

# 斜拉桥索-面-塔三自由度非线性振动模型 及其 1: 2: 1 内共振分析\*

张妍<sup>1</sup> 王怀磊<sup>1</sup> 杨杰<sup>2</sup>

(1. 南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016) (2. 南京航空航天大学土木工程系, 南京 210016)

**摘要** 研究斜拉桥拉索-桥面-桥塔的三自由度耦合振动模型及其 1: 2: 1 内共振问题. 将拉索简化为两端有弦连接的质量块, 将桥面和桥塔分别视作只有竖向振动和只有横向振动的弹簧质量块系统, 建立了桥塔-拉索-桥面三自由度耦合非线性振动模型. 利用多尺度方法得到了系统发生 1: 2: 1 内共振的条件. 对系统的内共振进行了数值模拟, 结果表明索-面-塔在初始扰动下会发生 1: 2: 1 内共振, 能量会在系统各部分之间发生有规律的传递和交换.

**关键词** 斜拉桥, 索-面-塔, 非线性振动, 多尺度法, 内共振

## 引言

斜拉桥是大跨度桥梁的最主要桥型之一. 由于斜拉索具有柔度大、质量小、阻尼低的特点, 它的非线性动力学特性非常突出, 在微风微雨的情况下, 个别拉索即有可能发生十分剧烈的大幅振动. 这种索的大幅振动不仅会引起车辆行人的不舒适感和对桥梁安全性的怀疑, 更重要的是对桥梁的安全性与耐久性产生了很大的危害. 它可引起索的疲劳, 使索锚接合处产生疲劳裂纹, 破坏索的防腐系统, 严重的还可能导致索失效. 因此, 近几十年来, 为探究拉索大幅振动的机理和寻求有效的控制方法, 国内外学者提出和分析了诸多索-桥系统的非线性动力学模型.

关于拉索的动力学模型主要分为两类, 一类为理想激励模型, 即将桥面作为拉索的理想激励源. 1987年 F. Benedettini 和 G. Rega<sup>[1]</sup> 以此为基础研究了拉索的端部受激励的特性, 分析了拉索在不同垂跨比条件下做亚谐振动时的激发频率. 陈水生和孙炳楠<sup>[2]</sup> 考虑拉索垂度和几何非线性的影响, 导出了拉索在轴向激励作用下的非线性振动方程, 对拉索轴向激励下的面内参数振动作了详细分析, 利用谐波平衡法得到了产生参数共振的最小激励幅值. 赵跃宇<sup>[3]</sup> 等人进一步对斜拉索主参数共振的稳定性进行了研究, 分析了拉索固有频率与外激励参数对斜拉索稳态解的个数及其稳定性的影响. 另一类

模型为非理想激励模型, 即认为桥面与拉索的振动相互影响, 即索-桥耦合振动模型. 钟万勰<sup>[4]</sup> 建立了一种双自由度耦合振动模型, 并用多尺度法讨论了位移一次近似解的稳定性; 陈水生和孙炳楠<sup>[5]</sup> 将桥简化为集中质量块, 建立了连续索-离散桥的耦合非线性参数振动模型, 阐述了拉索与桥面的耦合参数振动特性与索的垂度、固有频率、倾斜角度等的关系; 赵跃宇<sup>[6]</sup> 等人建立了索梁组合结构的力学模型, 利用多尺度方法分析了拉索的参数振动以及可能出现的内共振, 分叉和混沌现象; Vincenzo Gattulli<sup>[7]</sup> 建立了索梁耦合模型, 并应用连续性方法得到了 1/2 亚谐共振频率的关系. 冯维明和高黎黎<sup>[8]</sup> 建立了绳索与 Bernoulli-Euler 梁的耦合系统, 并用多尺度法研究了该模型的稳定性.

本文参考文献[4]中的非线性动力学模型, 计入桥塔对整个斜拉索桥系统振动的影响, 将拉索简化为两端为弦连接的集中质量块, 将桥面简化成竖向振动的集中质量块, 将桥塔简化成横向振动的集中质量块, 从而建立三自由度耦合振动模型. 本文对该力学模型进行了数学表达, 用多尺度法求出其近似解析解, 进行了数值仿真.

