

# WB法在多域声学分析中的应用

彭伟才 何 铮

(华中科技大学力学系, 武汉 430074)

**摘要** 描述了振动声系统建模技术的基本概念. 根据域分解的连续性条件, 讨论了界面的压力和速度连续以及阻抗连续, 应用加权余量法推导了两者的耦合模型. 并用 LMS/SYSNOISERev 5.5 进行了有限元数值模拟, 计算结果与有限元结果符合得较好. 通过比较两种连续性条件, 发现前者更适合较小的计算模型而后者更适合较大的计算模型. 最后对域分解提出了几个简单优化原则.

**关键词** 声学, 多域, 域分解, Trefftz 法

## 引言

当今分析声和结构-声(耦合)的数值方法中基于单元技术的主要是有限元和边界元. 有限元法(FEM)<sup>[1]</sup>将声域离散成大量单元, 每一个单元上的动力学变量采用简单、近似的形函数(多项式)来描述. 边界元法(BEM)<sup>[2]</sup>将声域的边界离散成大量单元, 每一个边界单元上的动力学变量采用简单、近似的形函数来描述, 场变量由边界变量的近似值通过边界积分方程得到.

由于每一个单元上的变量采用近似的形函数描述, 为了达到要求的精度, 需要大量的单元. 随着频率的增加, 发散误差也增加, 于是网格密度和迭代次数(为了达到要求的精度)也随着频率增加. 因此, 基于单元的方法在分析声和结构-声问题时通常被约束在低频段.

近年来, WB(Wave based)法得到了发展. WB方法由 K. U. Leuven - 噪声和振动研究组基于间接 Trefftz<sup>[3,4]</sup>方法推导而来. 与基于单元的方法相比, 结构和声域都不需要划分成更小的单元, 整个域内的动力学变量(结构的位移或者声压)由精确满足动力学方程齐次部分的波函数和满足非齐次动力学方程的特解函数组成. 波函数的常数系数通过加权余量法或者最小二乘法得到. Desmet 等人已经证明了 WB 法在收敛速度和精度方面要优于有限元法<sup>[5,6]</sup>. WB 法的一个特点是可以推广到中频段的频率计算. 因为低频段可采用有限元以及高频段采

用统计能量法, 而中频段还没有比较适用的方法.

WB 法收敛的一个充分非必要条件是所求声域为凸形(convex). 对于非凸形的声域要分解成许多的子域(凸形), 子域之间通过连续性条件进行耦合. 本文讨论了这种方法在二维声问题中的应用.

## 1 基本理论

### 1.1 定义

WB 方法的详细推导可参考文献<sup>[7]</sup>. 考虑一个 2D 的凸形有界声域  $\Omega$ , 如图 1 所示, 其密度为  $\rho$  和声速为  $c$ . 声域  $\Omega$  的载荷条件: 1) 在  $r_q$  点受到源强度幅值为  $q$  的点源; 2) 给定的边界条件. 域  $\Omega$  内一点  $r(x, y)$  的压力  $p$  的非齐次 Helmholtz 方程

$$(\Delta + k^2)p(r) = -j\omega q\delta(r, r_q), \forall r \in \Omega \quad (1)$$

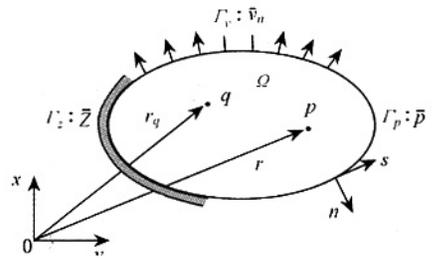


图1 2D声学模型

Fig.1 2D acoustic model

其中  $\Delta$  为 Laplace 算子,  $k = \omega/c$  为声学波数,  $\omega$  为圆周频率,  $j = \sqrt{-1}$  为虚数单位,  $\delta$  为狄拉克  $\delta$  函数. 边界由三类不重叠的部分组成( $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_v$

$\cup \Gamma_z$ ), 边界条件定义如下

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= \bar{p}, \forall \mathbf{r} \in \Gamma_p \\ \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} &= \bar{v}_n, \forall \mathbf{r} \in \Gamma_v \\ \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} &= p(\mathbf{r})/Z, \forall \mathbf{r} \in \Gamma_z \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\partial/\partial n$  表示外法线方向  $n$  的导数.

