

# 车辆追踪运行的离散模型与最优控制\*

潘登 郑应平

(同济大学电子与信息工程学院,上海 201804)

**摘要** 对车辆追踪运行进行控制,是实现车辆安全、快捷运行的重要手段之一.将车辆追踪运行控制问题归结为“速度差”调节和标准车距跟踪的混合系统进行研究.建立了离散模型,分析了其能控性和能观性,运用最优控制理论求解其反馈控制律,给出了算法步骤.对具体算例进行了仿真实现.

**关键词** 车辆追踪运行, 离散模型, 最优控制, 仿真

## 引言

车辆追踪运行现象普遍存在于铁路、公路等交通领域.后车追踪前车运行,必须随着前车的行为变化调整自身的行为,这种调整不仅体现在速度上,而且反映出跟驰车距的变化.跟驰车距和跟驰速度,一定程度上决定了车辆能否安全、快捷地追踪运行,对其进行控制显然是必要的.目前对车辆追踪运行研究成果主要集中在跟驰模型、跟驰车距等方面.跟驰模型主要有 Pipes 与 Forbes 的跟驰模型、GM 模型、基于安全车头间隔的模型、基于驾驶员心理反应的模型、基于期望车头间隔的模型、基于模糊推理系统的跟驰模型等[1],在此基础上,文献[2]用由两物体、弹簧和缓冲器结合而成的机械动力系统来模拟车辆跟驰行为,进而研究前后车速度、车间距和加速度等参数之间的互动关系,得出车辆行为调整至跟驰系统稳定的规律.文献[3][4]深入研究了安全跟驰车距与前后车速度、加速度或驾驶员反应时间的关系,明确了安全跟驰车距的计算方法和确定依据.文献[5]针对单辆汽车利用多体分析软件 ADAMS 建立 15 自由度非线性模型和 PID 控制策略,并进行了仿真、优化.在公路交通领域,追踪运行过程中车辆行为调整目前还主要依靠驾驶人员的主观判断和采取相应措施来实现,任何疏忽、判断不准确甚至错误、以及特殊情况下处理不当等,均会影响到车辆运行的安全性和快速性.在轨道交通领域,列车追踪运行安全距离目前还主要靠地面信号机及其分割成的若干闭塞分区

来保证,两种主要速度控制方式均存在一定的不足之处:阶梯式分级速度控制方式不能满足高密度行车的需要[6],速度-距离控制方式在模式曲线选取上无一定的算法,仅靠若干种模式曲线无法动态地、准确地反映列车在各种减速情况下的速度-距离关系.目前,国内外轨道交通领域的研究热点问题之一“移动闭塞系统及其相关技术”,旨在研究、开发、完善一种基于精确定位技术(区间不设置地面信号机)的列车运行安全防护与自动控制系统,对该环境下的列车追踪运行控制无疑提出了更高的要求.本文基于以上背景,在既有成果基础上,将车辆追踪运行控制归结为前后车速度差调节与标准车距跟踪的混合系统,建立便于计算机控制的离散模型,进而研究其控制规律.

## 1 问题描述

不妨称静止状态和匀速追踪运行状态为稳态,车辆追踪运行有一种稳态进入到另一种稳态称之为变速状态.图1为车辆追踪运行线性连续系统模型.

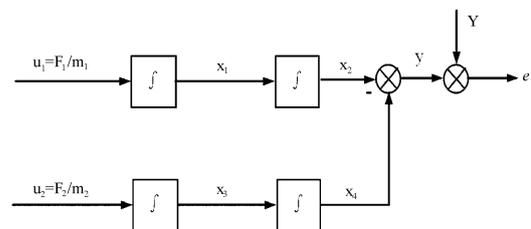


图1 车辆追踪运行线性连续系统模型

Fig. 1 Linear continuous model of car following

追踪运行的前、后车质量分别为  $m_1$ 、 $m_2$ ,  $x_1$ 、 $x_3$

2007-06-22 收到第1稿,2007-07-09 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(60674076)