## 1 力学模型及数学表达

如图一所示, 将拉索简化为一个集中质量  $m_1$  和总长度为  $2l$  的两段无质量弦, 其抗拉刚度为  $EA$ , 初始静拉力为  $S_0$ . 将桥塔简化为集中质量  $m_2$ ,

刚度  $k_2$  和阻尼系数  $c_2$  的横向振动子系统. 将桥面简化为集中质量  $m_3$ , 刚度  $k_3$  和阻尼系数  $c_3$  的竖向振动子系统, 其中  $k_3$  为桥面的弯曲刚度.  $c_1$  为拉索所受空气阻尼, 假设为粘性阻尼.

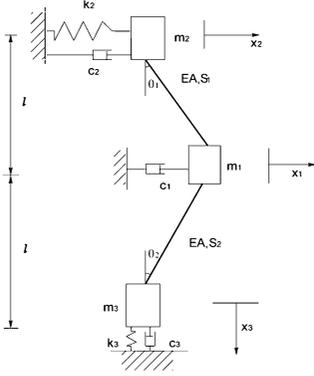


图1 桥塔-拉索-桥面耦合振动三自由度力学模型

Fig. 1 The three DOF model of coupled vibration of tower, cable and bridge deck

分别取质量块  $m_1, m_2, m_3$  的静平衡位置为  $x_1, x_2$  和  $x_3$  的坐标原点. 令  $S_1, S_2$  分别表示上下弦振动时的索力,  $\Delta l_1, \Delta l_2$  为上下弦的弦长相对于静平衡位置时的伸长量. 由牛顿第二定律, 可得到该系统的振动方程:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 \dot{x}_1 - S_1 \sin \theta_1 - S_2 \sin \theta_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_2 + S_1 \sin \theta_1 \\ m_3 \ddot{x}_3 = -k_3 x_3 - c_3 \dot{x}_3 - S_c \cos \theta_2 + S_0 \end{cases} \quad (1)$$

由几何关系,

$$\begin{cases} l^2 + (x_1 - x_2)^2 = (l + \Delta l_1)^2 = l_1^2 \\ (l + x_3)^2 + x_1^2 = (l + \Delta l_2)^2 = l_2^2 \end{cases} \quad (2)$$

经整理, 并略去高阶微量  $(\Delta l_1)^2$  和  $(\Delta l_2)^2$  项, 得到两弦伸长量分别为:

$$\Delta l_1 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{2l}, \quad \Delta l_2 = \frac{x_1^2 + 2x_3 l + x_3^2}{2l} \quad (3)$$

考虑到振动是小位移, 则

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{x_1 - x_2}{l_2} \approx \frac{x_1 - x_2}{l}, \quad \cos \theta_1 \approx 1, \\ \sin \theta_2 = \frac{x_1}{l_2} \approx \frac{x_1}{l}, \quad \cos \theta_2 \approx 1 \end{cases} \quad (4)$$

令  $\Delta S_1$  和  $\Delta S_2$  分别表示振动过程中上下两弦相对于其初始内力的变化量, 则

$$\begin{cases} S_1 = S_0 + \Delta S_1 = S_0 + \frac{EA \Delta l_1}{l}, \\ S_2 = S_0 + \Delta S_2 = S_0 + \frac{EA \Delta l_2}{l}. \end{cases} \quad (5)$$

将上述等式代入方程(1), 得到该系统的振动方程为:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 \dot{x}_1 - [S_0 + \frac{EA}{l} \cdot \frac{(x_2 - x_1)^2}{2l}] \times \\ \frac{x_1 - x_2}{l} - (S_0 + \frac{EA}{l} \cdot \frac{x_3^2 + 2x_3 l + x_1^2}{2l}) \cdot \frac{x_1}{l} \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_2 + [S_0 + \frac{EA}{l} \times \\ \frac{(x_2 - x_1)^2}{2l}] \cdot \frac{x_1 - x_2}{l} \\ m_3 \ddot{x}_3 = -k_3 x_3 - c_3 \dot{x}_3 - \frac{EA}{l} \cdot \frac{x_3^2 + 2x_3 l + x_1^2}{2l} \end{cases} \quad (6)$$