### 1.2 压力的近似值

全场定义的基函数  $\Phi_a$  的线性组合以及特解函数  $\hat{p}_q$  作为精确解的近似值

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &\approx \hat{p}(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^{n_a} \Phi_a(\mathbf{r})p_a + \hat{p}_q(\mathbf{r}) \\ &= \Phi(\mathbf{r})\mathbf{p} + \hat{p}_q(\mathbf{r}), \forall \mathbf{r} \in \Omega \end{aligned} \quad (3)$$

向量  $\mathbf{p}$  中的  $p_a$  表示未知系数, 向量  $\Phi$  中的基函数  $\Phi_a$  是方程 (1) 的齐次解. 因此压力的近似值  $\hat{p}$  优先满足非齐次 Helmholtz 方程, 这也是间接 Trefftz 法的重要特征.

波函数在坐标轴方向为余弦函数, 所以波函数  $\Phi_a$  可以写成分量形式为

$$\Phi_a(x, y) = \begin{cases} \cos(k_{r,x}x)\exp(-jk_{r,y}y) \\ \exp(-jk_{s,x}x)\cos(k_{s,y}y) \end{cases} \quad (4)$$

其中  $k_{a,x}$  和  $k_{a,y}$  满足

$$k_{a,x}^2 + k_{a,y}^2 = k^2 \quad (5)$$

波数  $k_a = (k_{a,x}, k_{a,y})$  以及  $a = r, s$  定义为

$$\begin{aligned} k_r &= \left( \frac{r\pi}{L_x}, \pm \sqrt{k^2 - k_{r,x}^2} \right), \forall r = 0, 1, \dots, n_r \\ k_s &= \left( \pm \sqrt{k^2 - k_{s,y}^2}, \frac{s\pi}{L_y} \right), \forall s = 0, 1, \dots, n_s \end{aligned} \quad (6)$$

$L_x$  和  $L_y$  表示包围域  $\Omega$  的最小有界矩形的长度. 波模型的自由度个数  $n_a = \mathcal{X}(n_r + 1) + \mathcal{X}(n_s + 1)$ . 可以证明当  $n_a \rightarrow \infty$  时, 近似解 (3) 收敛于精确解. 由于只有有限个波函数才能用于数值计算, 这就要用到截断, 截断法则为

$$\frac{n_r}{L_x} \approx \frac{n_s}{L_y} \geq T \frac{k}{\pi} \quad (7)$$

其中  $T (\geq 2)$  为定义的截断参数.

在点  $\mathbf{r}_q$  作用源强幅值为  $q$  的点源, 可求解出自由空间响应的特解函数  $\hat{p}_q$ <sup>[8]</sup>

$$\hat{p}_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} \rho\omega q H_0^{(2)}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q\|) \quad (8)$$

其中  $H_0^{(2)}$  为第二类零阶汉克耳函数.

### 1.3 波模型

压力近似值  $\bar{p}$  满足 Helmholtz 方程, 它包括齐次解和特解的线性组合. 因此, 由边界条件 (2) 可以确定未知波系数  $p_a$ . 通过积分的形式使压力近似值  $\bar{p}$  满足边界条件 (2), 而得到波模型. 积分公式由加权余量法获得.

在声学边界条件的加权余量公式中, 三个残余误差函数为

$$\begin{aligned} R_p(\mathbf{r}) &= \hat{p}(\mathbf{r}) - \bar{p}(\mathbf{r}), \forall \mathbf{r} \in \Gamma_p \\ R_v(\mathbf{r}) &= \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}(\mathbf{r})}{\partial n} - \bar{v}_n(\mathbf{r}), \forall \mathbf{r} \in \Gamma_v \\ R_z(\mathbf{r}) &= \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}(\mathbf{r})}{\partial n} - \hat{p}(\mathbf{r})/Z(\mathbf{r}), \forall \mathbf{r} \in \Gamma_z \end{aligned} \quad (9)$$