分别为前、后车的运行速度,  $x_2, x_4$  分别为前、后车运行距离,  $y$  为前后车运行间距 ( $< 0$ ),  $Y$  为一定速度下交通管理部门的规定车距. 由图 1 可得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1)$$

当前、后车追踪运行处于稳态时,其合力  $F_1, F_2$  等于 0, 车距  $y = Y$  保持不变 ( $e = 0$ ), 当前车  $F_1 \neq 0$  时, 即进入变速运行状态, 前后车的速度不再相等 ( $x_1 \neq x_3$ ), 同时  $e \neq 0$ , 后车必须对此作出反应, 直至后车跟随前车进入新的稳态匀速追踪运行. 其中,  $u_1, u_2$  分别为前、后车的加速度. 令  $\bar{x}_1 = x_3 - x_1, \bar{x}_2 = x_4 - x_2, \bar{y} = \bar{x}_2$ , 可得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (u_2 - u_1) \\ \bar{y} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2)$$

将(2)式表示为一般情形为:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu \\ \bar{y} = C\bar{x} \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, u = u_2 - u_1, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]. [A \quad B]$  完全能控,  $[A \quad C]$  完全能观, 特征值  $\lambda_i(A) = 0 (i = 1, 2)$  均为实根.

## 2 车辆追踪运行的离散模型

运用零阶保持器法对(3)式进行离散化. 令

$$u(t) = u(k), kT \leq t \leq (k+1)T \quad (4)$$

求解(3)式, 可以得到

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \bar{x}(t_0) + \int_0^t e^{A(t-\eta)} Bu(\eta) d\eta \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \end{cases} \quad (5)$$

进一步可以得到

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = e^{AT} \bar{x}(k) + \int_0^T e^{A\eta} d\eta Bu(k) = \\ F\bar{x}(k) + Gu(k) \\ \bar{y}(k) = C\bar{x}(k) \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $F = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix}, G = \int_0^T e^{A\eta} d\eta, B = \begin{bmatrix} T \\ T^2/2 \end{bmatrix}.$

(6)式即为车辆追踪运行系统的离散化数学模型.

## 3 车辆追踪运行的最优控制

由于车辆在不同追踪运行速度下, 其应保持的间距是不同的. 从控制理论上来说,  $y$  必须实现对期望值  $Y$  的动态跟踪, 因此应把车辆追踪问题视作“间距跟踪”和“速度差调节”问题研究其最优控制律.

### 3.1 离散模型的能控性、能观性分析

$$\text{rank} [G \quad FG] = \text{rank} \begin{bmatrix} T & T \\ T^2/2 & 3T^2/2 \end{bmatrix} = 2 \quad (7)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CF \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ T & 1 \end{bmatrix} = 2 \quad (8)$$

可知系统离散模型为可控、可观测系统.

### 3.2 离散系统的最优控制

首先以有限时间 LQ (Linear Quadratic) 问题的最优性能指标函数进行讨论, 然后考虑到车辆追踪运行控制的实际情况, 讨论符合的最优稳态控制算法.

#### 3.2.1 有限时间最优控制律的求解

最优性能指标函数可表为:

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} (C\bar{x}(N) + Y(N))^T P (C\bar{x}(N) + Y(N)) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [ (C\bar{x}(k) + Y(k))^T Q (C\bar{x}(k) + \\ & Y(k)) + u^T(k) R u(k) ] \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $P \geq 0, Q \geq 0, R > 0$ , 均为单值矩阵, (注意:  $C\bar{x}(k), C\bar{x}(N)$  为负值). 且满足  $[F, \sqrt{F}]$  能观测条件. 引入拉格朗日乘子  $1 \times 2$  向量  $\lambda(k+1)$ , 表 Hamilton 函数为:

$$\begin{aligned} H(k) = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [ (C\bar{x}(k) + Y(k))^T Q (C\bar{x}(k) + \\ & Y(k)) + u^T(k) R u(k) ] + \lambda^T(k+1) (F\bar{x}(k) + Gu(k)) \end{aligned} \quad (10)$$