## 2 模型分析

经整理, 可得到方程(6)的无量纲形式:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + c'_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 x_1 + \alpha_3 x_3^2 + \\ \alpha_4 x_1^2 x_2 + \alpha_5 x_1^3 + \alpha_6 x_3^2 x_1 + \alpha_7 x_1 x_3 = 0 \\ \ddot{x}_2 + c'_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2^2 x_1 + \beta_3 x_3^2 + \\ \beta_4 x_1^2 x_2 + \beta_5 x_1^3 = 0 \\ \ddot{x}_3 + c'_3 \dot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 + \gamma_1 x_3^2 + \gamma_2 x_1^2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} c'_1 &= \frac{c_1}{m_1}, c'_2 = \frac{c_2}{m_2}, c'_3 = \frac{c_3}{m_3}; \\ \omega_1^2 &= \frac{2S_0}{m_1 l}, \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2} + \frac{S_0}{m_2 l}, \omega_3^2 = \frac{k_3}{m_3} + \frac{EA}{m_3 l}; \\ \alpha_1 &= \frac{EA}{m_1 l}, \alpha_2 = \frac{3EA}{2m_1 l^3}, \alpha_3 = -\frac{EA}{2m_1 l^3}, \\ \alpha_4 &= -\frac{3EA}{2m_1 l^3}, \alpha_5 = \frac{EA}{m_1 l^3}, \alpha_6 = \frac{EA}{2m_1 l^3}, \alpha_7 = \frac{EA}{m_1 l^2}; \\ \beta_1 &= -\frac{S_0}{m_2 l}, \beta_2 = -\frac{3EA}{2m_2 l^3}, \beta_3 = \frac{EA}{2m_2 l^3}, \\ \beta_4 &= \frac{3EA}{2m_2 l^3}, \beta_5 = -\frac{EA}{2m_2 l^3}; \\ \gamma_1 &= \frac{EA}{2m_3 l^2}, \gamma_2 = \frac{EA}{2m_3 l^2}; \end{aligned}$$

视阻尼系数  $c'_1, c'_2, c'_3$  为小量, 引入无量纲小参数  $\varepsilon$ , 则有  $c'_1 = 2\varepsilon\mu_1, c'_2 = 2\varepsilon\mu_2, c'_3 = 2\varepsilon\mu_3$ . 另外, 为便于方程解耦, 设  $\alpha_1 = 2\varepsilon\mu_4, \beta_1 = 4\varepsilon\mu_5$ .

采用多尺度法<sup>[9]</sup>研究其微振动的一次近似, 将解展开为:

$$\begin{cases} x_1 = \varepsilon\mu_{11}(T_0, T_1) + \varepsilon^2\mu_{12}(T_0, T_1) + \dots \\ x_2 = \varepsilon\mu_{21}(T_0, T_1) + \varepsilon^2\mu_{22}(T_0, T_1) + \dots \\ x_3 = \varepsilon\mu_{31}(T_0, T_1) + \varepsilon^2\mu_{32}(T_0, T_1) + \dots \end{cases} \quad (8)$$

其中  $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t$ .

将(8)式代入(7)式中,归纳  $\varepsilon$  的同次幂项,得到如下方程组:

$$\varepsilon^1 \text{ 阶: } \begin{cases} D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = 0 \\ D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = 0 \\ D_0^2 u_{31} + \omega_3^2 u_{31} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\varepsilon^2 \text{ 阶: } \begin{cases} D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} + 2D_{01} u_{11} + \\ 2\mu_1 D_0 u_{11} + \alpha_7 u_{31} u_{11} + 2\mu_4 u_{21} = 0 \\ D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} + 2D_{01} u_{21} + \\ 2\mu_2 D_0 u_{21} + 2\mu_5 u_{11} = 0 \\ D_0^2 u_{32} + \omega_3^2 u_{32} + 2D_{01} u_{31} + 2\mu_3 D_0 u_{31} + \\ 2\mu_6 u_{31} + \gamma_3 u_{11}^2 + \gamma_1 u_{31}^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中  $D_n = \partial/\partial T_n (n=0,1)$ .