得到加权余量公式为

$$\int_{\Gamma_p} \bar{p} R_p d\Gamma + \int_{\Gamma_v} \frac{-j\partial \bar{p}}{\partial n} R_v d\Gamma + \int_{\Gamma_z} \bar{p} R_z d\Gamma = 0 \quad (10)$$

其中  $\bar{p}$  为加权函数. 与有限元中的伽辽金方法相似, 权函数  $\bar{p}$  可以是基函数  $\Phi_a$  的线性组合.

$$\bar{p}(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^{n_a} \Phi_a(\mathbf{r})c_a = \Phi(\mathbf{r})\mathbf{c}, \forall \mathbf{r} \in \Omega \quad (11)$$

其中  $c_a$  为任意权函数的系数. 将压力近似值  $\hat{p}$  和权函数  $\bar{p}$  代入加权余量公式中 (10). 对任意的系数  $\mathbf{c}$ , 方程都必须成立, 得到  $n_a \times n_a$  的 WB 模型

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b} \quad (12)$$

其中对称矩阵  $\mathbf{A}$  定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{\Gamma_z} \Phi \left( \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi^T}{\partial n} - \frac{\Phi^T}{Z} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_v} \Phi \frac{j}{\rho\omega} \times \\ &\quad \frac{\partial \Phi^T}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi^T}{\partial n} \Phi^T d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

系统向量  $\mathbf{b}$  定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= - \int_{\Gamma_z} \Phi \left( \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}_q}{\partial n} - \frac{\hat{p}_q}{Z} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_v} \Phi \left( \bar{v}_n - \frac{j}{\rho\omega} \times \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \hat{p}_q}{\partial n} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial n} (\bar{p} - \hat{p}_q) d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

## 2 域分解的连续性条件

WB 法收敛的一个充分条件是域  $\Omega$  必须是凸形的, 如果不是凸形的, 则把它分成两个 (或者多个) 不重叠的凸形的子域, 如图 2 所示的  $\Omega^1$  和  $\Omega^2$ .

每个子域  $\Omega^e (e = 1, 2)$  由边界  $\Gamma^e$  围绕. 边界由四个不重叠的部分组成 ( $\Gamma^e = \Gamma_p^e \cup \Gamma_v^e \cup \Gamma_z^e \cup \Gamma_i^e$ ). 边界  $\Gamma^e / \Gamma_i^e$  上的边界条件在 (2) 式中已定义. 两个子域的公共边界满足  $\Gamma_i^1 = \Gamma_i^2$ .

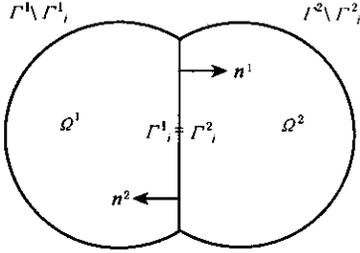


图2 两个子域的域分解模型

Fig.2 Domain decomposition of two subdomains

每个子域的压力表达式与 (3) 式类似

$$\begin{aligned}
 p_e(\mathbf{r}_e) &\approx \hat{p}(\mathbf{r}_e) = \sum_{a=1}^{n_a} \Phi_{ae}(\mathbf{r}_e) p_{ae} + \hat{p}_{eq}(\mathbf{r}_e) \\
 &= \Phi_e(\mathbf{r}_e) \mathbf{p}_e + \hat{p}_{eq}(\mathbf{r}_e), \forall \mathbf{r}_e \in \Omega^e, \\
 (e = 1, 2)
 \end{aligned} \tag{15}$$

2.1 压力和速度的连续性条件

在交界面上, 需同时满足压力和速度的连续性条件. 它们的数学描述为

压力连续

$$p_1(\mathbf{r}_1) = p_2(\mathbf{r}_2), \forall \mathbf{r}_e \in \Gamma_i^e \quad (e = 1, 2) \tag{16}$$

速度连续

$$\begin{aligned}
 \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n^2} &= - \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n^1}, \\
 \forall \mathbf{r}_e \in \Gamma_i^e (e = 1, 2)
 \end{aligned} \tag{17}$$

