

多自由度 Van der Pol 型系统振幅增大控制*

萧寒¹ 尹小波²

(1. 湖南大学力学与航空航天学院, 长沙 410082) (2. 中南大学地学与环境工程学院, 长沙 410083)

摘要 研究多自由度 Van der Pol 型非线性振动系统振幅增大的控制, 设计反馈控制器, 用数值方法对控制系统的幅值进行了计算, 绘制了在不同控制参数下, 系统响应的时间历程曲线和极限环. 研究表明通过调整控制参数, 能够增大极限环的幅值, 有工程应用价值, 对高维系统的分岔控制研究有一定的理论意义.

关键词 Van der Pol 系统, 极限环, 振幅, 反馈控制

引言

在非线性科学中, Van der Pol 振子是一个重要的非线性模型, 它最先出现在非线性电路系统中. 后来在力学、物理、化学、声学、生命科学以及工程科学等学科中有着广泛的应用^[1-3]. 例如, 对构造复杂的发动机的负载扰动采用 Van der Pol 混沌振动信号系统, 对该系统进行减振控制, 控制策略采用反馈闭环方法, 具有明显的减振效果. Van der Pol - Duffing 方程可用来描述流体诱导的结构振动^[4]. 耦合的 Van der Pol 系统在不同学科大量存在, 文献[1]研究了两个耦合的 Van der Pol 系统的稳定性和同步动力学问题. 利用耦合的 Van der Pol 系统来描述双极放电等离子体的振荡^[5]和心脏起搏器节点双向耦合运动^[6], 能很好地揭示这些系统的丰富的动力学特性.

研究多自由度 Van der Pol 型系统振幅增大的控制, 对非线性耦合的 Van der Pol 型系统设计反馈控制器, 通过调整控制参数, 控制增大极限环的幅值设计反馈控制器. Van der Pol 系统是自激振动系统^[7-10], 改变初始条件不能改变系统的振幅. 通过反馈控制来增大幅值在工程上有应用价值, 对高维系统的分岔控制研究也有一定的理论意义.

1 耦合的 van der Pol 振子

考虑非线性耦合的两自由度 van der Pol 型振子

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \varepsilon_1(1-x^2)\dot{x} + \alpha_1(x^3 - y^3) = 0 \\ \ddot{y} + y - \varepsilon_2(1-y^2)\dot{y} + \alpha_1(y^3 - x^3) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

这个系统在相平面 $x-\dot{x}$ 和 $y-\dot{y}$ 上均有极限环, 用数值方法可以求得方程(1)的解. 设 $\varepsilon_1 = 0.5, \varepsilon_2 = 0.5, \alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.2$. 系统(1)的时间历程曲线和极限环如图1所示. 理论分析与数值计算都表明不管初值取何值, 系统的振幅值均为2.

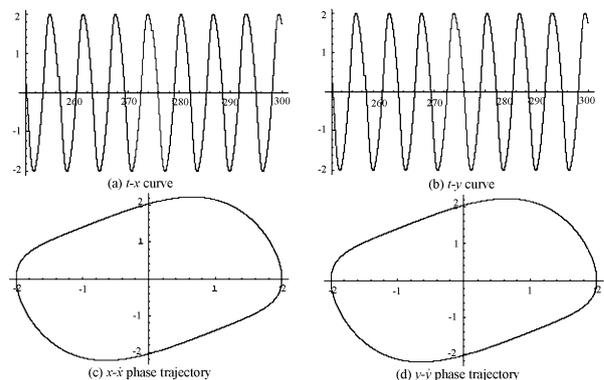


图1 未控制系统(1)的时间历程曲线和极限环

Fig. 1 The time history and limit cycle of uncontrolled system (1)

2 极限环幅值的反馈控制

若要增大系统(1)极限环的幅值, 需要设计一个反馈控制系统来实现. 反馈控制器不改变平衡点和分岔点的位置, 未控制系统(1)变成了如下的一个控制系统

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \varepsilon_1(1-x^2)\dot{x} + \alpha_1(x^3 - y^3) = u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) \\ \ddot{y} + y - \varepsilon_2(1-y^2)\dot{y} + \alpha_1(y^3 - x^3) = u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) \end{cases} \quad (2)$$