方程(9)的解可写成如下形式:

$$\begin{cases} u_{11} = A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + \bar{A}_1(T_1) \exp(-i\omega_1 T_0) \\ u_{21} = A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + \bar{A}_2(T_1) \exp(-i\omega_2 T_0) \\ u_{31} = A_3(T_1) \exp(i\omega_3 T_0) + \bar{A}_3(T_1) \exp(-i\omega_3 T_0) \end{cases} \quad (11)$$

其中  $\bar{A}_1(T_1), \bar{A}_2(T_1), \bar{A}_3(T_1)$  分别为  $A_1(T_1), A_2(T_1), A_3(T_1)$  的共轭项. 设

$$\begin{cases} A_m(T_1) = \frac{1}{2} a_m(T_1) \exp(i\theta_m T_1) \\ \bar{A}_m(T_1) = \frac{1}{2} a_m(T_1) \exp(-i\theta_m T_1) \end{cases} \quad (m=1,2,3) \quad (12)$$

将式(11)、(12)代入方程(10),通过永年项分析可得出当  $\omega_1 \approx 0.5\omega_3, \omega_1 \approx \omega_2$  时系统将发生内共振,即当拉索的振动频率等于桥塔的振动频率,并等于桥面振动频率的一半时,系统将会发生内共振,拉索将会出现较大幅值的振动. 为了验证该结论,下面考虑一个参数模型进行数值积分计算.

### 3 数值计算

给定结构参数:  $m_1 = 10\text{kg}, m_2 = 2000\text{kg}, m_3 = 800\text{kg}, EA = 16000\text{N}, l = 20\text{m}, c_1 = c_2 = c_3 = 0, k_2 = 1995\text{N/m}, k_3 = 2400\text{N/m}$ , 索的初始拉力  $S_0 = 100\text{N}$ , 此时计算出的各部分固有频率为:  $\omega_1 = 1\text{rad/s}, \omega_2 = 1\text{rad/s}, \omega_3 = 3\text{rad/s}$ . 此时各频率之间的关系恰好满足上节得到的发生内共振的条件. 利用四阶龙格库塔算法<sup>[10]</sup>, 取定步长为 0.02. 在初始位移  $x_1(0) = 0.01, x_2(0) = 0.01, x_3(0) = 0.01$ , 初始速度皆为

零的情况下求解方程(7),得到  $x_1, x_2, x_3$  的时间历程、频谱及相图,如图 2-4 所示:

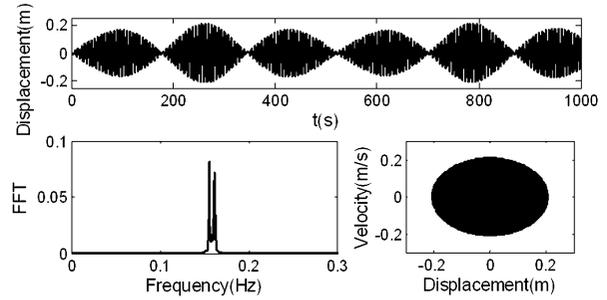


图 2 拉索的时域、频谱、及相图

Fig. 2 Diagrams of time history, frequency spectrum, and phase trajectory of cable

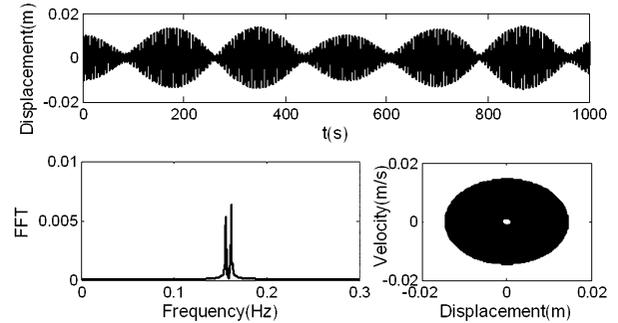


图 3 桥塔的时域、频谱、及相图

Fig. 3 Diagrams of time history, frequency spectrum, and phase trajectory of tower