同时, 有以下诸式成立:

$$\lambda(k) = F^T \lambda(k+1) + C^T Q C \bar{x}(k) + C^T Q Y(k) \quad (11)$$

$$G^T \lambda(k+1) + R u(k) = 0 \quad (12)$$

$$\bar{x}_0 = \bar{x}(0); \lambda(N) = C^T P (C\bar{x}(N) + Y(N)) \quad (13)$$

其中, (11) 式为协态方程, (12) 式为驻值条件, (13) 式为边界条件. 由(12)式可得

$$u(k) = -R^{-1} G^T \lambda(k+1) \quad (14)$$

假设

$$\lambda(k) = S(k)\bar{x}(k) + v(k) \quad (15)$$

式中,  $v(k)$  为 2 维待辅助输入向量,  $S(k)$  为  $2 \times 2$  矩阵. 显然可得

$$S(N) = C^T P C \quad (16)$$

$$v(N) = C^T P Y(N) \quad (17)$$

由(11)、(14)、(15)式可得

$$\begin{aligned} u(k) = & -R^{-1}G^T(S(k+1)\bar{x}(k+1) + v(k+1)) \\ & - R^{-1}G^T S(k+1)(F\bar{x}(k) + Gu(k)) \\ & - R^{-1}G^T v(k+1) \end{aligned} \quad (18)$$

解得

$$\begin{aligned} u(k) = & -(G^T S(k+1)G + R)^{-1}G^T S(k+1)F\bar{x}(k) - \\ & (G^T S(k+1)G + R)^{-1}G^T v(k+1) \end{aligned} \quad (19)$$

令

$$L(k) = -(G^T S(k+1)G + R)^{-1}G^T S(k+1)F \quad (20)$$

$$L_v(k) = -(G^T S(k+1)G + R)^{-1}G^T \quad (21)$$

闭环系统的状态方程可表为

$$\bar{x}(k+1) = (F + GL(k))\bar{x}(k) + GL_v(k)v(k+1) \quad (22)$$

可以看出,问题的关键在于如何求解  $S(k)$ 、 $v(k+1)$ . 下面就继续探讨.

联立(6)、(14)、(15)三式,可得

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) = & F\bar{x}(k) - GR^{-1}G^T S(k+1)\bar{x}(k+1) \\ & - GR^{-1}G^T v(k+1) \end{aligned} \quad (23)$$

解得

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) = & (I + GR^{-1}G^T S(k+1))^{-1}(F\bar{x}(k) - \\ & GR^{-1}G^T v(k+1)) \end{aligned} \quad (24)$$

联立(11)、(15)式,可以得到

$$\begin{aligned} S(k)\bar{x}(k) + v(k) = & F^T(S(k+1)\bar{x}(k+1) + \\ & v(k+1)) + C^T Q C \bar{x}(k) + C^T Q Y(k) \end{aligned} \quad (25)$$

将(24)式代入(25)式,整理后得

$$\begin{aligned} [-S(k) + F^T S(k+1)(I + GR^{-1}G^T S(k+1))^{-1}F + \\ C^T Q C]\bar{x}(k) + [-v(k) - F^T S(k+1)(I + \\ GR^{-1}G^T S(k+1))^{-1}GR^{-1}G^T v(k+1) + F^T v(k+1) + \\ C^T Q Y(k)] = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

由于上式必须对  $k \in [0, N]$  内的所有  $\bar{x}(k)$  均成立,故有以下方程组成立:

$$\begin{cases} -S(k) + F^T S(k+1)(I + GR^{-1}G^T S(k+1))^{-1}F + C^T Q C = 0 \\ v(k) + F^T S(k+1)(I + GR^{-1}G^T S(k+1))^{-1} \times \\ GR^{-1}G^T v(k+1) - F^T v(k+1) - C^T Q Y(k) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

进一步得到

$$S(k) = F^T[S(k+1) - S(k+1)G(G^T S(k+1)G + R)^{-1}G^T S(k+1)]F + C^T Q C \quad (28)$$

$$v(k) = [F^T - F^T S(k+1)G(G^T S(k+1)G + R)^{-1}G^T]v(k+1) + C^T Q Y(k) \quad (29)$$

显而易见,求解(28)式 Riccati 方程是寻求最优控制律的关键. 确定  $N$  值以后,利用非负定矩阵  $S(N)$ (见(16)式),可以计算出  $k = N-1, N-2, \dots, 1, 0$  时的  $S(k)$  值,进而可以利用  $v(N)$ (见(17)式)计算出  $v(k)$ ,并进一步计算出  $L(k)$ 、 $L_v(k)$ .

