R(t) = t^2$

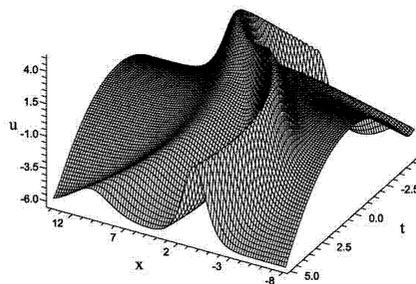


图3 在外强迫  $R(t) = -0.5t$  作用下两个 Rossby 孤立波的相互作用

Fig. 3 Interaction of two Rossby solitary waves under forcing  $R(t) = -0.5t$

### 3 结论

本文利用改进的齐次平衡法,首先得到了带强迫项的变系数 KdV 方程的多孤立波解,然后借助此解给出了强迫 KdV 方程的多孤立波解. 最后作为应用例子,采用图形分析方法分析了 Rossby 孤

立波的相互作用,并指出强迫项主要影响相互作用的两个孤立波的平衡位置、相位、传播速度及传播方向. 本文结果对 Rossby 孤立波及其相互作用有关的沃克环流、厄尔尼诺现象等特殊气候现象的理论解释及说明具有重要意义.

### 参 考 文 献

- 1 Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991
- 2 Grimshaw R. Slowly varying solitary waves. *Proceedings the Royal of Society A*, 1979, 368: 359 ~ 375
- 3 Ko K, Kuehl H H. Korteweg-de Vries soliton in a slowly varying medium. *Physical Review Letters*, 1978, 40: 233 ~ 236
- 4 Hong Woopyo, Jung Y D. Auto-Baklund transformation and analytic solutions for general variable-coefficient KdV equation. *Physics Letters A*, 1999, 257: 149 ~ 152
- 5 Zhao X Q, Tang D B, Wang L M. New soliton-like solutions for KdV equations with variable coefficient. *Physics Letters A*, 2005, 346: 288 ~ 291
- 6 Joshi N. Painlevé property of general variable-coefficient versions of the Korteweg-de Vries and non-linear Schrödinger equations. *Physics Letters A*, 1987, 125: 456 ~ 460
- 7 达朝究,丑纪范. 缓变地形下 Rossby 波振幅演变满足的带有强迫项的 KdV 方程. *物理学报*, 2008, 57(4): 2595 ~ 2599 (Da C J, Chou J F. KdV equation with a forcing term for the evolution of the amplitude of Rossby waves along a slowly changing topography. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(4): 2595 ~ 2599 (in Chinese))
- 8 Taogetusang, Sirendaoerji. The Jacobi elliptic function-like exact solutions to two kinds of KdV equations with variable coefficients and KdV equation with forcible term. *Chinese Physics*, 2006, 15(12): 2809 ~ 2818
- 9 Zhang S. Exp-function method exactly solving the KdV equation with forcing term. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 197(1): 128 ~ 134
- 10 付遵涛,刘式达,刘式适,赵强. 含变系数或强迫项的 KdV 方程的新解. *应用数学和力学*, 2004, 25(1): 67 ~ 73 (Fu Z T, Liu S D, Liu S K, Zhao Q. New exact solutions to KdV equations with variable coefficients or forcing. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25(1): 67 ~ 73 (in Chinese))
- 11 那仁满都拉,王克协. 二维空间旋转孤立波的相互作用

- 用. 动力学与控制学报, 2007, 5(2): 118 ~ 124 (Naranmandula, Wang K X. Interaction of rotating solitary waves in two-dimensional spaces. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(2): 118 ~ 124 (in Chinese))
- 12 包金山, 那仁满都拉, 额尔敦仓. 一般 Hirota-Satsuma 方程的多孤子解及孤子间的相互作用. 动力学与控制学报, 2007, 5(4): 293 ~ 297 (Bao J S, Naranmandula, Ereduncang. Multiple soliton solutions of generalized Hirota-Satsuma equations and interaction between solitons. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(4): 293 ~ 297 (in Chinese))
- 13 Naranmandula, Bao G, Tubuxin. Oscillating solitons for  $(2+1)$ -dimensional nonlinear models. *Communications in theoretical physics*, 2007, 47(2): 282 ~ 286
- 14 孙健, 那仁满都拉. 变系数强迫 Burgers 方程的多孤立波解及孤立波的相互作用. 量子电子学报, 2011, 28(1): 31 ~ 36 (Sun J, Naranmandula. Multiple solitary wave solutions of variable coefficient forced Burgers equation and interaction of solitary waves. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2011, 28(1): 31 ~ 36 (in Chinese))
- 15 卢竞, 颜家壬. 非线性偏微分方程的多孤子解. 物理学报, 2002, 51(7): 1428 ~ 1433 (Lu J, Yan J R. Multiple-soliton solutions of the nonlinear partial differential equation. *Acta Physica Sinica*, 2002, 51(7): 1428 ~ 1433 (in Chinese))

## MULTIPLE SOLITARY WAVES SOLUTION OF VARIABLE COEFFICIENTS KDV EQUATION WITH FORCING TERM AND ITS APPLICATION\*

Han yuanchun Naranmandula Ereduncang

(College of Physics and Electronic Information, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao 028043, China)

**Abstract** First, the multiple solitary waves solution of a variable coefficients KdV equation with forcing term has been obtained by using the improved homogeneous balance method. Second, the multiple solitary waves solution of the forced KdV equation has been obtained with the help of above obtained solution. At last, as an example, the interactions of Rossby solitary waves were analyzed by using graphics analysis method, and the main reasons which influence the relative amplitude, phase, travelling direction and equilibrium position of Rossby solitary waves were pointed out.

**Key words** variable coefficients KdV equation with forcing term, multiple solitary waves solution, Rossby solitary wave, interaction