令

$$u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = k_1(\dot{x} - \dot{y}), u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = k_2(\dot{y} - \dot{x}) \quad (3)$$

控制系统(2)变为

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \varepsilon_1(1-x^2)\dot{x} + \alpha_1(x^3 - y^3) = k_1(\dot{x} - \dot{y}) \\ \ddot{y} + y - \varepsilon_2(1-y^2)\dot{y} + \alpha_2(y^3 - x^3) = k_2(\dot{y} - \dot{x}) \end{cases} \quad (4)$$

用数值计算方法可以求得控制系统(4)的解. 将原系统的参数和控制参数分别取为 $\varepsilon_1 = 0.5, \varepsilon_2 = 0.5, \alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.2, k_1 = 0.9, k_2 = 0.6$. 控制系统(4)的极限环如图 2 所示, 其振幅值为 $\alpha_1 = 3.96, \alpha_2 = 3.78$. 这个结果比较原来的幅值 2 是增大了.

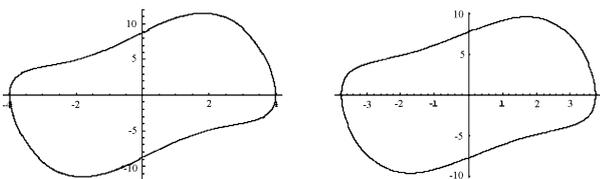


图 2 控制系统(4)的极限环

Fig. 2 The limit cycle of controlled system (4)

将反馈控制器设计为

$$u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = k(\dot{x} - \dot{y}), u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = 0 \quad (5)$$

或

$$u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = 0, u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = k(\dot{x} - \dot{y}) \quad (6)$$

也能增大控制系统(2)的极限环的幅值. 反馈控制器设计得更简单一些, 即

$$u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = k\dot{y}, u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = 0 \quad (7)$$

或

$$u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = 0, u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = k\dot{x} \quad (8)$$

同样能增大控制系统(2)的极限环的幅值.

类似地, 反馈控制器设计为

$$u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = k_1\dot{y}, u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = k_2\dot{x} \quad (9)$$

控制系统(2)变为

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \varepsilon_1(1-x^2)\dot{x} + \alpha_1(x^3 - y^3) = k_1\dot{y} \\ \ddot{y} + y - \varepsilon_2(1-y^2)\dot{y} + \alpha_2(y^3 - x^3) = k_2\dot{x} \end{cases} \quad (10)$$

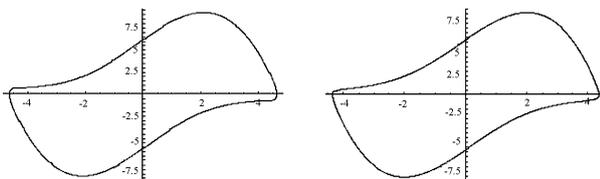


图 3 控制系统(10)的极限环

Fig. 3 The limit cycle of controlled system (10)

用数值计算方法可以求得控制系统(10)的解. 原系统的参数不改变, 这些参数和控制参数分别取为 $\varepsilon_1 = 0.5, \varepsilon_2 = 0.5, \alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.2, k_1 = 3.0, k_2 = 1.0$. 控制系统(10)的极限环如图 3 所示, 其振

幅值为 $\alpha_1 = 4.67, \alpha_2 = 4.35$. 反馈控制器(9)有很好的控制效果, k_1, k_2 可以取很大, 幅值可以控制到较大的值, 见表 1.

表 1 不同控制参数下的极限环幅值

Table 1 Amplitudes of limit cycle on various control parameters

k_1	k_2	α_1	α_2
3	1	4.67	4.35
6	2	6.32	5.71
9	3	7.74	6.89
12	4	8.81	7.83
15	5	9.82	8.78

自由度更多的非线性耦合的 van der Pol 型振子, 例如下面的系统

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \varepsilon_1(1-x^2)\dot{x} + \alpha_1(x^3 - y^3 - z^3) = 0 \\ \ddot{y} + y - \varepsilon_2(1-y^2)\dot{y} + \alpha_2(y^3 - z^3 - x^3) = 0 \\ \ddot{z} + z - \varepsilon_3(1-z^2)\dot{z} + \alpha_3(z^3 - x^3 - y^3) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

可以设计类似的反馈控制器来增大系统(11)的极限环幅值.