但是,上述计算方法只适合终端时刻确定情况,一般离线计算出各采样时刻的最优控制律后再用于实际控制. 而车辆在追踪运行状态,行为变化的起因一般较为复杂,发生时刻和持续时间往往难以严格确定,这将导致(28)、(29)两式的“倒推”算法无法用于实际控制. 因此,有必要对上述算法进一步改进.

### 3.2.2 最优稳态控制律的求解

尽管车辆追踪运行在不同情况下的行为调整,其调整时间( $N$ 值)往往不一样,但业已证明<sup>[7][8]</sup>,无论  $N$  值为多少,在  $[F, G]$  能控和  $[F, \sqrt{Q}]$  能观条件下,对非负定矩阵  $S(N)$ , (28) 式中的  $S(k)$  是收敛的. 即有

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S(k, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} S(k, N) \quad (30)$$

成立,即  $S(k)$  收敛于  $S$ .

由于  $S(N)$  的取值不影响  $\lim_{N \rightarrow \infty} S(k, N)$  的收敛性,根据(16)式可以算出  $S$  的值.

同样,由于(29)式不适于车辆追踪运行的控制计算,为了确定反馈控制律,必须寻求适合(22)式中  $v(k+1)$  的计算公式. 由(6)、(11)、(12)、(15)诸式,可得

$$\begin{aligned} v(k+1) = & (C^T Q C - S(k+1))F\bar{x}(k) + (C^T Q C - \\ & S(k+1))Gu(k) - F^T(G^T)^+ Ru(k+1) + \\ & C^T Q Y(k+1) \end{aligned} \quad (31)$$

由(28)、(31)、(20)、(21)、(19)诸式就可以分别得到以下最优稳态控制律计算公式:

$$S = F^T[S - SG(G^T SG + R)^{-1}G^T S]F + C^T Q C \quad (32)$$

$$\begin{aligned} v(k+1) = & (C^T Q C - S)F\bar{x}(k) + (C^T Q C - S)Gu(k) - \\ & F^T(G^T)^+ Ru(k+1) + C^T Q Y(k+1) \end{aligned} \quad (33)$$

$$L = -(G^T SG + R)^{-1}G^T S F \quad (34)$$

$$L_v = -(G^T SG + R)^{-1}G^T \quad (35)$$

$$u(k) = L\bar{x}(k) + L_v v(k+1) \quad (36)$$

其中,  $(G^T)^+$  为  $G^T$  的广义逆. 考虑到  $u(k) = u_2(k)$

$-u_1(k)$ , 可以得到如下车辆追踪运行离散最优稳态控制框图:

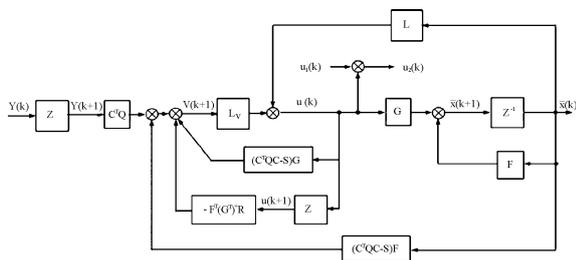


图 2 车辆追踪运行离散最优稳态控制框图

Fig. 2 Discrete optimal steady control of car following

### 4 算法步骤

Step1: 建立(3)式所示车辆追踪运行连续系统数学模型, 得系统矩阵  $A, B, C$ ;

Step2: 选择采样周期  $T$ ;

Step3: 运用零阶保持器法对(3)式进行离散化, 得到(6)式所示车辆追踪运行离散化数学模型. 从而得到矩阵  $F, G, C$ ;

Step4: 取  $N = 100$ , 确定非负定矩阵  $P, Q$  和正定矩阵  $R$ , 建立如(9)式所示的最优性能指标函数;