根据声学边界条件的加权余量公式, 定义在界面上的新的残余误差函数为

$$\begin{aligned}
 R_{ip} &= p_1(\mathbf{r}_1) - p_2(\mathbf{r}_2), \forall \mathbf{r}_e \in \Gamma_i^e, \\
 (e = 1, 2)
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 R_{iv} &= \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n^1} + \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n^2}, \\
 \forall \mathbf{r}_e \in \Gamma_i^e (e = 1, 2)
 \end{aligned} \tag{19}$$

对两个子域分别采用加权余量法 (10)

子域  $\Omega^1$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_p^1} \tilde{p}_1 R_v d\Gamma + \int_{\Gamma_p^1} \frac{-j}{\rho\omega} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial n^1} R_p d\Gamma + \int_{\Gamma_z^1} \tilde{p}_1 R_z d\Gamma + \\
 \int_{\Gamma_i^1} \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial n^1} R_{ip} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

子域  $\Omega^2$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_p^2} \tilde{p}_2 R_v d\Gamma + \int_{\Gamma_p^2} \frac{-j}{\rho\omega} \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial n^2} R_p d\Gamma + \int_{\Gamma_z^2} \tilde{p}_2 R_z d\Gamma + \\
 \int_{\Gamma_i^2} \tilde{p}_2 R_{iv} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

得到两个子域的耦合模型为

$$\begin{bmatrix} (A_1 + C_{11}) & C_{12} \\ C_{21} & (A_2 + C_{22}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_{11} + \mathbf{c}_{12} \\ \mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_{22} + \mathbf{c}_{21} \end{pmatrix} \tag{22}$$

其中  $A_e$  和  $\mathbf{b}_e (e = 1, 2)$  表示非耦合的子域模型矩阵和向量 (12). 模型的系数  $C$  和  $\mathbf{c}$  表示耦合矩阵和耦合向量.

基于压力和速度连续性条件的耦合矩阵和耦合向量为

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= - \int_{\Gamma_i^1} \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi_1^T}{\partial n^1} \Phi_1 d\Gamma \\
 \mathbf{c}_{11} &= \int_{\Gamma_i^1} \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi_1^T}{\partial n^1} \hat{p}_{1q} d\Gamma \\
 C_{12} &= \int_{\Gamma_i^1} \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi_1^T}{\partial n^1} \Phi_2 d\Gamma \\
 \mathbf{c}_{12} &= - \int_{\Gamma_i^1} \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi_1^T}{\partial n^1} \hat{p}_{2q} d\Gamma \\
 C_{21} &= \int_{\Gamma_i^2} \Phi_2^T \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n^1} d\Gamma \\
 \mathbf{c}_{21} &= - \int_{\Gamma_i^2} \Phi_2^T \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}_{1q}}{\partial n^1} d\Gamma \\
 C_{22} &= \int_{\Gamma_i^2} \Phi_2^T \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n^2} d\Gamma \\
 \mathbf{c}_{22} &= - \int_{\Gamma_i^2} \Phi_2^T \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}_{2q}}{\partial n^2} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{23}$$

2.2 阻抗连续性条件

第二种施加界面连续性的方法是应用压力和速度的线性组合, 我们称之为“等价速度”

$$\frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} - p(\mathbf{r}) / \bar{Z}_i \tag{24}$$

因为它的表达式类似阻抗边界条件, 所以这种耦合两个声域的方法可称为阻抗耦合.

阻抗连续性条件 1

$$\begin{aligned}
 \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n^1} - p_1(\mathbf{r}_1) / \bar{Z}_i = - \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n^2} - \\
 p_2(\mathbf{r}_2) / \bar{Z}_i, \forall \mathbf{r}_e \in \Gamma_i^e
 \end{aligned} \tag{25}$$

阻抗连续性条件 2

$$\frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n^2} - p_2(\mathbf{r}_2) / \bar{Z}_i = - \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n^1} - p_1(\mathbf{r}_1) / \bar{Z}_i, \forall \mathbf{r}_e \in \Gamma_i^e \quad (26)$$