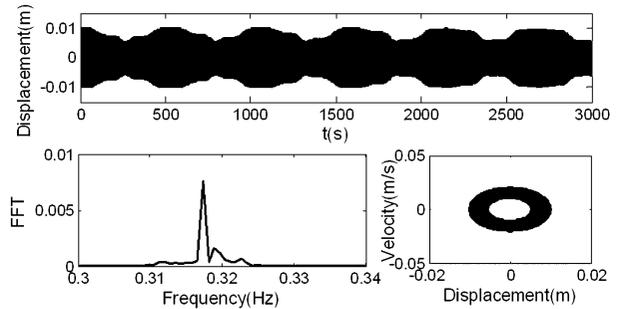


图 4 桥面的时域、频域、及相图

Fig. 4 Diagrams of time history, frequency spectrum, and phase trajectory of deck

由图 2-4 可看出在无阻尼条件下,拉索,桥塔的振动有拍的特性,其振幅分别随时间呈周期性变化. 桥塔的相位与拉索相反,表示振动能量在桥塔和桥索之间传递,同时桥面也参与能量的交换,但系统的总能量并不改变.

为了清楚地表明各自由度固有频率间的匹配对参数共振系统振动特性的影响,我们取前面数值仿真时使用的参数,但调节拉索的初始拉力,可以

得到拉索的位移响应最大幅值随  $\omega_1/\omega_3$  变化的曲线图。

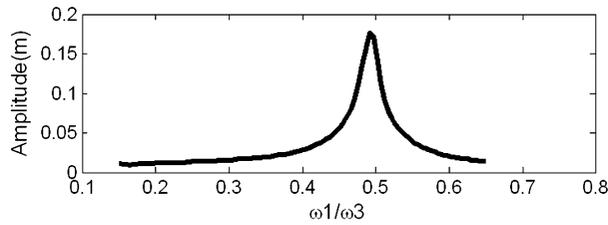


图5 拉索位移响应最大幅值随变化曲线

Fig. 5 The maximal amplitude of cable with the variation of parameter

由图5可以清晰看到当  $\omega_1/\omega_3$  的值落在0.5附近的连续区间时,系统将会激发明显得共振,称为共振区,而在此区间外振幅的变化基本呈现线性。

由于真实系统中不可避免会出现空气阻尼和结构阻尼,而阻尼的存在往往会缩小系统出现稳态周期振动的参数区域.对本文得到的稳态运动方程进行分析可以得出该系统在有阻尼情况下不存在稳态周期振动,一般情况下系统的振动会衰减至零.例如当阻尼参数为:  $c_1 = 0.2, c_2 = 40, c_3 = 32$  ( $c'_1 = 0.02, c'_2 = 0.02, c'_3 = 0.04$ ,以满足实际情况阻尼比1%左右的范围)时,三个自由度的位移响应如图6所示:

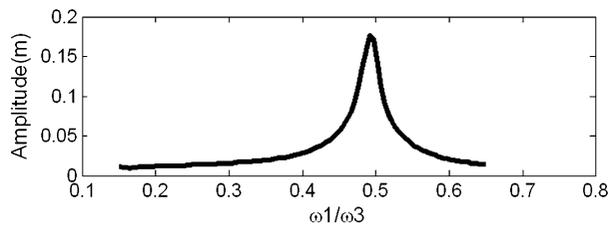


图5 有阻尼时拉索,桥塔,桥面时程图

Fig. 5 Diagrams of time history of cable, tower and deck with presence of damping

从图6可以看到三个集中质量随时间的增加均衰减为零,但是衰减过程中各自由度之间也会发生能量的传递转换。

## 4 结论

本文考虑桥塔,拉索和桥面之间的相互影响,建立了索-面-塔三自由度耦合非线性振动模型.利用多尺度方法得到了系统产生内共振的条件.对系统的内共振进行了数值模拟,结果表明拉索,桥面和桥塔在初始扰动下会发生1:2:1内共振,能量