Step5: 取  $S(N) = [0], k = N - 1$ ;

Step6: 按(28)式计算  $S(k)$ ;

Step7:  $k = k - 1$ , 判断  $S(k) - S(k - 1)$  的范数是否足够小, 即判断  $S(k)$  是否收敛到稳态值  $S$ ? 是则继续, 否则转 Step6;

Step8:  $k_0 = k$ , 将  $S = S(k_0)$  代入(34)、(35)式, 可得  $L, L_v$ ;

Step9: 输出  $S, L, L_v$ ;

Step10: 将  $L, L_v, v(k)$  等值代入(36)式, 即可得到所求反馈控制律, 进一步可得  $u_2(k) = u(k) + u_1(k)$ .

### 5 算例仿真

给定参数: 采样时间  $T = 0.01s$ ,  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.01 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $G = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.00005 \end{bmatrix}$ .  $P = 5, Q = 12, R = 10$ . 初始状态为以间距  $120m$ 、速度  $20m/s$  的匀速追踪运行状态, 前车突然改变自身行为(见图 3 所示), 经历了加速、匀速和减速三个阶段. 后车对此进行自身行为的调整, 以保持安全、快速高效的追踪运行, 最后在距前车  $5m$  处停车.

下面具体讨论控制作用下的后车行为调整情况.

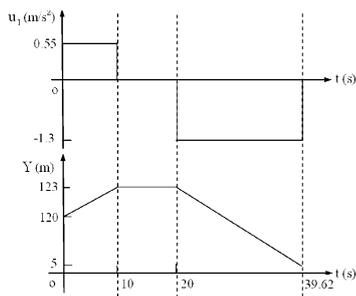


图 3  $u_1$  和  $Y$

Fig. 3  $u_1$  and  $Y$

#### (1) 反馈控制律

Matlab 计算结果如下:

$$S = \begin{bmatrix} 1480.2 & 1095.4 \\ 1095.4 & 1627.5 \end{bmatrix},$$

$$L = [ - -1.4747 \quad -1.0874 ]$$

由于后车发现前车行为变化, 调整自身行为, 直至行为生效, 需要一部分时间(即滞后时间), 设为, 一般在  $[1.0s, 2.2s]$  之间. 反馈控制在之后才开始发生作用, 本文取  $\tau_s = 2s$ .

#### (2) 控制作用下的行为调整

图 4(a)、(b)、(c) 分别描述了上述反馈控制律下车辆追踪运行过程中  $x_3 - x_1, x_4 - x_2$  和  $e$  的响应曲线.

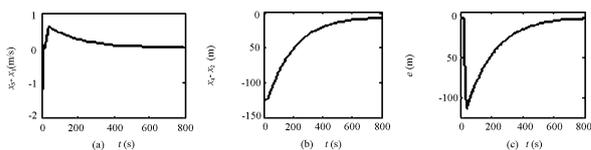


图 4 车辆追踪运行控制系统仿真

Fig. 4 Simulation of car following control system

图 5 对图 4 中  $0 \sim 30s$  之间车辆追踪运行控制系统的响应曲线进行了“放大”.

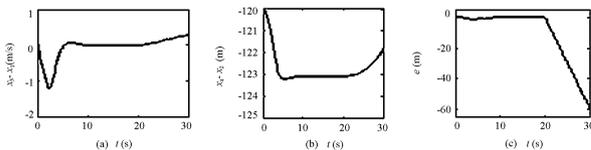


图 5  $0 \sim 30s$  车辆追踪运行控制系统的响应曲线

Fig. 5 Response of car following control system in early 30 minutes

可以发现以下规律或结论:

(a)  $t \in [0, 10s]$  时间内, 前车以  $0.55m/s^2$  的加速度匀加速运行, 由于滞后原因, 后车在  $[0, 2s]$  时间内仍然匀速运行, 之后反馈控制律发生作用, 开始加速, 但前车依然处在加速过程中, 故两车间距

( $|x_4 - x_2|$ )不断扩大,

(b)  $t \in [10, 20s]$  时间内, 前车匀速运行, 但前车在这段时间初期由于滞后因素, 仍处于加速运行阶段, 故车间距离有缩小的趋势, 但由于反馈控制持续发生作用, 很快两车进入稳态, 即匀速追踪运行状态.