根据声学边界条件的加权余量公式,得到新的

残余误差函数

$$R_{11} = \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n^1} + \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n^2} + (-p_1(\mathbf{r}_1) + p_2(\mathbf{r}_2)) / \bar{Z}_i, \forall \mathbf{r}_e \in \Gamma_i^e \quad (27)$$

$$R_{12} = \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_1(\mathbf{r}_1)}{\partial n^1} + \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial p_2(\mathbf{r}_2)}{\partial n^2} + (p_1(\mathbf{r}_1) - p_2(\mathbf{r}_2)) / \bar{Z}_i, \forall \mathbf{r}_e \in \Gamma_i^e \quad (28)$$

对两个子域分别采用加权余量法(10)

子域  $\Omega^1$

$$\int_{\Gamma_e^1} \tilde{p}_1 R_v d\Gamma + \int_{\Gamma_p^1} \frac{-j}{\rho\omega} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial n^1} R_p d\Gamma + \int_{\Gamma_z^1} \tilde{p}_1 R_z d\Gamma + \int_{\Gamma_i^1} \tilde{p}_1 R_{11} d\Gamma \quad (29)$$

子域  $\Omega^2$

$$\int_{\Gamma_e^2} \tilde{p}_2 R_v d\Gamma + \int_{\Gamma_p^2} \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial n^2} R_p d\Gamma + \int_{\Gamma_z^2} \tilde{p}_2 R_z d\Gamma + \int_{\Gamma_i^2} \tilde{p}_2 R_{12} d\Gamma \quad (30)$$

得到类似式(22)的耦合矩阵模型.其中  $A_e$  和  $b_e$  ( $e = 1, 2$ ) 同样表示非耦合的子域模型矩阵和向量(12)模型的系数  $C$  和  $c$  表示耦合矩阵和耦合向量.

基于阻抗连续性条件的耦合矩阵和耦合向量为

$$C_{11} = \int_{\Gamma_i^1} \Phi_1^T \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n^1} d\Gamma - \frac{1}{\bar{Z}_i} \Phi_1^T \Phi_1 d\Gamma$$

$$c_{11} = \int_{\Gamma_i^1} \Phi_1^T \left( \hat{p}_{1q} / \bar{Z}_i - \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}_{1q}}{\partial n^1} \right) d\Gamma$$

$$C_{12} = \int_{\Gamma_i^1} \Phi_1^T \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n^2} d\Gamma + \frac{1}{\bar{Z}_i} \Phi_1^T \Phi_2 d\Gamma$$

$$c_{12} = - \int_{\Gamma_i^1} \Phi_1^T \left( \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}_{2q}}{\partial n^2} + \hat{p}_{2q} / \bar{Z}_i \right) d\Gamma$$

$$C_{21} = \int_{\Gamma_i^2} \Phi_2^T \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n^1} d\Gamma + \frac{1}{\bar{Z}_i} \int_{\Gamma_i^2} \Phi_2^T \Phi_1 d\Gamma$$

$$c_{21} = - \int_{\Gamma_i^2} \Phi_2^T \left( \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}_{1q}}{\partial n^1} + \hat{p}_{1q} / \bar{Z}_i \right) d\Gamma$$

$$C_{22} = \int_{\Gamma_i^2} \Phi_2^T \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n^2} d\Gamma - \frac{1}{\bar{Z}_i} \int_{\Gamma_i^2} \Phi_2^T \Phi_2 d\Gamma$$

$$c_{22} = \int_{\Gamma_i^2} \Phi_2^T \left( \hat{p}_{2q} / \bar{Z}_i - \frac{j}{\rho\omega} \frac{\partial \hat{p}_{2q}}{\partial n^2} \right) d\Gamma \quad (31)$$

其中  $\bar{Z}_i$  决定“等价速度”中速度项与压力项相比的相对重要性.  $\bar{Z}_i$  越大则速度项占主导,相反则压力项占主导. B. Pluymers 等<sup>[9]</sup> 研究了基于 Trefftz 方法的多域声学问题,通过分析简单的矩形腔的动力学响应确定了  $\bar{Z}_i$  参数对收敛的影响,本文取  $\bar{Z}_i = \rho c$ .