会在系统各部分之间发生有规律的传递和交换,同时发现有阻尼情况下系统各自由度的振动一般会衰减为零。

## 参 考 文 献

- 1 F Benedettini, G Rega. Nonlinear dynamics of an elastic cable under planar excitation. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1987, 22(6): 497 ~ 509
- 2 陈水生,孙炳楠.斜拉索受轴向激励引起的面内参数振动分析. *振动工程学报*, 2002, 15(2): 144 ~ 150 (Chen S S, Sun B N. Analysis of stayed-cable vibration caused by axial excitation. *Journal of Vibration Engineering*, 2002, 15(2): 144 ~ 150 (in Chinese))
- 3 赵跃宇,王涛,康厚军.斜拉索主参数共振的稳定性分析. *动力学与控制学报*, 2008, 6(2): 113 ~ 117 (Zhao Y Y, Wang T, Kang H J. Analysis of the stability of principal parametric resonance of stayed-cable. *Journal of Dynamics and Control*, 6(2): 113 ~ 117 (in Chinese))
- 4 亢战,钟万勰.斜拉索参数共振问题的数值研究. *土木工程学报*, 1998, 31(4): 14 ~ 22 (Kang Z, Zhong W X. Numerical study on parametric resonance of cable in cable-stayed bridges. *China Civil Engineering Journal*, 1998, 31(4): 14 ~ 22 (in Chinese))
- 5 陈水生,孙炳楠.斜拉桥索-桥耦合非线性参数振动数值研究. *土木工程学报*, 2003, 36(4): 70 ~ 75 (Chen S S, Sun B N. Numerical study on nonlinear parametric vibration of coupled cables and bridge decks. *China Civil Engineering Journal*, 2003, 36(4): 70 ~ 75 (in Chinese))
- 6 赵跃宇,蒋丽忠.索-梁组合结构的动力学建模理论及其内共振分析. *土木工程学报*, 2004, 37(3): 69 ~ 72 (Zhao Y Y, Jiang L Z. The dynamical modeling theory and internal resonance of cable-beam composite structure. *China Civil Engineering Journal*, 2004, 37(3): 69 ~ 72 (in Chinese))
- 7 Marcelo A Ceballos, Carlos A Prato. Determination of the axial force on stay cables accounting for their bending stiffness and rotational end restraints by free vibration tests. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 317(1 ~ 2): 127 ~ 141
- 8 冯维明,高黎黎.索-梁耦合系统解的稳定性分析. *应用力学学报*, 2008, 25(2): 115 ~ 119 (Feng W M, Gao L L. Nonlinear dynamic analysis for coupled structure of cable-stayed beam. *Chinese Journal of Applied Mechanics*,

- 2008,25(2): 115 ~ 119 (in Chinese))
- 9 胡海岩. 应用非线性动力学. 北京: 航空工业出版社, 2000 (Hu H Y. Applied nonlinear mechanics. Beijing; Aviation Industry Press. 2000 (in Chinese))
- 10 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析. 清华大学出版社, 施普林格出版社,2001. (Li Q Y, Wang N C, Yi D Y. Numerical analysis. Beijing: Tsinghua University Press, Berlin: Springer-Verlag,2001(in Chinese))

## DYNAMICS OF A THREE DEGREES OF FREEDOM NONLINEAR VIBRATION MODEL OF CABLES AND BRIDGE DECKS AND TOWERS WITH THE FREQUENCY 1 : 2 : 1 INTERNAL RESONANCE \*

Zhang Yan<sup>1</sup> Wang Huailei<sup>1</sup> Yang Jie<sup>2</sup>

(1. Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

(2. Department of Civil Engineering, Nanjing, University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract** A nonlinear coupled vibration model of cables and bridge decks and towers and its 1: 2: 1 resonance was investigated. The cable was simplified as a concentrated mass jointed by two weightless strings. The deck and the tower were both simplified as a concentrated mass that can only move vertically and horizontally, respectively. By these simplifications, a nonlinear vibration system of three degrees of freedom was established. With the application of the method of multiple scales, the condition of occurrence of the internal resonance was obtained. The validity of the analysis was verified by numerical simulation. The results show that the 1: 2: 1 internal resonance will arise under some initial condition and then the vibration energy will be transformed and exchanged among the cables, the decks, and the towers regularly.

**Key words** cable-stayed bridge, cable-deck-tower, nonlinear vibration, method of multiple scales, internal resonance