(c)  $t \in [20, 39.62s]$  时间内, 前车以  $-1.3m/s^2$  的加速度匀减速运行直至停车, 除了滞后因素影响外, 该段时间内车间距离基本上呈持续缩小状态, 但是反馈作用不仅要使后车停下来, 而且要求其间距逐渐缩小为  $5m$  左右停车, 不难发现  $39.62s$  之后, 后车的行为调整时间是“漫长”的, 速度成平缓减小趋势, 可以保证在前车紧急停车情况下后车减速运行的安全性和平稳性、舒适性. 不仅不同于阶梯式速度分级控制方式, 而且也不同于速度-距离模式曲线控制方式.

## 6 结束语

本文从工程应用出发, 建立了适合计算机数据处理的车辆追踪运行的离散数学模型, 运用最优控制理论研究了适于车辆追踪运行实际的反馈控制律求解算法, 针对具体算例仿真了车辆追踪运行的控制情况, 表明了算法具有一定的有效性.

## 参 考 文 献

- 何民, 刘小明, 荣建. 交通流跟驰模型研究进展. 人类工效学, 2000, 6(2): 46 ~ 50 (He Min, Liu Xiaoming, Rong Jian. Advances in car following models. *Chinese Ergonomics*, 2000, 6(2): 46 ~ 50 (in Chinese) )
- Yang Tahui, Zu Chiwei. Linear dynamic car-following model. IEEE. Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation, Hangzhou, 2004, 5212 ~ 5216
- 郑安文, 张炳焕. 高速公路不同跟车状态下安全行车间距分析. 武汉科技大学学报(自然科学版), 2003, 26(1): 54 ~ 57 (Zheng Anwen, Zhang Binghuan. Safety distance under different following states on expressway. *Journal of Wuhan University of Science & Technology (Natural Science Edition)*, 2003, 26(1): 54 ~ 57 (in Chinese) )
- 徐杰, 杜文, 孙宏. 跟随车安全距离的分析. 交通运输工程学报, 2002, 2(1): 101 ~ 104 (Xu Jie, Du Wen, Sun Hong. Safety distance about Car-following. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2002, 2(1): 101 ~ 104 (in Chinese) )
- 张云清, 高斯, 李凌阳等. 基于多体力学的车辆动力学控制系统仿真及优化. 动力学与控制学报, 2007, 5(1): 68 ~ 74 (Zhang Yunqing, Gao Si, Li Lingyang, et al. Vehicle dynamic control system simulation and optimization using Multi-body dynamics. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1): 68 ~ 74 (in Chinese) )
- 林瑜筠. 城市轨道交通信号设备. 北京: 中国铁道出版社, 2006, 204 ~ 207 (Lin Yujun. Signaling equipments of urban rail transit systems. Beijing: China Railway Publishing House, 2006: 204 ~ 207 (in Chinese) )
- 孙增圻. 计算机控制理论及应用. 北京: 清华大学出版社, 1989: 129 ~ 135 (Sun Zengqi. Computer control theory and its applications. Tsinghua University Press, 1989: 129 ~ 135 (in Chinese) )
- Frank L Lewis. Optimal control. New York: John Wiley & Sons, 1986: 111 ~ 118

## DISCRETE MODEL AND OPTIMAL CONTROL OF CAR FOLLOWING \*

Pan Deng Zheng Yingping

(School of Electronic & Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract** The control of car following is one of the important methods for its rapidity and safety. This paper classified the control of car following into the hybrid control systems, which comprised the velocity error regulator and the standard car-following distance tracker. The discrete model of car following was constructed, and its observability and controllability were discussed. And then, the optimal control theory was used to obtain its feedback control laws, and its algorithm was given. The practical example was simulated.

**Key words** car following, discrete model, optimal control, simulation

Received 22 June 2007, revised 9 July 2007.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (60674076)