3 结论

设计反馈控制器, 调整控制参数, 可控制非线性耦合的多自由度 Van der Pol 型系统的振幅增大. 通过反馈控制来增大幅值可解决改变初始条件不能改变系统振幅大小的问题, 在工程上有应用前景.

参 考 文 献

- 1 H. G. Enjieu Kadji, R. Yamapi. General synchronization dynamics of coupled Van der Pol - Duffing oscillators. *Physica A*, 2006, 370(2): 316 ~ 328
- 2 Kevin Rompala, Richard Rand, Howard Howland. Dynamics of three coupled van der Pol oscillators with application to circadian rhythms. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2007, 12(5): 794 ~ 803
- 3 Jin Zhou, Xuhua Cheng, Lan Xiang, Yecui Zhang. Impulsive control and synchronization of chaotic systems consisting of Van der Pol oscillators coupled to linear oscillators.

- Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 33(2): 607 ~ 616
- 4 R. Violette, E. de Langre, J. Szydlowski. Computation of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscillator model: Comparison with DNS and experiments. *Computers & Structures*, 2007, 85(11~14): 1134 ~ 1141
- 5 Cristina Stan, C. P. Cristescu, M. Agop. Golden mean relevance for chaos inhibition in a system of two coupled modified van der Pol oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 31(4): 1035 ~ 1040
- 6 Angela M. dos Santos, S. R. Sergio R. Lopes, R. L. Ricardo L. Viana. Rhythm synchronization and chaotic modulation of coupled Van der Pol oscillators in a model for the heartbeat. *Physica A*, 2004, 338(3-4): 335 ~ 355
- 7 H. K. Leung. Synchronization dynamics of coupled van der Pol systems. *Physica A*, 2003, 321(1-2): 248 ~ 255
- 8 黄克累, 陆启韶, 甘春标. 耦合 Van der Pol - Duffing 振子的强共振分叉解. 应用数学和力学, 1999, 20(1): 63 ~ 69 (Huang Kelei, Lu Qishao, Gan Chunbiao. Strongly resonant bifurcations of nonlinearly coupled van der Pol - Duffing oscillator. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1999, 20(1): 63 ~ 69 (in Chinese))
- 9 马少娟, 徐伟, 雷佑铭. 随机 Duffing - van der Pol 系统响应的 Chebyshev 多项式逼近. 动力学与控制学报, 2004, 2(3): 80 ~ 84 (Ma Shaojuan, Xu Wei, Lei Youming. The orthogonal polynomial approximation for response problem of stochastic Duffing - van der Pol system. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3): 80 ~ 84 (in Chinese))
- 10 钱长照, 彭献. van der Pol 系统极限环幅值的时滞控制. 动力学与控制学报, 2005, 3(2): 25 ~ 28 (Qian Changzhao, Peng Xian. Amplitude control of limit cycle in van der Pol system with time delays. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2): 25 ~ 28 (in Chinese))

ENLARGING AMPLITUDE CONTROL OF VAN DER POL TYPE WITH MULTI DEGREE OF FREEDOM SYSTEM*

Xiao Han¹ Yin Xiaobo²

(1. College of mechanics and aerospace, Hnuan University, Changsha 410082, China)

(2. School of Geoscience and Environmental Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract To enlarge the amplitude of limit cycle of Van der Pol type with multi degree of freedom systems, the control method was studied and the feedback controllers were designed. The vibration amplitude of the controlled system was calculated by using the numerical analysis, and the time displacement curve and the phase trajectory of system responses were drawn based on the different control parameter. The research demonstrates that the amplitude of limit cycle can be enlarged by means of adjusting the control gain. This work has value in engineering application and has theoretical help to the bifurcation control research of high dimension nonlinear systems.

Key words Van der Pol system, limit cycle, amplitude, feedback control