WB 法采用直接方法耦合两个子域.因为 Helmholtz 方程为二阶的偏微分方程,所以为了求解则需在每个子域的耦合界面上给定一个边界条件.例如在压力和速度边界条件中,压力  $p_2$  可以认为是子域  $\Omega^1$  的界面  $\Gamma_i^1$  的载荷;法向速度  $-j\partial p_1 / \rho\omega \partial n^1$  可以认为是子域  $\Omega^2$  的界面  $\Gamma_i^2$  的载荷.

### 3 数值算例和讨论

考虑一个 L 形(非凸形)的 2D 声学问题,如图 3 所示.域的尺寸为  $H = 1 \text{ m}$ ,  $L = 3 \text{ m}$ .左边部分的上边界施加法向速度分布  $\bar{v}_n = 1 \text{ m/s}$ ,其余边界条件为刚性壁  $\bar{v}_n = 0 \text{ m/s}$ .空气密度为  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,声速  $c = 340 \text{ m/s}$ .

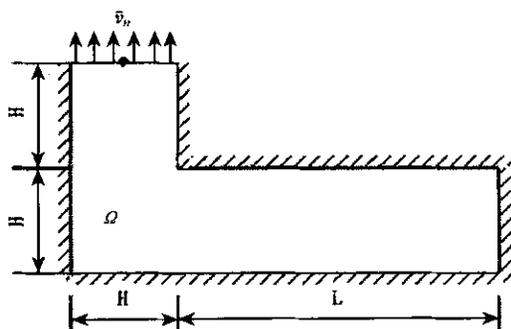


图 3 L 形声域(2D)

Fig. 3 2D acoustic problem with L-shaped domain

同时用有限元法计算了 2 种情况下的压力响应预报.(1)采用 12500 个线性四边形单元,网格尺寸  $h = 2 \text{ cm}$ (fine FEM)(2)采用 500 个线性四边形单元,网格尺寸  $h = 10 \text{ cm}$ (coarse FEM).有限元计算程序为 SYSNOISE Rev 5.5.图 4 为分解示意图.

图5 频率为 400 Hz 时压力虚部的分布,实部因为很小忽略.

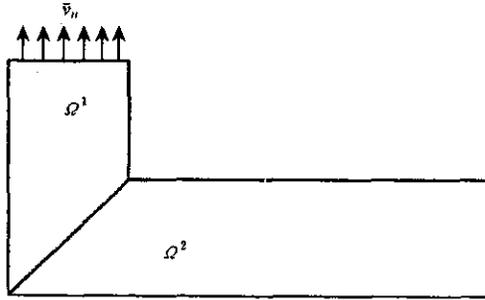


图4 2个子域的分解图

Fig.4 Domain subdivision for L-shaped domain

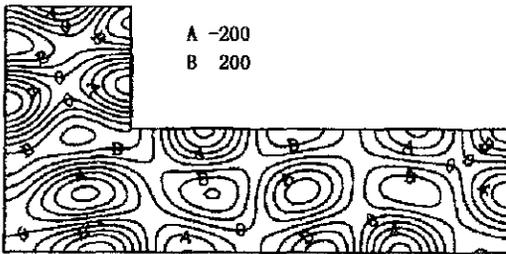


图5 400 Hz 时压力虚部的分布 [ Pa ]

Fig.5 Imaginary part of pressure distribution [ Pa ]

计算过程中发现,在 1 ~ 300 Hz 范围内,连续性条件采用压力和速度连续,则求解能得到较好的结果,因为在这个频率范围内的计算模型较小(WB 模型的最大 DOF 数为 66 个);对于较高的频率采用阻抗连续性条件则能得到收敛的结果,因为较高频率的计算模型较大(WB 模型的 DOF 数超过 150 个).

图6为点◆的压力响应预报,计算的频率步长  $\Delta f = 1$ ,计算的频率范围为 1 ~ 400 Hz.从结果来看,WB法计算结果与精细有限元模型(理论上可计算到 2833 Hz)结果完全吻合,而比较粗糙的有限元模型(理论上可计算到 566 Hz)在 1 ~ 250 Hz 内结果较好,高于 Hz 后偏差较大.从结果可知在计算量方面,WB法与有限元法相比有巨大优势.本文还应用 SYSNOISE 的边界元模块计算了本例,计算中采用 2400 个线单元得到与精细有限元模型较符合的结果,但计算时间较长.计算中发现边界元法对峰值的模拟不如 WB 法.在计算量方面,WB 法与边界元法相比仍有较大优势,且随着计算频率的增加这种优势更明显.边界元法中的边界积分一般采用非积分方式得到,所以实际的收敛速率要低于 WB 法

的收敛速率.

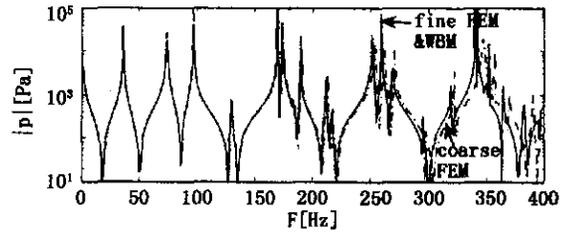


图6 点◆的压力响应预报

Fig.6 Pressure response prediction for point◆

以上只研究了两个域的耦合问题,同样可以采用类似的方法扩展到多个域的耦合问题.对于多个域的耦合问题,为了保证收敛需要对域分解作优化处理.优化的基本原则是调整子域个数与形状之间的平衡,有以下几个简单的原则:1)子域的总数和小子域的个数要最少;2)避免非常不规则的子域以及最大子域和最小子域的面积之比过大.

### 4 结论

本文讨论了 WB 法在非耦合声问题(2D)中的应用.因为 WB 法收敛的一个充分非必要条件是所求声域为凸形(convex).对于非凸形的声域要分解成一定数量的子域(凸形).子域之间通过连续性条件进行耦合.本文讨论两种连续性条件:压力和速度连续以及阻抗连续,结果表明压力和速度连续条件适合于较小的模型,而阻抗连续条件适合较大的模型.

域分解提高了 WB 法的适用范围.然而,在实际中不规则形状域的细分变得不可能或者需要大量的子域.在这种情况下,需要考虑子域数目和形状之间的平衡.因为域分解会影响 WB 法的精度和收敛速度,子域的不规则几何形状将会引起非单调的收敛行为.本文最后提出了域分解的几个简单优化原则.

### 参 考 文 献

- 1 Zienkiewicz OC, Taylor RL. The Finite Element Method-Vol 1&2: Basic formulation and linear problems. fourth edition. London, McGraw-Hill, 1997
- 2 Banjeree PK, Butterfield R. Boundary element methods in engineering science. London, McGraw-Hill, 1981
- 3 Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Proceed-

- ings of the 2nd International Congress. *Applied Mechanics* , Zurich , 1926 : 131 ~ 137
- 4 Kita E , Kamiya N. Trefftz method : an overview. *Advances in Engineering Software* , 1995 24 : 3 ~ 12
- 5 Pluymers B et al. Application of an efficient wave based prediction technique for the analysis of vibro-acoustic radiation problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* , 2004 ,168 : 353 ~ 364
- 6 Desmet W et al. A computationally efficient prediction technique for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems. *Advances in Engineering Software* , 2002 ,33 : 527 ~ 540
- 7 Desmet W. A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis. K U Leuven , division PMA , Leuven , 1998
- 8 Morse P ,Ingard K. Theoretical acoustics. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill ,1968
- 9 Pluymers B et al. A Trefftz-based prediction technique for multi-domain steady-state acoustic problems. Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration , Stockholm , Sweden , 2003

## WAVE BASED METHOD FOR MULTI-DOMAIN ACOUSTIC ANALYSIS

Peng Weicai He Zeng

( Department of Mechanics , Huazhong University of Science & Technology , Wuhan 430074 , China )

**Abstract** The basic concept of the technique modeling the vibro-acoustic system was described. According to the domain decomposition continuity conditions , this paper discussed pressure and velocity continuity and impedance continuity at the interface , and their corresponding coupled models were derived by using weighted residual formulation. And numerical analysis was carried out using finite element method by the software of LMS/SYSNOISE Rev 5.5. The results were in good agreement with FEM 's results. Comparing both of the continuity conditions , the pressure and velocity coupling is more accurate for small models , while the latter one performs better for large models. Moreover , several simple optimal principles of domain decomposition were provided.

**Key words** acoustic , multi-domain , domain-decomposition , Trefftz method